無限積空間と Σ-積空間における 基数関数 extent の等式について

神奈川大学・工学部　平田　康史
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

早稲田大学・基幹理工学部　薄葉　季路
Toshimichi Usuba
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

神奈川大学，数学アートラボ　矢島　幸信
Yukinobu Yajima
Kanagawa University, Math Art Laboratory

1　はじめに

すべての位相空間は空でない正則 T_1-空間 (=T_3-空間) で，2 点以上をもつとする。また，ω は可算基数を表し，すべての基数は ω 以上とする。

基数関数 φ とは，任意の位相空間 X に対して，ある基数（濃度）$\varphi(X)$ が対応している関数である。例えば，$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ は X の base$\}$ は weight とよばれるよく知られた基数関数である。

ここでは次の基数関数を扱う。

定義 1.1. 位相空間 X に対して，基数関数

$$e(X) = \omega \cdot \sup\{|D| : D \text{ は } X \text{ における閉離散部分集合}\}$$

を X の **extent** という。ここで念のために，位相空間 X の部分集合 D が**閉離散**（**closed discrete**）であるとは，X の任意の点 $x \in X$ に対して，その近傍 U_x が存在して，D の点を高々1 点しか含まない（i.e., $|U_x \cap D| \leq 1$）ことである。

空間 X がリンデレーフまたは可算コンパクトならば，明らかに $e(X) = \omega$ となる。我々が積空間の基数関数 extent に着目したのは，次の問題に起因している。

問題 1 (Shelah, 1978). 2 つのリンデレーフ空間 X, Y で，$e(X \times Y) > 2^\omega$ となるものがあるか？

Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ はリンデレーフ空間であるが，$\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ は正規ではなく，$e(\mathbb{S}\times\mathbb{S}) = 2^\omega$ である ([6, Example 2.3.12] 参照)。この事実から問題 1 は提起されたものであり，

Shelah [24] が肯定的に無矛盾であることを証明して以来，いくつもの研究論文が発表されてきた。最近では，薄葉 [25] の論文などがある。問題 1 が肯定的であることが ZFC で証明できるかどうかについては，未だに解決されていない。

これによって次の問題が自然に提起される。

問題 2. 積空間 $X \times Y$ に対して，$e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ または $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ がどのような場合に成り立つか？

順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ が可算パラコンパクトであることと，その任意の閉長方形 $A' \times B'$ に対して，等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つことがほぼ同値であることが分かった ([11] 参照)。この結果は，問題 2 が研究対象として十分に考察の価値があることを暗示させた。

実際にその後の研究では，単調正規空間 X とほとんど離散な空間 Y の積空間 $X \times Y$ に対して，$e(X \times Y) \leqq e(X) \cdot (e(Y)^+)$ が示された（[10] 参照）。ごく最近では，そのような積空間 $X \times Y$ で，正規でありかつ不等式 $e(X \times Y) > \omega = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つようなものが存在するかどうかは，ZFC だけでは決定できないという意外な結果まで証明されている（本稿 [9] 参照）。

次に無限積空間上の基数関数については，一般的に次の問題が考えられる。

問題 3. どんな無限積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ およびどんな基数関数 φ に対して，等式

$$\varphi(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = |\Lambda| \cdot \sup\{\varphi(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \text{が成り立つか？}$$

問題 3 に関しては，色々な基数関数について，次のような結果が得られている。

命題 1.1 (Juhász [14, Chapter 5]). 任意の積空間 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して，もし $\varphi \in \{w, nw, \pi, \pi\chi, \chi\}$ ならば，$\varphi(X) = |\Lambda| \cdot \sup\{\varphi(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$.

そこで無限積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上の基数関数 extent に対して，次の問題 4 を考えていくことは極めて自然な発想である。

問題 4. どんな無限積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して，等式

$$e(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \text{が成り立つか？}$$

ここでもう一つ別の基数関数を思い出そう。

定義 1.2. 位相空間 X に対して，基数関数

$$t(X) = \omega \cdot \min\{\kappa : x \in \overline{A} \subset X \text{ ならば } \exists B \subset A \ (x \in \overline{B}, |B| \leq \kappa)\}$$

を X の **tightness** という。特に，空間 X が $t(X) = \omega$ となるとき，X は**可算タイト**であるという。

2 つ基数関数 extent と tightness の定義を比べると，前者は空間 X の全体的な性質であり，後者は空間 X の局所的な性質である。にもかかわらず，これらの基数関

数には奇妙な類似性を感じる。それだけでなく，$e(X\times Y)$ の不等式による評価にも登場してくる（本稿 [9] 参照）。そこで，tightness に関する問題 3 についての古い結果を思い出してみよう。

命題 1.2 (Malyhin [16, Remark 3]). 任意の積空間 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ に対して，

$$t(X)=|\Lambda|\cdot\sup\{t(\prod_{\lambda\in r}X_\lambda):r\subset\Lambda\ (|r|<\omega)\}.$$

この証明は極めて標準的であり，上記の論文中には証明さえ載っていない。

後に述べるように問題 3 における $\varphi(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)$ の評価として，ほとんど全ての場合に $|\Lambda|$ を排除することはできない。そこで，次の問題が考えられる。

問題 5. どんな無限積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ の稠密な部分空間 Y およびどんな基数関数 φ に対して，等式 $\varphi(Y)=\sup\{\varphi(X_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ が成り立つか？

無限積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ の稠密な部分空間 Y として最もよく知られているものは，Corson [4] によって導入された次の部分空間であろう。

定義 1.3. $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ を無限積空間とする。その任意の 1 点 $s=\langle s_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\in X$ をとる。ここで，X の部分空間

$$\Sigma=\{x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\in X:\{\lambda\in\Lambda:x_\lambda\neq s_\lambda\}\text{ は高々可算 }\}$$

を X の **Σ-積空間**という。その点 s は Σ の**基点**というが，通常は省略される。

先ずは，Kombarov による次の美しい定理を思い出そう。

定理 1.4 (Kombarov [15, Theorem 1]). 任意のパラコンパクト p-空間 $X_\lambda,\lambda\in\Lambda,$ による Σ-積空間を Σ とする。このとき，次は同値である。

(a) Σ は正規である。

(b) Σ は族正規である。

(c) Σ は可算タイトである。

(d) Σ の各ファクター X_λ は可算タイトである。

問題 5 を tightness について考えてみると，定理 1.4 の証明の中で，次のことを示している。

命題 1.3 (Kombarov [15, Remark 1]). 任意の p-空間 $X_\lambda,\lambda\in\Lambda,$ による Σ-積空間を Σ とする。このとき，

$$t(\Sigma)=\sup\{t(X_\lambda):\lambda\in\Lambda\}.$$

そこで，extent と tightness の類似性を勘案すると，次の問題が自然と提起される。

問題 6. 任意の p-空間（または完全 p-空間）$X_\lambda,\lambda\in\Lambda,$ による Σ-積空間を Σ とする。このとき，

$$e(\Sigma)=\sup\{e(X_\lambda):\lambda\in\Lambda\}\ \text{ が成り立つか？}$$

命題 1.3 および問題 6 における p-空間および完全 p-空間は，距離空間を一般化した概念であるが，詳しい定義は次のセクションで述べる。

本講究録では，基数関数 extent に関する問題 4 および問題 6 を議論していく。

2　一般距離空間とその被覆性

ここでは，一般距離空間とよばれる一連のクラスのうち，p-空間，完全 p-空間および Σ-空間，強 Σ-空間の定義を述べる。

定義 2.1. 完全正則空間 X が **p-空間 (p-space)** [1] であるとは，X の Čech-Stone コンパクト化 βX におけるある開集合の族による列 $\{\mathcal{U}_n\}$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して $x \in \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) \subset X$ となるとき。ここで，$\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_n : x \in U\}$. さらに，$\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) = \bigcap_{n\in\omega} \overline{\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n)}^{\beta X}$ を満たすとき，X を**完全 p-空間 (strict p-space)** [3] という。

定義 2.2. 空間 X が **Σ-空間 (Σ-space)** [19] であるとは，局所有限な X の閉被覆の列 $\{\mathcal{F}_n\}$ と可算コンパクト集合による X の閉被覆 $\mathcal{K}$ が存在して，任意の $K \in \mathcal{K}$ と任意の開集合 U で $K \subset U$ のとき，ある $F \in \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ により $K \subset F \subset U$ となること。さらに，$\mathcal{K}$ のメンバーをコンパクト集合に置き換えたとき，X を**強 Σ-空間 (strong Σ-space)** という。

上記の p-空間，完全 p-空間および強 Σ-空間のそれぞれのクラスは，可算積空間に関して閉じている（即ち，各 X_n が性質 $\mathcal{P}$ をもてば，$\prod_{n\in\omega} X_n$ も性質 $\mathcal{P}$ をもつ）から，これらの空間のクラスは比較的安定していると言える。

パラコンパクト空間のクラスの中では，次の関係が成り立っている：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\text{距離空間} & \leftrightarrow & \text{developable 空間} & \rightarrow & \text{完全 } p\text{-空間} & \leftrightarrow & p\text{-空間} & \leftrightarrow & M\text{-空間} & & \\
\downarrow & & & & & & & & \downarrow & & \\
\text{Lasněv 空間} & \rightarrow & M_1\text{-空間} & \rightarrow & M_3\text{-空間} & \rightarrow & \sigma\text{-空間} & \rightarrow & \text{強 }\Sigma\text{-空間} & \leftrightarrow & \Sigma\text{-空間}
\end{array}
$$

正則 T_1-空間のクラスの中では，次の関係が成り立つ：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\text{距離空間} & \rightarrow & \text{developable 空間} & \rightarrow & \text{完全 } p\text{-空間} & \rightarrow & p\text{-空間} & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\text{Lasněv 空間} & \rightarrow & M_1\text{-空間} & \rightarrow & M_3\text{-空間} & \rightarrow & \sigma\text{-空間} & \rightarrow & \text{強 }\Sigma\text{-空間}
\end{array}
$$

関連する被覆性の定義も述べる。

定義 2.3. 空間 X が**サブメタリンデレーフ (submetalindelöf)**（それぞれ，**サブメタコンパクト (submetacompact)**，**サブパラコンパクト (subparacompact)**）であるとは，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，その開細分による列 $\{\mathcal{V}_n\}$ が存在して，各点 $x \in X$ に対してある $n_x \in \omega$ で $|\{V \in \mathcal{V}_{n_x} : x \in V\}| \leqq \omega$（それぞれ，$|\{V \in \mathcal{V}_{n_x} : x \in V\}| < \omega$, $|\{V \in \mathcal{V}_{n_x} : x \in V\}| = 1$）となること。

定義 2.4. 空間 X が**アイソコンパクト (isocompact)** とは，X の任意の可算コンパクト閉集合がコンパクトとなること。

一般距離空間と被覆性の関係は，次の通りである。

パラコンパクト　強 Σ-空間　完全 p-空間

$\downarrow$　$\swarrow$　$\swarrow$ [13]　[26]

サブパラコンパクト $\to$ サブメタコンパクト $\to$ サブメタリンデレーフ $\to$ アイソコンパクト

3 無限積空間 $\mathbb{N}^\kappa$ 上の extent

よく知られているように, ZFC が無矛盾ならば, 弱到達不可能基数（＝正則極限基数) の存在は ZFC からは証明できないが, もし存在するならば, その最小のものを θ で表すこととする。尚, 弱到達不可能基数が存在しない場合には, 「$\kappa < \theta$」と書いたら, κ は任意の無限基数でよいものとする。

$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ は自然数全体を表し，空間としては可算離散であるとする。先ずは，次の結果を思い出そう。

補題 3.1 (Mycieski [18]). 任意の基数 $\kappa < \theta$ に対して，$e(\mathbb{N}^\kappa) = \kappa$ が成り立つ。

2 つの命題 P_1, P_2 に対して，P_1 が無矛盾であることと P_2 が無矛盾であることが必要十分であるとき，P_1 と P_2 は**無矛盾等価**であるという。

非可算基数 κ が**可測 (measurable)** とは，κ 上の κ-完備な非単項超フィルターが存在することである。

補題 3.1 に関連して，次の結果が考察の過程で得られたので記載しておきたい。

定理 3.2. 次は無矛盾等価である。

(a) 可測基数が存在する。

(b) ある基数 κ で，$e(\mathbb{N}^\kappa) < \kappa$ となるものが存在する。

(c) ある基数 κ で，任意の基数 λ に対して $e(\mathbb{N}^\lambda) < \kappa$ となるものが存在する。

この定理の主張が, 「無矛盾等価」であることに注意されたい。実際, (a)$\leftrightarrow$(c)$\to$(b) は ZFC で証明できる ([7, Theorem 12.2], [21, Corollary] 参照) が, 可測基数の存在が無矛盾ならば, ZFC の下で (b)$\to$(a) は証明できない。

4 完全 p-空間による無限積空間

コンパクト空間 K に対して，$e(X \times K) = e(X) \cdot e(K) = e(X)$ となるから，積空間の extent については非コンパクトなファクターだけが本質的である。また, 補題 3.1 から次が容易に分かる。

補題 4.1. コンパクトでない空間による無限積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$（ただし, $|\Lambda| < \theta$ とする) に対して，もし各 X_λ がアイソコンパクトならば,

$$e(X) \geqq |\Lambda| \cdot \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}.$$

従って，ここで扱う無限積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の各ファクター X_λ はコンパクトでない（アイソコンパクトだから，可算コンパクトでない）場合のみを考える。

まずは，問題 4 の一つの解として，次の定理を得た。

定理 4.2. コンパクトでない空間による無限積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$（ただし, $|\Lambda| < \theta$ とする) に対して，もし各 X_λ が完全 p-空間または強 Σ-空間ならば,

$$e(X) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}.$$

注意 1. 定理3.2 (c) からわかるように，補題 4.1 と定理 4.2（および下記の定理 5.1）において $|\Lambda| < \theta$ の仮定を排除できないことが知られている。

注意 2. 定理 4.2 における仮定「もし各 X_λ が完全 p-空間または強 Σ-空間ならば」は，ファクターによる族 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に完全 p-空間と強 Σ-空間が混在していても構わない。

5　半層型空間による無限積空間

空間 X に対して，$\tau(X)$ は X の開集合全体（即ち，X の topology）を表すとする。

定義 5.1. 空間 X が**半層型 (semi-stratifiable)** [5] であるとは，ある関数 $g : X\times\omega \to \tau(X)$ が存在して，次の条件を満たすこと；

(i) 各 $x \in X$ に対して，$x \in \bigcap_{n\in\omega} g(x, n)$,

(ii) もし $y \in \bigcap_{n\in\omega} g(x_n, n)$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は y に収束する。

半層型空間のクラスは，比較的安定しており，次の性質をもつ（[5] 参照)。

(1)　半層型空間のクラスは，可算積空間に関して閉じている。

(2)　半層型空間の部分空間は，半層型空間である。

(3)　半層型空間の任意の開集合は，F_σ-集合である。

(4)　半層型空間は，サブパラコンパクトである。

この半層型空間のクラスを用いて，問題 4 に対するもう一つの解を次のように得ることができる。

定理 5.1. コンパクトでない空間による無限積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$（ただし, $|\Lambda| < \theta$ とする）に対して，もし各 X_λ が半層型空間ならば,

$$e(X) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(\prod_{\lambda\in r} X_\lambda) : r \subset \Lambda\ (|r| < \omega)\}.$$

注意 3. 上記の等式 $e(X) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(\prod_{\lambda \in r} X_\lambda) : r \subset \Lambda\ (|r| < \omega)\}$ を定理 4.2 のように $e(X) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ に強めることはできない。実際，[2, Example 2.4] によって，ω_1-scalel の存在という公理のもとで，リンデレーフ（従って，可算 extent），第 1 可算，半層型空間 Z_1, Z_2 で，$e(Z_1 \times Z_2) > \omega$ となるものが存在する。

そこで，次の問題が自然に提起される。この問題は未解決である。

問題 7. 2 つの半層型空間 X, Y で，$e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ となるものの存在が ZFC で証明できるか？

6　強 β-空間による Σ-積空間

定義 6.1. 空間 X が**強 β-空間 (strong β-space)** [30] であるとは，ある関数 $g : X \times \omega \to \tau(X)$ が存在して，次の条件を満たすこと；

(i) 各 $x \in X$ に対して，$x \in \bigcap_{n \in \omega} g(x, n)$,

(ii) もし $\bigcap_{n \in \omega} g(x_n, n) \neq \emptyset$ ならば, $\bigcap_{k \in \omega} \overline{\{x_n : n \geqq k\}}$ は空でないコンパクト部分集合となる。

さらに，(ii) の代わりに

(ii') もし $\bigcap_{n \in \omega} g(x_n, n) \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ が集積点（cluster point）をもつ

で置き換えたとき，空間 X を **β-空間（β-space）**[12] という。

今まで定義した一般距離空間との関係は，以下のようになる（[30] 参照）。

$$
\begin{tikzcd}
\text{完全 } p\text{-空間} \arrow[r] \arrow[dr] & p\text{-空間} & \text{局所コンパクト} \arrow[l] \\
\text{半層型空間} \arrow[r] & \text{強 } \beta\text{-空間} \arrow[r] & \beta\text{-空間} \arrow[r] & P\text{-空間 (森田の意味 [17])} \\
\text{強 } \Sigma\text{-空間} \arrow[r] \arrow[ur] & \Sigma\text{-空間} \arrow[ur] & \text{可算コンパクト} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

上記の関係図から，強 β-空間のクラスが比較的安定した位置にあることがわかる。それは，強 β-空間による Σ-積空間の extent を考察することに繋がっていく。その結果，次の 2 つの結果を得ることができた。

定理 6.2. 完全 p-空間または強 Σ-空間 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$, による Σ-積空間を Σ とする。このとき，

$$e(\Sigma) = \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}.$$

定理 6.3. 強 β-空間 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda,$ による Σ-積空間を Σ とする。もし Λ の任意の有限部分集合 r に対して，$\prod_{\lambda\in r} X_\lambda$ がサブリンデレーフであり，その各開集合が F_σ-集合であるならば，

$$e(\Sigma) = \sup\{e(\prod_{\lambda\in r} X_\lambda) : r \subset \Lambda\ (|r| < \omega)\}.$$

定理 6.3 の条件を半層型空間による Σ-積空間は満たすから，その直接の結果として次を得る。

系 6.4. 半層型空間 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda,$ による Σ-積空間を Σ とする。このとき，

$$e(\Sigma) = \sup\{e(\prod_{\lambda\in r} X_\lambda) : r \subset \Lambda\ (|r| < \omega)\}.$$

注意 4. 定理 6.3 において「$\prod_{\lambda\in r} X_\lambda$ の各開集合が F_σ-集合である」という条件がないと，かなりスッキリした形の定理となる。しかし，残念なことに簡単な例から，この条件を外すことはできない。

7　局所コンパクト空間による積空間

まずは，定理 4.2 および定理 6.2 において「強 Σ-空間」を「Σ-空間」に拡張できるかという問題を考える。しかし，可算コンパクト空間は明らかに Σ-空間だから，これはともに不可能であることが，大田によって指摘された次の例からわかる。

例 7.1 (大田 [22]). 可算コンパクト Tychonoff 空間 X, Y で，$X \times Y$ が β-空間でなく，$e(X \times Y) > \omega$ となるものが存在する。

この例は，Novák の例 [20]（[6, Example 3.10.19] 参照）を修正したものであるが，提起された問題 [30, Question, p. 537] の否定的解決にもなっている。

さて，問題 6 は定理 6.2 により括弧内の完全 p-空間の場合には，肯定的に解決された。次に，もとの問題である p-空間の場合を考えてみよう。

念のために，空間 X が**局所コンパクト（locally compact）**であるとは，任意の点がコンパクトな閉近傍をもつことである。ここで，次の関係を注意しておきたい。

$$\text{局所コンパクト空間} \to \text{Čech-完備空間} \to p\text{-空間}$$

各順序数 $\alpha < \omega_1$ に対して, α の部分集合 d_α が存在して, ω_1 の任意の部分集合 X に対して，集合 $\{\alpha \in \omega_1 : d_\alpha = X \cap \alpha\}$ が ω_1 において定常集合 (stationary set) となる, という主張を $\diamondsuit$ で表す。よく知られているように, $\diamondsuit$ は ZFC と無矛盾である。

定理 7.2. $\diamondsuit$ が成り立つと仮定する。このとき, 局所コンパクト，第 1 可算，正規空間 X, Y で，$e(X) = e(Y) = \omega$ であるが，$e(X \times Y) = \omega_1$ となるものが存在する。

従って，この結果から p-空間に関して問題 6 を肯定的に解くことはできないことがわかる。しかし，いまだに次の問題は未解決のままである。

問題 8. 2つの局所コンパクト空間（またはp-空間）X, Y で，$e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y)$ となるものの存在を ZFC で証明できるか？

8　Σ-積空間の正規性に関する最後の問題

もともと Σ-積空間の概念は，その正規性を研究するために導入された。実際，Corson [4] は完備距離空間による Σ-積空間が正規であることを示した。その後，本質的な進展がなされたのはかなり経ってからで，Gul'ko [8] と Rudin [23] によって，距離空間による Σ-積空間が正規であることが証明された。その直後に Kombarov [15] が本稿に述べた定理 1.4 を証明するに至った。この定理の美しさ故に，Σ-積空間の正規性の研究は終わったかに思えた。

しかし，それは新たな展開の始まりに過ぎなかった。実際, 第 3 著者によって，次のことが証明されてきた。

(1)　Σ をパラコンパクト Σ-空間による Σ-積空間とする。
もし Σ が可算タイトならば，それは正規となる [27]。
もし Σ が正規ならば，それは族正規となる [28]。

(2)　Σ を半層型空間による Σ-積空間で，その各有限個ファクターの積がパラコンパクトとする。
もし Σ が可算タイトならば，それは正規となる [29]。
もし Σ が正規ならば，それは族正規となる [29]。

(3)　Σ を強 β-空間による Σ-積空間で，その各有限個ファクターの積がパラコンパクトとする。
もし Σ が可算タイトならば，それは族正規となる [31]。

強 Σ-空間と半層型空間は強 β-空間だから，(1) と (2) の前半の結果は (3) によって統一された。それを踏まえて，(1) と (2) の後半の結果も統一できないかと考えるのは自然であり，次の問題が提起される。

問題 9. Σ を強 β-空間による Σ-積空間で，その各有限個ファクターの積がパラコンパクトとする。もし Σ が正規ならば，それは族正規となるか？

注意 5. 問題 9 において「その各有限個ファクターの積において，任意の開集合が F_σ-集合である」という条件を加えれば，(2) の後半の証明と類似の方法によって証明できる。

問題 9 が肯定的にしろ否定的にしろ解決すれば，1959 年以来の Σ-積空間の正規性の研究は完全に終わったと言えるであろう。

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, *On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces*, Soviet Math. Dokl. **4** (1963), 1051–1055.

[2] D. K. Burke and S. W. Davis, *Subset of ω^{ω} and generalized metric spaces*, Pacific J. Math. **110** (1984), 273–281.

[3] D. K. Burke and R. A. Stoltenberg, *A note on p-spaces and Moore spaces*, Pacific J. Math. **30** (1969), 601–608.

[4] H. H. Corson, *Normailty in subsets of product spaces*, Amer. J. Math. **81** (1959), 785–796.

[5] G. D. Creed, *Concerning semi-stratifiable spaces*, Pacific J. Math. **32** (1970), 47–54.

[6] R. Engelking, *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[7] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton, NJ. (1960).

[8] S. P. Gul'ko, *On the properties of subsets of Σ-products*, Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 1438–1442.

[9] Y. Hirata and Y. Yajima, 単調正規空間と特殊な空間の積の *extent* について, 本講究録.

[10] Y. Hirata and Y. Yajima, *Inequality and equality for the extent of products with a special factor*, Topology Proc. **59** (2022), 223–241.

[11] Y. Hirata and Y. Yajima, *A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals*, Topology Appl. **282** (2020), 107325 (10 pages).

[12] R. E. Hodel, *Moore spaces and wΔ-spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 641–652.

[13] S. Jiang, *Every strict p-space is θ-refinable*, Topology Proc. **11** (1986), 309–316.

[14] I. Juhász, *Cardinal functions in topology – ten years later*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1983).

[15] A. P. Kombarov, *On tightness and normality of Σ-products*, Soviet Math. Dokl. **19** (1978), 403–407.

[16] V. I. Malyhin, *On the tightness and the Souslin number of* $\exp X$ *and in a product of spaces*, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 496–499.

[17] K. Morita, *Products of normal spaces with metric spaces*, Math. Ann. **154** (1964), 365–382.

[18] J. Mycielski, *α-incompactness of N^{α}*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. **12** (1964), 437–438.

[19] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math. **65** (1969), 169–192.

[20] J. Novák, *On the Cartesian product of two compact spaces*, Fund. Math. **40** (1953), 106–112.

[21] P. Nyikos, *Not every 0-dimensional realcompact space is N-compact*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 392–396.

[22] H. Ohta, Private communications.

[23] M. E. Rudin, *Σ-products of metric spaces are normal*, preprint.

[24] S. Shelah, On some problems in general topology, Contempt. Math. **192**, (1996), 91–101.

[25] T. Usuba, *G_{δ}-topology and compact cardinals*, Fund. Math. **246** (2019), 71–87.

[26] H. H. Wicke and J. M. Worrell, Jr. *Point-countability and compactness*, Proc. Amer. Math. **55** (1976), 427–431.

[27] Y. Yajima, *On Σ-products of Σ-spaces*, Fund. Math. **123** (1984), 29–37.

[28] Y. Yajima, *The normality of Σ-products and the perfect κ-normality of Cartesian products*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 689–699.

[29] Y. Yajima, *On Σ-products of semi-stratifiable spaces* , Topology Appl. **25** (1987), 1–11.

[30] Y. Yajima, *Strong β-spaces and their countable products*, Houston J. Math. **33** (2007), 531–540.

[31] Y. Yajima, *Normal covers of infinite products and normality of* Σ*-products*, Topology Appl. **154** (2007), 103–114.

Faculty of Engineering, Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: hirata-y@kanagawa-u.ac.jp

Faculty of Science and Engineering, Waseda University
Tokyo 169-8555, JAPAN
E-mail address: usuba@waseda.jp

Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: yajimy01@kanagawa-u.ac.jp, mathartlab@gmail.com