超限漸近次元について
(On transfinite asymptotic dimension)

愛媛大学大学院理工学研究科 山内 貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

Gromov [7] によって導入された漸近次元は, 幾何学的群論や粗幾何学で基本的な次元概念であり, その定義から, 被覆次元の粗幾何学版とみなすことができる. 被覆次元に関する (弱い) 無限次元概念として Haver [8] の性質 C がよく知られている. Dranishnikov [4] は, 性質 C の粗幾何学的類似概念として漸近的性質 C を導入し, 漸近的性質 C をもつ (有界幾何) 距離空間が Yu の性質 A (property A) をもつことを示した. ここで, 性質 A は coarse Baum-Connes 予想を成立させる十分条件として Yu [18] によって導入された粗幾何学における基本的概念である. 漸近次元が有限な距離空間は, 漸近的性質 C をもつ.

一方, Haver の性質 C をもつ空間を分類する概念として, Borst [2] による被覆次元の超限的 (順序数への) 拡張がある. この粗幾何学的概念として, Radul [13] は超限漸近次元を定義し, X が漸近的性質 C をもつことと, X の超限漸近次元が存在することが, 同値であることを証明した.

任意の可算群は, 一様離散, 左不変かつ固有な距離を, 粗同値を除いて一意的にもつ (例えば [9, Examples 1.2.2 and 1.4.7]). 以後, 可算群はこの距離をもつ距離空間とする. 漸近的性質 C をもつ可算群からなる可算直和が漸近的性質 C をもつかは未解決である. この問題に関して, Davila [3] は, 漸近次元が有限な可算群からなる可算直和は漸近的性質 C をもつことを証明した. また, Dydak [5] は, 漸近的性質 D を導入し, 漸近次元が有限な距離空間が漸近的性質 D をもつこと, 漸近的性質 D をもつ距離空間が漸近的性質 C をもつこと, 及び, 漸近次元が有限な可算群からなる可算直和は漸近的性質 D をもつことを証明した. さらに, Dydak [5] は問題「漸近的性質 C をもち, 漸近的性質 D をもたない距離空間は存在するか」を提起した. Orzechowski [11] は, 漸近的性質 D と超限漸近次元を関連付けることにより, この Dydak の問題を肯定的に解決した.

本稿では, 超限漸近次元について概説するとともに, Orzechowski の定理 [11] および関連する [17] の結果を紹介する.

1　漸近次元と漸近的性質 C

最小の無限順序数を ω で表す. ω は非負整数全体のなす集合ともみなす. 集合 A の濃度を $|A|$ で表す. (X, d) を距離空間とする. $U, U' \subset X$ と X の部分集合族 $\mathcal{V}$ に対し,

$$\operatorname{diam} U = \sup\{d(x, x') : x, x' \in U\}, \quad d(U, U') = \inf\{d(x, x') : x \in U, x' \in U'\},$$
$$\operatorname{mesh} \mathcal{V} = \sup\{\operatorname{diam} V : V \in \mathcal{V}\}$$

とおく. $R > 0$ に対し, X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が R-**disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して $d(U, U') \geq R$ であるときをいう. また, $\mathcal{U}$ が **pairwise disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して $U \cap U' = \varnothing$ であるときをいう.

定義 1.1 ([7]). 次の条件をみたす最小の $n \in \omega$ を X の**漸近次元** (**asymptotic dimension**) といい, $\operatorname{asdim} X$ で表す: 任意の $R > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ と $S > 0$ が存在する.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R-disjoint である.
(3) $\operatorname{mesh} \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i \leq S$ である.

漸近次元は粗幾何学における不変量である (例えば [9, Theorem 2.2.5]). 次の Ostrand の定理 [10] により, 漸近次元は被覆次元の粗幾何学的類似概念とみなせる.

定理 1.2 ([10, Theorem 2]). コンパクト距離空間 X に対して, 次の条件をみたす最小の $n \in \omega$ は X の被覆次元と等しい: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の開集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在する:

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は pairwise disjoint である.
(3) $\operatorname{mesh} \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i \leq \varepsilon$ である.

一方, (位相) 次元論では, 次の Haver [8] による性質 C がよく知られている.

定義 1.3 ([8]). コンパクト距離空間 X が (Haver の) **性質 C** (**property C**) をもつとは, 任意の正の数の列 $\{\varepsilon_i\}_{i \in \omega}$ に対して, $k \in \omega$ と次の (1)–(3) を満たす X の開集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$ が存在するときをいう:

(1) $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.

(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は pairwise disjoint である.
(3) 任意の $i \in \{0, \dots, k\}$ に対して $\operatorname{mesh} \mathcal{U}_i \leq \varepsilon_i$ である.

Dranishnikov [4] は, 性質 C の粗幾何学的類似概念として漸近的性質 C を定義した.

定義 1.4 ([4])**.** 距離空間 X が**漸近的性質 C** (**asymptotic property C**) をもつとは, 任意の正の数の列 $\{R_i\}_{i\in\omega}$ に対して, $k \in \omega$ と次の (1)–(3) を満たす X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ と $S > 0$ が存在するときをいう:
(1) $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R_i-disjoint である.
(3) $\operatorname{mesh} \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i \leq S$ である.

漸近次元が有限な距離空間は, 漸近的性質 C を満たす.

2 超限漸近次元

Radul [13] は, Borst [1], [2] による被覆次元の超限的拡張に基づいて超限漸近次元を定義し, 漸近次元を順序数へ拡張した. 以下, $\mathbb{N}$ は正の整数全体のなす集合を表す. L を集合とし, L の空でない有限部分集合全体のなす集合を $\operatorname{Fin} L$ で表す.

定義 2.1 ([1])**.** $M \subset \operatorname{Fin} L$ と $a \in L$ に対し,

$$M^a = \{\tau \in \operatorname{Fin} L : \tau \cup \{a\} \in M \text{ and } a \notin \tau\}$$

とおく.

例 2.2. $M = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1,3,4\}\} \subset \operatorname{Fin} \mathbb{N}$ に対し, $M^1 = \{\{2\},\{3,4\}\}$, $M^2 = \{\{1\},\{4\}\}$, $M^3 = \{\{1,4\}\}$, $M^4 = \{\{2\},\{1,3\}\}$, $(M^1)^1 = \varnothing$, $(M^1)^2 = \varnothing$, $(M^1)^3 = \{\{4\}\}$, $(M^1)^4 = \{\{3\}\}$ である.

定義 2.3 ([1])**.** $M \subset \operatorname{Fin} L$ に対し, 順序数 $\operatorname{Ord} M$ を帰納的に次で定める:

- $M = \varnothing$ のとき, $\operatorname{Ord} M = 0$ と定める;
- 任意の $a \in L$ に対して $\operatorname{Ord} M^a < \alpha$ のとき, $\operatorname{Ord} M \leq \alpha$ と定める;
- $\operatorname{Ord} M \leq \alpha$ かつ $\operatorname{Ord} M \not< \alpha$ のとき, $\operatorname{Ord} M = \alpha$ と定める.

ある順序数 α について $\operatorname{Ord} M \leq \alpha$ であるとき $\operatorname{Ord} M < \infty$ と表し, $\operatorname{Ord} M$ が存在するという. $\operatorname{Ord} M$ が存在しないとき $\operatorname{Ord} M = \infty$ と表す.

事実 2.4 ([1, Lemma 2.1.4])**.** $M \subset \operatorname{Fin} L$ とし, $n \in \omega$ とする．このとき, $\operatorname{Ord} M \leq n$ であるための必要十分条件は, 任意の $\sigma \in M$ が $|\sigma| \leq n$ を満たすことである．

例 2.5. $M = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1,3,4\}\} \subset \operatorname{Fin} \mathbb{N}$ に対し, $\operatorname{Ord} M = 3$ である．

事実 2.6 ([1, Lemma 2.1.3])**.** $M \subset \operatorname{Fin} L$ が条件 "$\sigma \subset \tau \in M \Rightarrow \sigma \in M$" を満たすとする．このとき, $\operatorname{Ord} M = \infty$ であるための必要十分条件は, ある $\{\tau_i : i \in \omega\} \subset M$ が存在して, 任意の $i \in \omega$ に対して $\tau_i \subsetneq \tau_{i+1}$ を満たすことである．

例 2.7. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma_n = \{1,2,\ldots,n\}$ とすると, $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{Fin} \mathbb{N}$ かつ $\operatorname{Ord}\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$ である．

例 2.8. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma_n = \{2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n-2, 2^n-1\}$ ($\sigma_1 = \{1\}$, $\sigma_2 = \{2,3\}$, $\sigma_3 = \{4,5,6,7\}$, $\ldots$) とすると, $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{Fin} \mathbb{N}$ かつ $\operatorname{Ord}\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} = \omega$ である．より一般に, $M \subset \operatorname{Fin} L$ が pairwise disjoint であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|\sigma_n| \geq n$ を満たす $\sigma_n \in M$ が存在すれば, $\operatorname{Ord} M = \omega$ である．

Borst [1] は, $\operatorname{Ord} M$ を用いて弱い無限次元空間 (weakly infinite dimensional spaces) を分類する被覆次元の超限的な拡張を定義した．さらに Borst [2] は, Haver の性質 C を分類する被覆次元の超限的拡張 $\dim_C$ を定義した．

定義 2.9 ([2])**.** コンパクト距離空間 X に対して

$$M_K(X) = \{\sigma \in \operatorname{Fin}\mathbb{N} : \bigcup_{i\in\sigma}\mathcal{U}_i \text{ が } X \text{ を被覆し, かつ任意の } i \in \sigma \text{ に対し } \operatorname{mesh}\mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i} \\ \text{を満たすような } X \text{ の pairwise disjoint な開集合族 } \mathcal{U}_i \ (i \in \sigma) \\ \text{は存在}\underset{\sim\sim\sim}{\text{しない}}\}$$

とおき, $\dim_C X = \operatorname{Ord} M_K(X)$ と定める．

注意 2.10. コンパクト距離空間 X の被覆次元 $\dim X$ が有限のとき, $\dim_C X = \dim X$ である．実際, $n \in \omega$ とし, $\dim_C X \leq n$ とする．定理 1.2 を用いて $\dim X \leq n$ を示すため, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\frac{1}{i_0} \leq \varepsilon$ を満たす $i_0 \in \mathbb{N}$ をとり, $\sigma = \{i_0, i_0+1, \ldots, i_0+n\}$ とおく．このとき $|\sigma| = n+1 > n$ かつ $\operatorname{Ord} M_K(X) = \dim_C X \leq n$ と事実 2.4 より $\sigma \in \operatorname{Fin}\mathbb{N} \setminus M_K(X)$ である．従って ($M_K(X)$ の定め方から) $\bigcup_{i\in\sigma}\mathcal{U}_i$ が X を被覆し, かつ任意の $i \in \sigma$ に対し $\operatorname{mesh}\mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i}$ を満たすような X の pairwise disjoint な開集合族 $\mathcal{U}_i$ ($i \in \sigma$) が存在する．このとき各 $i \in \sigma$ に対して $\operatorname{mesh}\mathcal{U}_i \leq \frac{1}{i} \leq \varepsilon$ ゆえ, 定理 1.2 より $\dim X \leq n$ を得る．

逆に $\dim X \le n$ とし, $|\sigma| \ge n+1$ を満たす $\sigma \in \mathrm{Fin}\,\mathbb{N}$ を任意にとる. 定理 1.2 より, $\bigcup_{i\in\sigma}\mathcal{U}_i$ が X を被覆し, かつ任意の $i \in \sigma$ に対し $\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}_i \le \frac{1}{\max\sigma}$ を満たすような X の pairwise disjoint な開集合族 $\mathcal{U}_i$ $(i \in \sigma)$ が存在する. このとき ($M_K(X)$ の定め方から) $\sigma \notin M_K(X)$ である. 従って任意の $\sigma \in M_K(X)$ に対して $|\sigma| \le n$ が成り立つ. ゆえに事実 2.4 より $\dim_C X = \mathrm{Ord}\, M_K(X) \le n$ である.

$\dim_C$ は, 次の意味で性質 C をもつコンパクト距離空間を分類する.

定理 2.11 ([2, Theorem 4.8])**.** コンパクト距離空間 X が性質 C をもつための必要十分条件は, $\dim_C X < \infty$ を満たすことである.

事実 2.12 ([12, Corollary])**.** 任意の可算順序数 α と Smirnov の空間 S_α (cf. [6, Example 7.1.33]) について, $\dim_C S_\alpha = \alpha$ が成り立つ.

Radul [13] は $\dim_C$ の粗幾何学的類似概念として超限漸近次元 trasdim を定義した. 距離空間 X の部分集合族 $\mathcal{V}$ に対して $\mathrm{mesh}\,\mathcal{V}$ が有限であるとき, $\mathcal{V}$ は**一様有界** (**uniformly bounded**) であるという.

定義 2.13 ([13])**.** 距離空間 X に対して

$$A(X) = \{\sigma \in \mathrm{Fin}\,\mathbb{N} : \bigcup_{i\in\sigma}\mathcal{U}_i \text{ が } X \text{ を被覆し, かつ任意の } i \in \sigma \text{ に対し } \mathcal{U}_i \text{ が } i\text{-disjoint} \\ \text{であるような } X \text{ の一様有界な部分集合族 } \mathcal{U}_i\,(i \in \sigma) \text{ は存在しない}\}$$

とおき, $\mathrm{trasdim}\, X = \mathrm{Ord}\, A(X)$ と定める.

注意 2.14. 距離空間 X の漸近次元 $\mathrm{asdim}\, X$ が有限のとき, $\mathrm{trasdim}\, X = \mathrm{asdim}\, X$ である. (注意 2.10 と同様に示せる.)

次の定理から, trasdim は漸近的性質 C をもつ距離空間を分類することが分かる.

定理 2.15 ([13, Proposition 1 and Theorem 4])**.** 距離空間 X に対し, 次は同値である.

(a) X は漸近的性質 C をもつ.
(b) $\mathrm{trasdim}\, X < \infty$ である.
(c) $\mathrm{trasdim}\, X$ は可算順序数と等しい.

また, 次が知られている.

定理 2.16 ([13, Theorem 3])**.** $\mathrm{trasdim}\, L_\infty = \infty$ を満たす距離空間 L_∞ が存在する.

定理 2.17 ([14, p.93])**.** 整数群 $\mathbb{Z}$ の可算無限直和 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ に対して, $\operatorname{trasdim}\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}=\omega$ である.

定理 2.18 ([15, Theorem 3.1])**.** 整数群 $\mathbb{Z}$ の輪積 (wreath product) $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ に対して, $\operatorname{trasdim}\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}\leq\omega+1$ である.

定理 2.19 ([16, Theorem 3.3])**.** 任意の可算順序数 α に対して, $\operatorname{trasdim}X_\alpha=\alpha$ を満たす距離空間 X_α が存在する.

3 APD プロファイルと漸近的性質 D

Davila [3] は次を証明した.

定理 3.1 ([3, Theorem 3.4])**.** 各 $i\in\mathbb{N}$ に対して G_i が漸近次元有限な可算群ならば, その可算直和 $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}G_i$ は漸近的性質 C をもつ.

Dydak は論文 [5] において APD プロファイルと漸近的性質 D を導入し, 漸近次元が有限な可算群の可算直和について論じた. 距離空間 (X,d) と $U\subset X$, $R>0$ に対し,

$$B(U,R)=\{x\in X:\exists y\in U\,(d(x,y)\leq R)\}$$

とおく.

定義 3.2 ([5, Definitions 3.2 and 3.6])**.** X を距離空間とし, $R>0$ とする. X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が **scale-R-disjoint** であるとは, 任意の異なる 2 つの $U,U'\in\mathcal{U}$ に対して $B(U,R)\cap B(U',R)=\varnothing$ が成り立つときをいう. また, $n\in\omega$ と $A\subset X$ に対し, A の **scale-R-dimension が n 以下**であるとは, $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0,\ldots,\mathcal{U}_n$ が存在して, $\bigcup_{i=0}^n\mathcal{U}_i$ は A を被覆し, 各 $\mathcal{U}_i$ が scale-R-disjoint かつ一様有界であるときをいう.

注意 3.3. $n\in\omega$ に対し, 距離空間 X が $\operatorname{asdim}X\leq n$ を満たすことと, 任意の $R>0$ に対して X の scale-R-dimension が n 以下であることは同値である.

定義 3.4 ([5, Definitions 5.1, 5.6 and 5.13])**.** X を距離空間, $\alpha_0\in\mathbb{N}$ とし, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を単調非減少関数とする. このとき, 組 $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ が X の **APD プロファイル (APD profile)** であるとは, $r_0\leq r_1\leq\cdots\leq r_k$ を満たす任意の $(r_0,r_1,\ldots,r_k)\in[0,\infty)^{k+1}$ に対し, X の被覆 $\{X_i\}_{i=0}^k$ が存在して, X_0 の scale-r_0-dimension が α_0-1 以下であり, かつ各 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ に対して X_i の scale-r_i-

dimension が $\alpha_i(r_{i-1}) - 1$ 以下であるときをいう．特に $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数であるとき, 組 $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ を X の**整数 APD プロファイル** (**integral APD profile**) という．また, 距離空間 X が APD プロファイルをもつとき, X は**漸近的性質 D** (**asymptotic property D**) をもつという．

注意 3.5 ([5, Proposition 5.7])**.** 距離空間 X が APD プロファイルをもつことと整数 APD プロファイルをもつことは同値である．

注意 3.6. 距離空間 X に対し, $\operatorname{asdim} X \leq n$ であることと $n+1$ のみからなる組 $(n+1)$ が X の整数 APD プロファイルであることは同値である．

定理 3.7 ([5, Proposition 5.14])**.** 漸近的性質 D をもつ距離空間は, 漸近的性質 C をもつ．

定理 3.1 について Dydak [5] は次を証明した．

定理 3.8 (cf. [5, Theorem 6.3])**.** 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して G_i が漸近次元有限な可算群ならば, ある単調非減少な関数 $\alpha_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して, $(1, \alpha_1)$ は $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$ の整数 APD プロファイルである．従って $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$ は漸近的性質 D をもつ．

4　APD プロファイルと超限漸近次元

定理 3.7 に関して Dydak [5] は次の問題を提起した．

問題 4.1 ([5, Question 5.15])**.** 漸近的性質 C をもち漸近的性質 D をもたない距離空間は存在するか．

Orzechowski [11] は, APD プロファイルと超限漸近次元を関連付ける次の定理を証明し, 問題 4.1 を肯定的に解決した．

定理 4.2 ([11, Theorem 4.4])**.** X を距離空間とし, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \omega$ とする．このとき, ある単調非減少関数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して $(n+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ が X の整数 APD プロファイルならば, $\operatorname{trasdim} X \leq \omega \cdot m + n$ である．特に, X が漸近的性質 D をもつならば, $\operatorname{trasdim} X < \omega \cdot \omega$ である．

定理 2.19 より, $\operatorname{trasdim} X_{\omega\cdot\omega} = \omega \cdot \omega$ を満たす距離空間 $X_{\omega\cdot\omega}$ が存在する．このとき定理 2.15 より $X_{\omega\cdot\omega}$ は漸近的性質 C をもつが, 定理 4.2 より $X_{\omega\cdot\omega}$ は漸近的性質 D をもたない．

また, 定理 3.8 と 4.2 より次が成り立つ.

系 4.3. 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して G_i が漸近次元有限な可算群ならば, $\operatorname{trasdim} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} G_i \leq \omega$ である.

定理 4.2 に関して, Orzechowski [11] は次の問題を提起した.

問題 4.4 ([11, Question 4.6])**.** $\operatorname{trasdim} X < \omega \cdot \omega$ を満たし漸近的性質 D をもたない距離空間 X は存在するか.

この問題に対して次が成り立つ.

定理 4.5 ([17, Theorem 1.3])**.** X を距離空間とし, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \omega$ とする. このとき, $\operatorname{trasdim} X \leq \omega \cdot m + n$ ならば, ある単調非減少関数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して $(n+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ は X の整数 APD プロファイルである. 特に, $\operatorname{trasdim} X < \omega \cdot \omega$ ならば, X は漸近的性質 D をもつ.

定理 4.2 と 4.5 より次を得る.

系 4.6. X を距離空間とし, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \omega$ とする. このとき, ある単調非減少関数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して $(n+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ が X の整数 APD プロファイルであることと, $\operatorname{trasdim} X \leq \omega \cdot m + n$ であることは同値である. 特に, X が漸近的性質 D をもつための必要十分条件は $\operatorname{trasdim} X < \omega \cdot \omega$ を満たすことである.

参考文献

[1] P. Borst, *Classification of weakly infinite-dimensional spaces. I. A transfinite extension of the covering dimension*, Fund. Math. **130** (1988), no. 1, 1–25.

[2] P. Borst, *Some remarks concerning C-spaces*, Topology Appl. **154** (2007), no. 3, 665–674.

[3] T. Davila *On asymptotic property C*, arXiv:1611.05988v1 (2016).

[4] A. Dranishnikov, *Asymptotic Topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 1085–1129.

[5] J. Dydak, *Matrix algebra of sets and variants of decomposition complexity*, Rev. Mat. Complut. **33**, (2020), 373–388.

[6] R. Engelking, *Theory of dimensions, finite and infinite*, Sigma Series in Pure

Mathematics, 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[7] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[8] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), pp. 108–113, Lecture Notes in Math., Vol. 375, Springer, Berlin, 1974.

[9] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2012.

[10] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.

[11] K. Orzechowski, *APD profiles and transfinite asymptotic dimension*, Topology Appl. **283** (2020), Paper No. 107394, 6pp.

[12] T. Radul, *On universal spaces and absorbing sets related to a transfinite extension of covering dimension*, Topology Appl. **154** (2007), 1794–1798.

[13] T. Radul, *On transfinite extension of asymptotic dimension*, Topology Appl. **157** (2010), 2292–2296.

[14] Y. Wu and J. Zhu, *Classification of metric spaces with infinite asymptotic dimension*, Topology Appl. **238** (2018), 90–101.

[15] Y. Wu and J. Zhu, *Asymptotic property C of the wreath product* $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, arXiv:1607.07599v4 (2020).

[16] Y. Wu, J. Zhu and T. Radul, *On metric spaces with given transfinite asymptotic dimensions*, arXiv:2007.07416v2 (2020).

[17] T. Yamauchi, *Transfinite asymptotic dimension and APD profiles*, Topology Appl. **295** (2021), Paper No. 107675, 7pp.

[18] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.