一般化された直交対称性による Lagrange 平均曲率流の構成

東京都立大学・数理科学科　落合 亮文
Akifumi Ochiai
Department of Mathematical Sciences, Tokyo Metropolitan University

1　導入

Calabi-Yau 多様体は，物理学における弦理論のモデルとして大きな注目を集めてきた．ミラー対称性は，Calabi-Yau 多様体の持つ顕著な性質のひとつであり，Calabi-Yau 多様体自身を理解するために有用である．Storminger-Yau-Zaslow 予想 [17] は，Calabi-Yau 多様体とそのミラーが，同一の底空間を持つ，特異点付き特殊 Lagrange トーラス・ファイブレーションとして解釈できると説明する．このことは，我々が，Calabi-Yau 多様体を，特殊 Lagrange 部分多様体という切り口から視ることの重要性を示唆している．

特殊 Lagrange 部分多様体のもうひとつの重要性は，キャリブレート幾何の文脈にある．キャリブレーテッド部分多様体は，Harvey-Lawson[4] によって導入された，Riemann 多様体における部分多様体のあるクラスである．Calabi-Yau 構造と呼ばれる，Calabi-Yau 多様体上のある正則体積形式 Ω に対し，$e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の実部によってキャリブレートされる部分多様体を，フェイズ θ の特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ．一般にキャリブレーテッド部分多様体は，ホモロジー類内で体積最小であることが知られており，ゆえに特殊 Lagrange 部分多様体もそうである．

特殊 Lagrange 部分多様体の典型的な構成法として，Joyce[10] によって導入され “モーメント・マップ・テクニック”，および Harvey と Lawson[4] によって導入された “バンドル・テクニック” が知られている．これら二つの手法とは別に，Joyce[10] は $\mathbb{C}^n$ において，ある与えられた特殊 Lagrange 部分多様体に対し直交方向に作用するような，$SU(n)$ の可換部分群を用いて，特殊 Lagrange 部分多様体を構成する手法を示した．本講究録で紹介する，Lagrange 平均曲率流を構成する我々の手法は，この方法の拡張と解釈することができる．

Lagrange 平均曲率流は，特殊 Lagrange 部分多様体を構成する方法を，変形という別の観点から，我々に提供してくれる．平均曲率流は，Riemann 多様体へのはめ込みの標準的な変形を生起する．平均曲率流は，はめ込みの体積をもっとも効率的に減じるように変形することが知られているため，極小部分多様体を構成するための基本的手段とみなされる．特に，アンビエント空間が Kähler-Einstein 多様体である場合には，Lagrange はめ込みを，その Lagrange 条件を保ったまま変形させることが知られている．そのため，Lagrange 平均曲率流は，極小 Lagrange 部分多様体，とりわけアンビエント空間が Calabi-Yau 多様体のときには特殊 Lagrange 部分多様体を構成するための手段を我々に提供してくれる．

平均曲率流が，どのようなはめ込みから出発したとき，極小部分多様体に収束するのか，とりわけ Calabi-Yau 多様体において，どのような条件下で特殊 Lagrange 部分多様体に収束するのか，というのは難しい問題である．Thomas-Yau[18] は，Calabi-Yau 多様体内の次数付き Lagrange 部分多様体に対し，安定性の概念を定義し，それが安定であるとき，特

殊 Lagrange 部分多様体に収束する永久解を持つと予想した．近年，この予想は Joyce[9] によって定式化し直された．

平均曲率流の特異点もまた，大きな問題である．Huisken[6] は，平均曲率流が I 型の特異点を持つとき，リスケールされたフローの極限において，自己相似解が得られることを示した．そうでない場合（II 型の場合）には，ある極限にトランスレーティング・ソリトンが現れることが知られている．これらの事実は，自己相似解やトランスレーティング・ソリトンが，平均曲率流の特異点の局所モデルとなっていることを示唆している．

平均曲率流は偏微分方程式で記述されるため，一般に具体例を構成することは困難である．$\mathbb{C}^n$ における Lagrange 平均曲率流の自己相似解およびトランスレーティング・ソリトンの例が，いくつか知られている．Anciaux[1] および Lee-Wang[12, 13] は自己相似解を，Joyce-Lee-Tsui[8] は自己相似解とトランスレーティング・ソリトンを，Castro-Lerma[3] は $\mathbb{C}^2$ においてトランスレーティング・ソリトンを構成した．Yamamoto[19] は，これらの具体例のいくつかが，モーメント写像とトーラス対称性による構成法として解釈できることを指摘し，トーリック概 Calabi-Yau 多様体において，Behrndt[2] の意味での変形 Lagrange 平均曲率流を構成する方法を示した．この手法は，Konno[11] によって，モーメント写像と，可換 Lie 群の直交作用を用いる方法へと，さらに一般化された．Konno はこの手法によって，$\mathbb{C}^n$ においていくつかの Lagrange 平均曲率流の自己相似解およびトランスレーティング・ソリトンを構成し，さらに超 Kähler 多様体である ALE 空間において，Lagrange 平均曲率流の具体例を構成した．後者は，非平坦な Calabi-Yau 多様体における Lagrange 平均曲率流の最初の構成例であるとみなされる．この ALE 空間における例では I 型の特異点が形成され，そのリスケールされたフローの極限として，$\mathbb{C}^n$ で Konno が構成した自己相似解が現れることが観察されている．

Konno の手法の概要は次の通りである．M を Calabi-Yau 多様体，L をその特殊 Lagrange 部分多様体，H をモーメント写像を持ち，かつ L に直交方向に作用する可換 Lie 群であるとする．そのとき，H 作用によって，L に直交するような別の不変特殊 Lagrange 部分多様体 L' が構成でき，いくつかの条件下で，それを明示的に記述することができる．特殊 Lagrange 部分多様体を，Lagrange 平均曲率流の安定解と考えることにより，この手法は，上に述べた Joyce[10] の方法の拡張であると解釈できる．

著者は，Joyce と Konno の手法を拡張することにより，Calabi-Yau 多様体において特殊 Lagrange 部分多様体を構成するためのより一般化された方法を [14] で示し，Stenzel[16] による非平坦 Calabi-Yau 計量を備えた球面の余接束において，いくつかの非自明な具体例を構成した．そこでは，Lie 群の可換性の仮定がはずされ，Lie 群作用の直交性の条件もいくらか緩められている．

本講究録では，この手法をさらに拡張し，一般の Calabi-Yau 多様体において Lagrange 平均曲率流を構成する方法を紹介する．この手法では，上と同様に，第一に Lie 群の可換性の仮定が外され，第二に Lie 群作用の直交条件もより一般のものが仮定される．この定理の概要は次の通りである．詳細は定理 5.4 を参照されたい．

定理 1.1 *M を $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体，H を M に等長に作用する Lie 群でモーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群，H_p を点 $p \in M$ における H の固定部分群，N^K を M の任意の部分多様体 N に対し $N^K = \{p \in N \mid H_p = K\}$ で定まる集合，$m := \dim(H/K)$，a_H および χ をそれぞれ M と H 作用に依存して定まる，H の双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ の要素および M^K 上のベクトル場，L を M の Lagrange 部分多様体，c_0 を $\mathfrak{h}^*$ の中心の要素，V_{c_0} を $V_{c_0} \subset \mu^{-1}(c_0) \cap L^K$ を満たす M の $(n-m)$ 次元部分多様体とする．次を仮定する．*

(i) Lie 群 H は L に広義の意味で直交するように M に作用する，

(ii) ある区間 $I \ni 0$ が存在し，ベクトル場 χ は V_{c_0} の変形 $(V_{c_t})_{t\in I}$ を生成する．

このとき $F_t(hK,p) = h\gamma_p(t)$ で定められる写像族 $\{F_t : (H/K)\times V_{c_0} \to M\}_{t\in I}$ は写像 $F_0 : (H/K)\times V_{c_0} \to M$ の Lagrange 平均曲率流を与える．ここに $\gamma_p : I \to M$ は各点 $p \in V_{c_0}$ に対し $\gamma_p(0) = p$ を初期条件とするベクトル場 χ の積分曲線である．

この方法によって，$\mathbb{C}^n$ において，自己相似解およびトランスレーティング・ソリトンを含む，いくつかの非自明な具体例が得られた．これらは，Lee-Wang[12]，Castro-Lerma[3]，および Konno[11] の具体例の拡張になっている．

また，著者はこの手法を，より一般に Riemann 多様体において，Lie 群の作用を利用し，平均曲率流の偏微分方程式を常微分方程式に帰着させ，H 不変な平均曲率流を構成する方法として整理した．

本講究録の構成は以下の通りである．2 節では Clabi-Yau 多様体，Lie 群作用，モーメント写像の基礎事項を確認する．3 節では一般の Riemann 多様体において H 不変な平均曲率流を構成する方法を示す．4 節では Calabi-Yau 多様体への H 不変な Lagrange はめ込みを考え，その平均曲率ベクトル場がある条件下で Lie 群作用の言葉で記述されることを示す．5 節では広義の直交対称性を用いて Calabi-Yau 多様体内で H 不変 Lagrange 平均曲率流を構成する方法を示す．最後に 6 節では $\mathbb{C}^n$ において自己相似解およびトランスレーティング・ソリトンを含む Lagrange 平均曲率流の具体例を紹介する．

2 準備

2.1 Calabi-Yau 多様体における Lagrange 部分多様体

(M,ω) を ω を Kähler 形式とする $2n$ 次元のシンプレクティック多様体，L を多様体とする．はめ込み $\phi : L \to M$ は，$\phi^*\omega \equiv 0$ なるとき，**アイソトロピック**であると呼ばれる．アイソトロピックなはめ込み $\phi : L \to M$ は，L の次元が M の次元のちょうど半分であるとき，**Lagrange はめ込み**であると呼ばれる．

定義 2.1 ***Calabi-Yau* 多様体**とは，四組 $(M^{2n}, J, \omega, \Omega)$ であって，次の条件を満たすものをいう*:*

(i) 三組 (M, J, ω) は J を複素構造，ω を Kähler 形式とする Kähler 多様体である，

(ii) Ω は J に関する正則体積形式であり，次の関係を満たす．

$$\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega\wedge\overline{\Omega}.$$

定義 2.2 L を向き付けられた多様体，$\phi : L \to M$ を *Calabi-Yau* 多様体 (M, J, ω, Ω) への *Lagrange* はめ込みとする．次で定められる関数 $\theta : L \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は ϕ の ***Lagrange* 角度**と呼ばれる．

$$\phi^*\Omega = e^{\sqrt{-1}\theta}\mathrm{vol}_{\phi^*g}.$$

ここに g は *Kähler* 計量，vol_{ϕ^*g} は誘導計量 ϕ^*g に関する体積形式である．

L が向き付け可能でない場合にも，上式で局所的に Lagrange 角度を定めることができる．Lagrange 角度 θ を用いて Lagrange はめ込み ϕ の平均曲率ベクトル場を以下のように表すことができる．

命題 2.3
$$\mathcal{H}_p = J_{\phi(p)}(\phi_{*p}(\mathrm{grad}_{\phi^* g}\theta)_p) \in \mathrm{T}^{\perp}_{\phi(p)}\phi(L) \quad (p \in L).$$
ここに $\mathrm{grad}_{\phi^* g}\theta$ は誘導計量 $\phi^* g$ に関する関数 θ の勾配である．

定義 2.4 (M, J, ω, Ω) を *Calabi-Yau* 多様体，L を多様体とする．写像 $\phi : L \to M$ は，*Lagrange* はめ込みであり，かつ *Lagrange* 角度が定数 θ_0 であるとき，**フェイズ** θ_0 **の特殊** ***Lagrange*** **はめ込み**と呼ばれる．特殊 *Lagrange* はめ込み $\phi : L \to M$ に対し，L を（はめ込まれた）**特殊** ***Lagrange*** **部分多様体**と呼ぶ．

命題 2.3 より，特殊 Lagrange 部分多様体は極小部分多様体である．実際にはより強くホモロジー類内で体積最小である．

2.2 Lie 群作用とモーメント写像

この項では Lie 群作用とモーメント写像の基礎事項に触れる．
H を M に作用する Lie 群とする．$h \in H$ による移動を $L_h : M \to M; p \mapsto L_h(p) = hp$ で表す．各 $p \in M$ に対し，p を通る軌道を $H \cdot p$ で，p における固定部分群を H_p でそれぞれ表す．

$\mathfrak{h}$ を H の Lie 環とする．各 $\xi \in \mathfrak{h}$ は，次で定められる M 上の基本ベクトル場 $\xi^{\#}$ を生成する．
$$\xi^{\#}_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi)p \quad (p \in M).$$
ここに $\exp(t\xi)$ は ξ に付随する H の 1 パラメータ部分群を表す．H は次で定められる**余随伴作用** $\mathrm{Ad}^*_h : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ によって双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ に作用する．
$$\langle \mathrm{Ad}^*_h c, \xi \rangle = \langle c, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}\xi \rangle \quad (h \in H,\ c \in \mathfrak{h}^*,\ \xi \in \mathfrak{h}).$$
ここに，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathfrak{h}$ のペアリングである．$\mathfrak{h}^*$ の部分集合
$$Z(\mathfrak{h}^*) = \{c \in \mathfrak{h}^* \mid \mathrm{Ad}^*_h c = c,\ \forall h \in H\}$$
を H の**中心**と呼ぶ．H が可換ならば，$Z(\mathfrak{h}^*) = \mathfrak{h}^*$ である．

定義 2.5 H をシンプレクティック多様体 (M, ω) に作用する *Lie* 群とする．**モーメント写像** $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ とは，次を満たす H 同変な写像のことをいう．
$$-\mathfrak{i}(\xi^{\#})\omega = d\langle \mu(\cdot), \xi \rangle \quad (\xi \in \mathfrak{h}),$$
ここに $\mathfrak{i}$ は内部積を表す．

三組 (M, ω, H) がモーメント写像を持てば，H 作用は **Hamilton 作用**と呼ばれる．Hamilton 作用は Kähler 形式 ω を保つ．各 $c \in \mathfrak{h}^*$，各 $p \in \mu^{-1}(c)$ に対し，軌道 $H \cdot p$ は $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$ のとき，そのときに限りアイソトロピックである．

3　群作用を用いた平均曲率流の構成

本節では，まず Lie 群作用に関連するはめ込みの基本事項を確認する．次に，本講究録で，性質 $(*)$ と呼ぶ概念を定義する．性質 $(*)$ は，不変なはめ込みの平均曲率ベクトル場が有しうる対称性を表す．次に Lie 群作用を用いた平均曲率流の構成法について述べる．最後に，我々の手法が必要とする，常微分方程式に関するいくつかの事実に触れる．

これらの前に，以下を通じて用いられる記法を定める．M を多様体，H を M に作用する Lie 群，K を H の閉部分群とする．M の任意の部分多様体 N に対し，M の部分集合 N^K を $N^K := \{p \in N \mid H_p = K\}$ で定める．任意の M の部分多様体 $V \subset M^K$ に対し，写像 ϕ_V を $\phi_V : (H/K) \times V \to M;\ (hK, p) \mapsto hp$ で定める．条件 $V \subset M^K$ により，この定義は無矛盾である．微分写像 $(\phi_V)_*$ は各 $(hK, p) \in (H/K) \times V$ において線形写像 $(\phi_V)_{*(hK,p)} : \mathrm{T}_{hK}(H/K) \times \mathrm{T}_pV \to \mathrm{T}_{hp}M$ を定める．次が成立する．

$$\mathrm{T}_{hK}(H/K) = \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\exp(t\xi)K \;\middle|\; \xi \in \mathfrak{h} \right\}. \tag{1}$$

命題 3.1 M を多様体，H を M に作用する *Lie* 群，K を H の閉部分群，V を $V \subset M^K$ を満たす M の部分多様体とする．各 $(hK, p) \in (H/K) \times V$, $\xi \in \mathfrak{h}$, $v \in \mathrm{T}_pV$ に対し，次が成り立つ．

$$(\phi_V)_{*(hK,p)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h\exp(t\xi)K, v \right) = (L_h)_{*p}(\xi_p^\# + v).$$

写像 ϕ_V がはめ込みになるための条件は次で与えられる．

命題 3.2 M, H, K, ϕ_V を命題 *3.1* の通りとする．写像 ϕ_V がはめ込みになるためには，次が成立することが必要十分である．

$$\xi_p^\# \notin \mathrm{T}_pV \backslash \{0\} \quad (p \in V,\ \xi \in \mathfrak{h}).$$

次に平均曲率流を変形という観点から定義する．

定義 3.3 $\phi : \Sigma \to M$ を k 次元多様体 Σ から多様体 M へのはめ込み，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．$f_0 = \phi$ なる写像 $f : \Sigma \times I \to M;\ (p, t) \mapsto f_t(p)$ は，各時刻 $t \in I$ において $f_t(\cdot) : \Sigma \to M$ がはめ込みとなるとき，ϕ の**変形**であると呼ばれる．ϕ が包含写像 $\iota : \Sigma \to M$ のときは，f を Σ の変形とも呼ぶ．

定義 3.4 (M, g) を *Rimeann* 多様体，Σ を多様体，$\phi : \Sigma \to M$ をはめ込み，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．ϕ の**平均曲率流** $F = (F_t)_{t \in I}$ とは，ϕ の変形であって，次の偏微分方程式の滑らかな解のことを言う．

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = \mathcal{H}^t(p) \quad (p \in \Sigma,\ t \in I).$$

ここに $\mathcal{H}^t$ は各時刻 $t \in I$ におけるはめ込み $F_t : \Sigma \to M$ の平均曲率ベクトル場である．

アンビエント空間 M が Kähler-Einstein 多様体のとき，Lagrange はめ込みの平均曲率流は Lagrange 条件を保つことが知られている．すなわち Lagrange はめ込み $\phi : L \to M$ の平均曲率流 $(F_t)_{t \in I}$ が存在すれば各時刻 $t \in I$ において F_t は Lagrange はめ込みである．
M が Euclid 空間の場合，平均曲率流の解にいくつかの重要なクラスがある．

定義 3.5 $(\mathbb{R}^n, g)$ を標準的な *Riemann* 計量 g を備えた *Euclid* 空間, Σ を多様体, $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ をはめ込み, $\mathcal{H}$ を ϕ の平均曲率ベクトル場とする. 定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在し,

$$\mathcal{H}(p) = \lambda \phi^{\perp}(p) \quad (p \in \Sigma) \tag{2}$$

が成立するとき, ϕ の平均曲率流の解は**自己相似解**と呼ばれる. ここに $\phi^{\perp}(p)$ は点 $\phi(p)$ における位置ベクトル $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ の法成分を表す. 特に, $\lambda < 0$ のときは**自己縮小解**, $\lambda > 0$ のときは**自己拡大解**と呼ばれる.

定義 3.6 $(\mathbb{R}^n, g), \phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n, \mathcal{H}$ を定義 *3.5* と同様とする. 定ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ が存在し,

$$\mathcal{H}(p) = v^{\perp}(p) \tag{3}$$

が成り立つとき, ϕ の平均曲率流の解は**トランスレーティング・ソリトン**と呼ばれる. ここに, $v^{\perp}(p)$ は点 $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ におけるベクトル v の法成分を表す.

次に, 与えられた変形 f を, 群作用で拡大することを考える.

定義 3.7 M を多様体, H を M に作用する *Lie* 群, K を H の閉部分群, V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体, $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f : V_0 \times I \to M^K$ を V_0 の M^K 内での変形, V_t を各時刻 $t \in I$ に対し $V_t := f_t(V_0)$ で定められるはめ込まれた部分多様体とする. 各時刻 $t \in I$ に対し, 写像 $\phi_{V_t} : (H/K) \times V_t \to M$ がまたはめ込みになっていると仮定する. そのとき, ϕ_{V_0} の変形 F を次で定めることができる.

$$F : (H/K) \times V_0 \times I \to M; \quad (hK, p, t) \mapsto hf_t(p) =: F_t(hK, p).$$

F を変形 f の H 作用による**拡大**と呼ぶ.

本講究録で性質 $(*)$ と呼ばれる概念を定める.

定義 3.8 (M, g) を *Riemann* 多様体, H を M に作用する *Lie* 群, K を H の閉部分群, V を $V \subset M^K$ を満たす M の部分多様体とする. 写像 ϕ_V がはめ込みであり, かつ

$$\mathcal{H}(hK, p) = (L_h)_{*p} \mathcal{H}(K, p) \quad (h \in H,\ p \in V), \tag{$*$}$$

を満たすとき, V は H 作用に関し**性質 $(*)$** を持つと言う. ここに $\mathcal{H}$ は ϕ_V の平均曲率ベクトル場を表す.

定義 3.9 (M, g) を *Riemann* 多様体, H を M に作用する *Lie* 群, K を H の閉部分群, V_0 を $V_0 \subset M^K$ を満たす M の部分多様体で性質 $(*)$ を持つもの, $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f : V_0 \times I \to M^K$ を V_0 の M^K 内の変形とする. f が拡大 F を持ち, かつ各時刻 $t \in I$ に対し, はめ込まれた部分多様体 $V_t := f_t(V_0)$ もまた性質 $(*)$ を持つとき, 変形 f は H 作用に関し性質 $(*)$ を**保つ**と言う.

定理 3.10 $(M, g), H, K, V_0$ を定義 *3.9* の通りとする. ある区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, V_0 の変形 $f : V_0 \times I \to M^K$ で, その拡大 F を持つものが存在し, 次の条件を満たすとする.

(i) 各 $t \in I$, 各 $p \in V_0$ に対し次が成立.

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(K, p) = \mathcal{H}^t(K, p),$$

(ii)　変形 f は性質 $(*)$ を保つ．

ここに $\mathcal{H}^t$ は各時刻 $t \in I$ におけるはめ込み $F_t : (H/K) \times V_0 \to M$ の平均曲率ベクトル場を表す．このとき，写像族 $(F_t)_{t \in I}$ ははめ込み ϕ_{V_0} の平均曲率流を与える．

シリンダー $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ は，定理 3.10 の基本的な例を与える．より一般に，V を $\mathbb{R}^N$ の $(n-m)$ 次元部分多様体とする．Lie 群 $\mathbb{R}^m$ はアンビエント空間 $\mathbb{R}^{N+m}$ の中でシリンダー $V \times \mathbb{R}^m$ に対し，$\mathbb{R}^m \times (V \times \mathbb{R}^m) \ni (t, p, s) \mapsto (p, s+t) \in V \times \mathbb{R}^m$ で作用する．V の $\mathbb{R}^N$ 内での平均曲率流 f が得られたとき，$V \times \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{R}^{N+m}$ 内での平均曲率流は $\mathbb{R}^m$ 作用による f の拡大によって与えられる．
一般に定理 3.10 における条件 (i) はいまだ偏微分方程式のままである．そこで次に条件 (i) を常微分方程式に帰着させることを考える．

定義 3.11 M を多様体，A を M 上のベクトル場，V を M 内の部分多様体とする．V の変形 $f : V \times I \to M$ で，ある区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し次を満たすものが存在するとする．

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = A_{f(x,t)} \quad ((x, t) \in V \times I).$$

このとき，ベクトル場 A は V の変形 f を**生成する**と言う．

系 3.12 $(M, g), H, K, V_0$ を定義 *3.9* の通りとする．M^K に沿うベクトル場 A が存在し，次の条件を満たすとする．

(i.a)　ベクトル場 A はある区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し，M^K 内の V_0 の変形 $f : V_0 \times I \to M^K$ を生成し，f は拡大 F を持つ．すなわち，次が成立する．

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(K, p) = A_{f_t(p)} \quad (p \in V_0,\ t \in I),$$

(i.b)

$$\mathcal{H}^t(K, p) = A_{f_t(p)} \quad (p \in V_0,\ t \in I),$$

(ii)　変形 f は性質 $(*)$ を保つ．

ここに $\mathcal{H}^t$ は定理 *3.10* と同様である．このとき写像族 $(F_t)_{t \in I}$ ははめ込み ϕ_{V_0} の平均曲率流を与える．

注意 3.13 与えられた部分多様体 $V_0 \subset M^K$ に対し，もし条件 (i.b) を満たすベクトル場 A を見つけることができれば，条件 (i.a) は常微分方程式である．

自己相似解やトランスレーティング・ソリトンとなるための条件も，上と同様に群作用によって削減することができる．

命題 3.14 $(\mathbb{R}^n, g)$ を標準的な *Rimeann* 計量 g を備えた *Euclid* 空間，H を M に作用する *Lie* 群で，g を保つもの，K を H の閉部分群，V を $\mathbb{R}^n$ の部分多様体で $V \subset (\mathbb{R}^n)^K$ を満たし，かつ性質 $(*)$ を持つものとする．ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，次が成立すると仮定する．

$$\mathcal{H}(K, x) = \lambda \phi_V^{\perp}(K, x) \quad (x \in V).$$

ここに $\phi_V^{\perp}(hK, x)$ は位置ベクトル $\phi_V(hK, x) \in \mathbb{R}^n$ の法成分を表す．このときはめ込み ϕ_V は自己相似解の条件式 (2) を満たす．すなわち次が成立する．

$$\mathcal{H}(hK, x) = \lambda \phi_V^{\perp}(hK, x) \quad ((hK, x) \in (H/K) \times V).$$

命題 3.15 $(\mathbb{R}^N, g), H, K, V$ を命題 *3.14* の通りとする．ある定ベクトル $v \in \mathbb{R}$ が存在し，次が成立すると仮定する．

$$\mathcal{H}(K, x) = v^{\perp}(K, x) \quad (x \in V).$$

ここに $v^{\perp}(hK, x)$ は点 $\phi_V(hK, x)$ におけるベクトル v の法成分を表す．このときはめ込み ϕ_V はトランスレーティング・ソリトンの条件式 (3) を満たす．すなわち次が成立する．

$$\mathcal{H}(hK, x) = v^{\perp}(hK, x) \quad ((hK, x) \in (H/K) \times V).$$

系 3.12 において，ベクトル場 A が V の変形を生成するかどうかが問題となる．次は常微分方程式の一般論により与えられる．

補題 3.16 D を $\mathbb{R}^d$ の領域，$A : D \to \mathbb{R}^d$ を $r \geq 1$ に対し C^r 級のベクトル場，I を閉区間，$x_0 \in D$，$t_0 \in I$，$f(x_0, \cdot) : I \to \mathbb{R}^d$ を $f(x_0, t_0) = x_0$ を初期条件とする A の積分曲線とする．このとき x_0 の近傍 $U \subset \mathbb{R}^d$ で次を満たすものが存在する．

(1) 各点 $x \in U$ に対し，$f(x, t_0) = x$ を初期条件とする積分曲線 $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}^d$ が存在する．

(2) 写像 $f : U \times I \to \mathbb{R}^d$; $(x, t) \mapsto f(x, t)$ は C^r 級である．

補題 3.16 を用いて，部分多様体 V がコンパクトのとき，ベクトル場 A が V の変形を生成する条件を次のように示すことができる．

命題 3.17 $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を滑らかなベクトル場，V を $\mathbb{R}^d$ の k 次元コンパクト部分多様体，$t_0 \in \mathbb{R}$ とする．ある $T_0 > 0$ が存在し，任意の $x \in V$ に対し $f(x, t_0) = x$ を初期条件とする積分曲線 $f(x, \cdot) : [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}^d$ が存在するとする．このとき $T_0 > T_1 > 0$ を満たすある $T_1 > 0$ が存在し，ベクトル場 A は V の変形 $f : V \times [t_0 - T_1, t_0 + T_1] \to \mathbb{R}^d$ を生成する．

次に命題 3.17 における $T_0 > 0$ が存在するための条件を考える．まず Picard-Lindelöf の定理と呼ばれる次の補題を示す．
$B(x; R) \subset \mathbb{R}^d$ を中心 $x \in \mathbb{R}^d$，半径 $R > 0$ の，d 次元の閉球体とする．

補題 3.18 (Picard-Lindelöf の定理) $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ をベクトル場，$x_0 \in \mathbb{R}^d$，$t_0 \in \mathbb{R}$ とする．ある $R_0 > 0$ が存在し，A が $B(x_0; R_0)$ 上で *Lipschitz* 連続であると仮定する．すなわち，ある $L > 0$ が存在し，次が成立すると仮定する．

$$|A_{x_1} - A_{x_2}| \leq L|x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in B(x_0; R_0)).$$

$M > 0$ を，

$$|A_x| \leq M \quad (x \in B(x_0; R_0))$$

満たす数とする．このとき $T_0 \leq R_0/M$ かつ $T_0 < 1/L$ を満たす任意の $T_0 > 0$ に対し，$f(x_0, t_0) = x_0$ を初期条件とする A の唯一つの積分曲線 $f(x_0, \cdot) : [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}^d$ が存在する．

$\mathbb{R}^d$ の部分多様体 V と $R > 0$ に対し，V の半径 R の管状近傍 $T(V, R)$ を $T(V; R) := \bigcup_{x \in V} B(x; R)$ で定める．

系 3.19 $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ を滑らかなベクトル場，V を $\mathbb{R}^d$ の部分多様体，$t_0\in\mathbb{R}$ とする．次を満たす $R_0>0$ が存在すると仮定する．

(i) ベクトル場 A は $T(V,R_0)$ 上次の意味で一様に *Lipschitz* 連続である：任意の $x\in V$ に対し $L>0$ が存在し，次が成立する．

$$|A_{x_1}-A_{x_2}|\leq L|x_1-x_2|\quad (x_1,x_2\in B(x;R_0)).$$

(ii) 次を満たす $M>0$ が存在する．

$$|A_x|\leq M\quad (x\in T(V;R_0)).$$

このとき次が成り立つ．

(1) $T_0\leq R_0/M$ かつ $T_0<1/L$ を満たす任意の $T_0>0$ 対し，各点 $x\in V$ で $f(x,t_0)$ を初期条件とする A の積分曲線 $f(x,\cdot):[t_0-T_0,t_0+T_0]\to\mathbb{R}^d$ が唯一つ存在する．

(2) 写像 $f:V\times[t_0-T_0,t_0+T_0]\to\mathbb{R}^d;\ (x,t)\mapsto f(x,t)$ は C^∞ 級である．

ベクトル場 A が，必ずしもコンパクトとは限らない部分多様体の変形を生成するための十分条件が次の命題で与えられる．4 節および 5 節で述べられるように，我々の設定では部分多様体 V はモーメント写像 $\mu:M\to\mathfrak{h}^*$ と $c\in\mathfrak{h}^*$ に関するレベルセット $V_c:=\mu^{-1}(c)$ として与えられる．またベクトル場 A はある $a\in\mathfrak{h}^*$ に対し $(d\mu)_pA_p\equiv -a$ を満たすという良い性質を持っている．これらを念頭に置きつつ，次の命題を示す．

命題 3.20 $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ を滑らかなベクトル場，$t_0\in\mathbb{R}$，$\mu:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^l$ をある要素 $a\in\mathbb{R}^l$ に対し，

$$(d\mu)_xA_x\equiv -a\in\mathbb{R}^l\quad (x\in\mathbb{R}^d)\tag{4}$$

を満たす写像，ある要素 $c_0\in\mathbb{R}^l$ に対し $c_t:=c_0-ta$，$t\in\mathbb{R}$，V_{c_t} を $t\in\mathbb{R}$ に対し $V_{c_t}=\mu^{-1}(c_t)$ で定められる部分多様体とする．$T(V_{c_0};R_0)$ 上で系 *3.19* の条件 (i) および (ii) が成立するような $R_0>0$ が存在すると仮定する．$T_0>0$ および $f:V_{c_0}\times[-T_0,T_0]\to\mathbb{R}^d$ を系 3.19 と同様にとる．さらに次の条件を仮定する．

(iii) $T_1\in(0,T_0]$ が存在し次が成立する．

$$\bigcup_{t\in[0,T_1]}V_{c_t}\subset T(V_{c_0};R_0/3).$$

このとき $T_2\leq R_0/2M$ かつ $T_2<1/L$ を満たす任意の $T_2\in(0,T_1]$ に対し次が成り立つ．

(1) 任意の $s\in[0,T_2]$ に対し，写像 $f(\cdot,s):V_{c_0}\to V_{c_s};\ x\mapsto f(x,s)$ は微分同相写像である．

(2) ベクトル場 A は V_{c_0} の変形 $f:V_{c_0}\times[0,T_2]\to\mathbb{R}^d;\ (x,t)\mapsto f(x,t)$ を生成する．

6 節では Lagrange 平均曲率流の構成に際して以上の常微分方程式に関する諸事項を用いる．

4　対称性を持った Lagrange はめ込み

この節ではモーメント写像と Lie 群作用を用いて，シンプレクティック多様体において Lagrange はめ込みを構成する方法を示す．さらに，Calabi-Yau 多様体内の不変な向き付けられた Lagrange はめ込みが，ある条件下で，Lagrange 角度と平均曲率ベクトル場について対称性を持つことを示す．

命題 4.1 (M,ω) をシンプレクティック多様体，H を M に作用する *Lie* 群で ω を保ちモーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群，V_c を M の部分多様体で $V_c \subset M^K$ を満たすもの，$\phi_{V_c} : (H/K) \times V_c \to M$; $(hK,p) \mapsto hp$ をはめ込みとする．次を仮定する．

(i) V_c はアイソトロピック,

(ii) $V_c \subset \mu^{-1}(c)$ for $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$.

このとき写像 ϕ_{V_c} はアイソトロピックである．逆に，はめ込み ϕ_{V_c} がアイソトロピックでありかつ ϕ_{V_c} の像が連結であるならば，条件 (i), (ii) が成り立つ．

系 4.2 命題 *4.1* の条件に加え，

$$\dim H/K + \dim V_c = n$$

が成立するならば，写像 ϕ_{V_c} は *Lagrange* はめ込みである．

次に Calabi-Yau 多様体内のある種の Lagrange はめ込みの Lagrange 角度および平均曲率ベクトル場が持つ対称性について述べる．概要は次の通りである．与えられた Calabi-Yau 多様体 (M,J,ω,Ω) と M に作用する Lie 群 H に対し，H の双対 Lie 環の中心 $Z(\mathfrak{h}^*)$ のある要素 a_H が定まる．コベクトル a_H はある部分多様体 $V \subset M$ 上のあるベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^{\#}$ を生起する．いくつかの条件のもと，Lagrange はめ込み ϕ_V の Lagrange 角度および平均曲率ベクトル場が a_H と $J[\alpha_H(\cdot)]^{\#}$ によって記述される．

補題 4.3 M を多様体，H を M に作用する *Lie* 群，$\mathfrak{h}$ を H の *Lie* 環，K を H の閉部分群，$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ を K の *Lie* 環，$p \in M^K$ とする．次の二つの写像はそれぞれ定義が無矛盾であり，かつ線型同型である．

$$\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_K(H/K); \quad [\xi] \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi)K,$$
$$\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_p(H\cdot p); \quad [\xi] \mapsto \xi_p^{\#}.$$

補題4.3 より，写像 $\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_p(H\cdot p)$; $[\xi] \mapsto [\xi]_p^{\#} := \xi_p^{\#}$ によって記号 $[\xi]_p^{\#}$ を無矛盾的に定めることができる．同様に写像 $\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \to \mathrm{T}_K(H/K)$; $[\xi] \mapsto \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t[\xi])K := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t\xi)K$ によって記号 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(t[\xi])K$ を定めることができる．

命題 4.4 (M,g) を *Riemann* 多様体，H を M に作用する *Lie* 群，K を H の閉部分群，b を $\mathfrak{h}^*$ の要素で $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Ker}\, b$ を満たすものとする．このとき写像 $[\beta(\cdot)] : M^K \to \mathfrak{h}/\mathfrak{k}$; $p \mapsto [\beta(p)]$ を次で定めることができる．

$$\langle b, [\eta] \rangle = g_p\big([\beta(p)]_p^{\#}, \eta_p^{\#}\big). \tag{5}$$

定義 4.5 命題 *4.4* の条件を仮定する．命題 *4.4* で定められる M^K に沿ったベクトル場 $[\beta(\cdot)]^{\#}$ を，g **に関しコベクトル** $b \in \mathfrak{h}^*$ **で生成されたベクトル場**と呼ぶ．
さらに M 上の概複素構造 J が与えられたとき，M^K に沿ったベクトル場 $J[\beta(\cdot)]^{\#}$ を，(g, J) **に関しコベクトル** $b \in \mathfrak{h}^*$ **で生成されたベクトル場**と呼ぶ．

$J[\beta(\cdot)]^{\#}$ は次の性質を持つ．

命題 4.6 (M, J, ω, g) を *Kähler* 多様体，H を M に作用する *Lie* 群でモーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K, b を命題 *4.4* と同様とする．このとき次が成り立つ．

$$(d\mu)_p J_p [\beta(p)]^{\#}_p = -b \quad (p \in M^K).$$

系 4.7 命題 *4.6* の条件を仮定する．$p \in M^K$，$c_0 := \mu(p) \in \mathfrak{h}^*$ とする．ある区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し，$\gamma(0) = p$ を初期条件とするベクトル場 $J[\beta(\cdot)]^{\#}$ の積分曲線 $\gamma_p : I \to M^K$ が存在するとする．このとき次が成立する．

$$\mu(\gamma_p(t)) = c_t, \quad (t \in I).$$

ここに c_t は $c_t := c_0 - tb$ で定められる $\mathfrak{h}^*$ の要素である．

次に Lie 群作用による Calabi-Yau 構造の変換公式を示す．

命題 4.8 (M, J, ω, Ω) を連結な *Calabi-Yau* 多様体，H を M に作用する連結 *Lie* 群で，J と ω を保つものとする．このときある要素 $a_H \in Z(\mathfrak{h}^*)$ が存在し，次が成り立つ．

$$L_h^* \Omega = e^{\sqrt{-1}\langle a_H, \eta_1 + \cdots + \eta_l \rangle} \Omega \quad (h \in H).$$

ここに $\eta_1, \cdots, \eta_l$ は $h = \exp \eta_1 \cdots \exp \eta_l$ を満たす $\mathfrak{h}$ の要素である．

次の命題は，ある条件下で a_H を Lagrange 角度の微分写像と解釈できることを示す．

命題 4.9 (M, J, ω, Ω) を $2n$ 次元連結 *Calabi-Yau* 多様体，H を M に作用する連結 *Lie* 群で J を保ちモーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を H の閉部分群で H/K が向き付け可能であるもの，V_c を $V_c \subset M^K$ を満たす M の向き付け可能な部分多様体で次の条件を満たすものとする．

(i) ϕ_{V_c} ははめ込み，

(ii) V_c はアイソトロピック，

(iii) ある $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$ に対し $V_c \subset \mu^{-1}(c)$，

(iv) $\dim(H/K) + \dim V_c = n$.

このとき写像 ϕ_{V_c} は系 4.2 により Lagrane はめ込みである．θ_c を ϕ_{V_c} の Lagrange 角度とする．このとき次が成り立つ．

$$\theta_c(hK, p) = \theta_c(K, p) + \langle a_H, \eta_1 + \cdots + \eta_l \rangle \quad (hK \in H/K,\ p \in V_c).$$

ここに a_H は命題 4.8 で定まる $Z(\mathfrak{h}^*)$ の要素，$\eta_1, \cdots, \eta_l$ は命題 4.8 と同様である．

系 4.10 命題 *4.9* の条件下で，K 作用は *Calabi-Yau* 構造 Ω を保つ．すなわち次が成り立つ．

$$L_k^*\Omega = \Omega \quad (k \in K).$$

系 4.10 より $\mathfrak{k} \subset \ker a_H$ であるから，$a_H \in Z(\mathfrak{h}^*)$ を $(\mathfrak{h}/\mathfrak{k})^*$ の要素とみなすことができる．そこで (g, J) に関し a_H が生成する $V_c \subset M^K$ に沿ったベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ が定まる．この節の最後に，ある種の Lagrange はめ込みの平均曲率ベクトル場は，このベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ によって表されることを示す．

命題 4.11 命題 *4.9* の条件下，任意の $(hK, p) \in (H/K) \times V_c$ に対し次が成り立つ．

$$\mathcal{H}^c(hK, p) = (L_h)_{*p} J_p \Big\{ [\alpha_H(p)]_p^\# + \Big(\mathrm{grad}_{\phi_{V_c}{}^* g} \theta_c(K, \cdot\,) \Big)_p \Big\}.$$

ここに $\mathcal{H}^c$ ははめ込み ϕ_{V_c} の平均曲率ベクトル場である．

系 4.12 命題 *4.9* の条件に加え，*Lagrange* 角度 θ_c が $\{K\} \times V_c$ 上一定であると仮定する．このとき次が成り立つ．

$$\mathcal{H}^c(hK, p) = (L_h)_{*p} J_p [\alpha_H(p)]_p^\# \quad (hK \in H/K,\ p \in V_c).$$

5 広義直交対称性を用いた Lagrange 平均曲率流の構成

この節では系 3.12 と系 4.12 を適用し，Lie 群作用を用いて Calabi-Yau 多様体内で Lagrange 平均曲率流を構成する方法を示す．

定理 5.1 (M, J, ω, Ω) を $2n$ 次元連結 *Calabi-Yau* 多様体，H を $\mathfrak{h}$ を *Lie* 環とし J を保つように M に作用する連結 *Lie* 群でモーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ を持つもの，K を $\mathfrak{k}$ を *Lie* 環とする H の閉部分群で H/K が向き付け可能であるもの，$m := \dim(H/K)$，a_H を命題 *4.8* で定められる $Z(\mathfrak{h}^*)$ の要素，$J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ をコベクトル a_H が (J, g) に関し生成する M^K に沿ったベクトル場，V_{c_0} をある $c_0 \in Z(\mathfrak{h}^*)$ に対し $M^K \cap \mu^{-1}(c_0)$ 内にある M の $(n-m)$ 次元部分多様体で $\phi_{V_{c_0}}$ がはめ込みであるものとする．
ある区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対しベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ が変形 $f : V_{c_0} \times I \to M^K$ を生成し，その拡大 F が存在するとする．すなわち次が成り立つとする．

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(K, p) = J_{f_t(p)} [\alpha_H(f_t(p))]_{f_t(p)}^\# \quad (p \in V_{c_0},\ t \in I). \tag{6}$$

さらに各時刻 $t \in I$ と $c_t := c_0 - t a_H \in Z(\mathfrak{h}^*)$ に対し次が成立すると仮定する．

(i) 部分多様体 $V_{c_t} := f_t(V_{c_0})$ はアイソトロピック，

(ii) $\phi_{V_{c_t}}$ の Lagrange 角度 θ_{c_t} は $\{K\} \times V_{c_t}$ 上一定．

このとき写像族 $(F_t)_{t \in I}$ ははめ込み $\phi_{V_{c_0}}$ の Lagrange 平均曲率流である．すなわち次が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(hK, p) = \mathcal{H}^t(hK, p) \quad \big((hK, p) \in (H/K) \times V_{c_0},\ t \in I\big).$$

次に定理 5.1 の条件を実現するより具体的な条件を求める．このために Lagrange 部分多様体 L と L に直交するように作用する Lie 群を用いる．次の命題ははめ込み ϕ_{V_c} の Lagrange 角度 θ_c がコベクトル $a_H \in Z(\mathfrak{h}^*)$ と L の Lagrange 角度 θ で表されるための条件を与える．

命題 5.2 $(M, J, \omega, g, \Omega), H, \mu, K, m, a_H, J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ を定理 *5.1* と同様とする．L を M の向き付けられた *Lagrange* 部分多様体，θ をその *Lagrange* 角度，V_c を L^K 内にある M の $(n-m)$ 次元部分多様体とする．次を仮定する．

(i) 各 $p \in V_c$，各 $\xi \in \mathfrak{h}$ に対し次が成立．

$$\text{(i.a)} \quad \xi_p^\# \in \mathrm{T}_p^\perp L \oplus \mathrm{T}_p V_c,$$
$$\text{(i.b)} \quad \xi_p^\# \notin \mathrm{T}_p V_c \setminus \{0\},$$
$$\text{(i.c)} \quad \mathrm{i}\langle a_H, \xi \rangle \neq 0 \text{ ならば } \xi_p^\# \in \mathrm{T}_p^\perp L.$$

(ii) $V_c \subset \mu^{-1}(c)$ for $c \in Z(\mathfrak{h}^*)$.

このとき次が成り立つ．

(1) 部分多様体 V_c は標準的な向きを持ち，ϕ_{V_c} の Lagrange 角度 $\theta_c : (H/K) \times V_c \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は次で表される．

$$\theta_c(hK, p) = \theta(p) - \frac{\pi}{2} m + \langle a_H, \eta_1 + \cdots + \eta_l \rangle, \tag{7}$$

ここに $h = \exp \eta_1 \cdots \exp \eta_l$.

(2) $J_p[\alpha_H(p)]_p^\# \in \mathrm{T}_p L \quad (p \in V_c)$.

注意 5.3 命題 *5.2* の条件 (i) を**広義の直交条件**と呼ぶ．命題 5.2 の主張 (1) は条件 (i.c) なしに成り立つ．また条件 (i.a) の代わりに**狭義の直交条件**

$$\text{(i.a)}' \quad \xi_p^\# \in \mathrm{T}_p^\perp L \quad (p \in V_c,\ \xi \in \mathfrak{h})$$

が成立するならば条件 (i.b)，(i.c) は自動的に従う．

命題 5.2 を用いて定理 5.1 の条件を実現する条件を示す．

定理 5.4 $(M, J, \omega, \Omega), H, \mu, K, a_H, J[\alpha_H(\cdot)]^\#, L, \theta$ を命題 *5.2* と同様とし，$c_0 \in Z(\mathfrak{h}^*)$，$I \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む区間とする．各時刻 $t \in I$ および $c_t := c_0 - t a_H$ に対し集合 $\widetilde{V}_{c_t} := \mu^{-1}(c_t) \cap L$ が M の $(n-m)$ 次元部分多様体であり，写像 $\phi_{V_{c_0}}$ ははめ込みであるとする．次を仮定する．

(i) 各時刻 $t \in I$ で $\widetilde{V}_{c_t}$ 上命題 5.2 の広義直交条件 (i) が成立する，

(ii) ベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ は V_{c_0} の変形 $f : V_{c_0} \times I \to M^K$ を生成し，f の拡大 F が存在する，

(iii) Lagrange 角度 θ は各時刻 $t \in I$ で $V_{c_t} := f_t(V_{c_0})$ 上一定である．（例えば L が特殊 Lagrange 部分多様体である）．

このとき写像族 $(F_t)_{t \in I}$ は写像 $\phi_{V_{c_0}}$ の Lagrange 平均曲率流を与える．

系 5.5 定理 *5.4* の条件に加え，H 作用が *Calabi-Yau* 構造 Ω を保つ，すなわち $a_H = 0$ が成立すると仮定する．このとき写像族 (F_t) ははめ込み $\phi_{V_{c_0}}$ の *Lagrange* 平均曲率流の安定解を与える．すなわち $F_t \equiv F_0$ が成り立ち，F_0 は特殊 *Lagrange* はめ込みである．

[14] において，著者は系 5.5 を用いて Stenzel 計量を備えた非平坦 Calabi-Yau 多様体 $\mathrm{T}^* S^n$ 内の特殊 Lagrange 部分多様体のいくつかの非自明な具体例を示した．これらの具体例は $SO(n+1)$ の部分群の作用によって構成され，余等質性 2 作用の例を含む．

6　具体例

この節では，定理 5.4 に基づき，複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ において構成される，Lagrange 平均曲率流のいくつかの具体例を紹介する．これらの具体例は，自己相似解およびトランスレーティング・ソリトンを含むものである．以下では任意の自然数 k に対し，k 次の単位行列を E_k で表す．

6.1　非可換群 $H = U(1) \times SO(3)$ の狭義直交作用による自己相似解の構成

本項では $\mathbb{C}^4$ において，非可換群 $U(1) \times SO(3)$ の作用によって，Lagrange 平均曲率流の自己相似解を構成する．
$(\mathbb{C}^4, J, \omega, g)$ を標準的な Calabi-Yau 構造を備えた，4 次元複素 Euclid 空間とする．ここに，J, ω, Ω, g はそれぞれ，複素構造，Kähler 形式，Calabi-Yau 構造，Kähler 計量を表す．L を次で定められる $\mathbb{C}^4$ の特殊 Lagrange 部分多様体であるとする．

$$L := \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, 3, 4) \right\} \cong \mathbb{R}^4.$$

$H = U(1) \times SO(3)$ とする．$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ に対し，H の作用 $\Phi : H \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$; $(e^{\sqrt{-1}\theta}, h, z) \mapsto \Phi(e^{\sqrt{-1}\theta}, h, z)$ を，次で定める．

$$\Phi(e^{\sqrt{-1}\theta}, h, z) := \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & h \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} e^{\sqrt{-1}\lambda_1\theta} & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2\theta} E_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

この作用が，複素構造 J と Kähler 形式 ω を保つことは直接的に確かめられる．
K を次で定まる H の閉部分群とする．

$$K := \{1\} \times \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & k \end{array} \right] \;\middle|\; k \in SO(2) \right\} \cong SO(2).$$

L^K は次で与えられる．

$$L^K = \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2 \neq 0 \right\}.$$

直接計算により，H 作用が L^K 上で L に対し，狭義に直交作用していることが確かめられる．
モーメント写像 $\mu : \mathbb{C}^4 \to \mathfrak{h}^*$ は次で与えられる．双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{u}(1)^* \oplus \mathfrak{so}(3)^*$，その中

心 $Z(\mathfrak{h}^*)$ は $\mathfrak{u}(1)^*$ である．$\mathfrak{h}$ の基底 $(\xi_1, \xi_{(2,3)}, \xi_{(2,4)}, \xi_{(3,4)})$ を次で定める．

$$\Phi(\exp(t\xi_1), z) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & E_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} e^{\sqrt{-1}\lambda_1 t} & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2 t} E_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(\exp(t\xi_{(i,j)}), z) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R_{(i,j)}(t) \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad ((i,j) = (2,3), (2,4), (3,4)).$$

ここに,

$$R_{(2,3)}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{(2,4)}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix}, \quad \cdots.$$

このとき，モーメント写像は次で与えられることが，直接計算で確かめられる．

$$\langle \mu(z), \xi_1 \rangle = \frac{1}{2}(\lambda_1|z_1|^2 + \lambda_2|z_2|^2 + \lambda_2|z_3|^2 + \lambda_2|z_4|^2) =: \mu_1(z),$$
$$\langle \mu(z), \xi_{(i,j)} \rangle := \mathrm{Im}\,(z_i \bar{z}_j) =: \mu_{(i,j)}(z) \quad ((i,j) = (2,3), (2,4), (3,4)).$$

そこで，V_c を次で定める．

$$V_c := L^K \cap \mu^{-1}(c\xi^1) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in L^K \;\middle|\; \mu_1(z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) = c \right\}.$$

ここに $\xi^1 \in \mathfrak{h}^*$ は ξ_1 の双対元であり，$c \in \mathbb{R}$ である．$\widetilde{V}_c := L \cap \mu^{-1}(c\xi^1)$ とおく．$c \neq 0$ と仮定すると，一般性を失わず $c > 0$ と仮定できる．$\widetilde{V}_c$ は $\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のとき楕円，$\lambda_1\lambda_2 < 0$ のとき双曲線，$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 < 0$ のとき空である．$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のときは $\widetilde{V}_c = V_c$ が成り立つ．その他の場合，$\widetilde{V}_c \backslash \{(p_c)_\pm\} = V_c$ が成り立つ．ここに二点 $(p_c)_\pm$ は，$\widetilde{V}_c$ と x_1 軸の交点である．こうして，いずれの場合も V_c は $\mathbb{C}^4$ の，実 1 次元の部分多様体であり，$\dim V_c + \dim(H/K) = 4 = (\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^4)/2$ が成立することがわかる．
直接計算で $a_H = (\lambda_1 + 3\lambda_2)\xi^1$ が得られる．ゆえにベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ は次で与えられる．

$$J_z[\alpha_H(z)]_z^\# = -\frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}_z L \quad \left(z \in L^K\right).$$

ベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ が任意の $c_0 \neq 0$ に対し V_{c_0} の変形を生成することは，次のようにして確かめられる．$J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ の自然な拡張として，ベクトル場 $A : L \to \mathrm{T}L$ を次で定める．

$$A_z = -\frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}_z L \quad (z \in L).$$

$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のとき，コンパクトな部分多様体 $\widetilde{V}_{c_0}$ はベクトル場 A に対し，命題 3.17 の条件を満たすから，A は $\widetilde{V}_{c_0}$ の変形 $\tilde{f} : V_{c_0} \times [-T, T] \to L$ $(T > 0)$ を生成する．A の表示から，$\tilde{f}((p_{c_0})_\pm, 0) = (p_{c_0})_\pm$ を初期条件とする A の積分曲線 $\tilde{f}((p_{c_0})_\pm, \cdot) : [-T, T] \to L$ は，各時刻 $t \in [-T, T]$ に対し，$\tilde{f}((p_{c_0})_\pm, t) = (p_{c_t})_\pm$ を満たすことが確かめられる．このことは，ベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ が V_{c_0} の変形 $f : V_{c_0} \times [-T, T] \to L$ を生成することを意味している．$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 < 0$ のとき，非コンパクトな部分多様体 $\widetilde{V}_{c_0}$ が命題 3.20 の条件を満たしていることが確かめられる．よって，$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のとき，$J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ は V_{c_0} の変形を生成する．$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ の場合には，命題 3.20 を直接適用できる．

命題 6.1 $c_0 \neq 0$ を固定する．このときある $T > 0$ が存在し，写像 $\phi_{V_{c_0}} : H \times V_{c_0} \to \mathbb{C}^4$ は，*Lagrange* 平均曲率流 $(F_t)_{t\in[0,T]}$ を生成する．さらに，これは平均曲率流の自己相似解である．すなわち，$k_{c_0} := -(\lambda_1 + 3\lambda_2)/c_0$ に対し，(F_t) は，$k_{c_0} < 0$ のとき自己縮小解，$k_{c_0} > 0$ のとき自己拡大解である．

この命題の前半はすでに示されている．後半は，命題 3.14 に基づいて直接的に確かめられる．

6.2 可換群 $H = U(1) \times SO(2)$ の広義直交作用による Lagrange 平均曲率流の構成

本項では $\mathbb{C}^5$ において，可換群 $U(1) \times SO(2)$ の広義直交作用を用いて，Lagrange 平均曲率流を構成する．

$(\mathbb{C}^5, J, \omega, \Omega)$ を標準的な Calabi-Yau 構造を備えた，5 次元複素 Euclid 空間とする．J, ω, Ω は 6.1 項と同様である．L を次で定められる $\mathbb{C}^5$ の特殊 Lagrange 部分多様体であるとする．

$$L := \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_i, y_j \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2,\ j = 3, 4, 5) \right\} \cong \mathbb{R}^5.$$

$H = U(1) \times SO(2)$ とする．$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ に対し，H の作用 $\Phi : H \times \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$; $(e^{\sqrt{-1}\theta}, h, z) \mapsto \Phi(e^{\sqrt{-1}\theta}, h, z)$ を，次で定める．

$$\Phi(e^{\sqrt{-1}\theta}, h, z) := \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & h & \\ \hline & & h \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|cc} e^{\sqrt{-1}\lambda_1\theta} & & & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2\theta} E_2 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}.$$

この作用が，複素構造 J と Kähler 形式 ω を保つことは直接的に確かめられる．

K を H の自明な部分群，すなわち $K := \{1\} \times \{E_2\} \subset U(1) \times SO(2)$ とし，Λ と Π をそれぞれ次で定められる L 内の直線および平面であるとする．

$$\Lambda := \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \right\}, \quad \Pi := \left\{ \left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \right\}.$$

このとき $L^K = L - (\Lambda \cup \Pi)$ である．
モーメント写像 $\mu : \mathbb{C}^5 \to \mathfrak{h}^*$. は次で与えられる．$H$ の双対リー環 $\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{u}(1)^* \oplus \mathfrak{so}(2)^*$ であり，その中心 $Z(\mathfrak{h}^*)$ は自分自身である．$\mathfrak{h}$ の基底 (ξ_1, ξ_2) を次で定める．

$$\Phi(\exp(t\xi_1), z) = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{\sqrt{-1}\lambda_1 t} & & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2 t}E_2 & \\ \hline & & E_2 \end{array}\right] z,$$

$$\Phi(\exp(t\xi_2), z) = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & & & & \\ \hline & \cos t & -\sin t & & \\ & \sin t & \cos t & & \\ \hline & & & \cos t & -\sin t \\ & & & \sin t & \cos t \end{array}\right] z.$$

このとき，モーメント写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ は次で与えられることが直接的に確かめられる．

$$\langle \mu(z), \xi_1 \rangle := \frac{1}{2}(\lambda_1|z_1|^2 + \lambda_2|z_2|^2 + \lambda_2|z_3|^2) =: \mu_1(z),$$
$$\langle \mu(z), \xi_2 \rangle := \mathrm{Im}\,(z_2\bar{z}_3 + z_4\bar{z}_5) =: \mu_2(z).$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対し，集合 $V_{(c_1,c_2)}$ を次で定める．

$$\begin{aligned} V_{(c_1,c_2)} &:= L^K \cap \mu^{-1}(c_1\xi^1 + c_2\xi^2) \\ &= \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \right) \in L^K \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu_1(z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_2 y_3^2) = c_1 \\ \mu_2(z) = -x_2y_3 = c_2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ここに $\xi^1, \xi^2 \in \mathfrak{h}^*$ はそれぞれ $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}$ の双対元である．
　$x_1x_2y_3$ 空間内の集合 $W_{(c_1,c_2)}$ を次で定める．

$$W_{(c_1,c_2)} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \in L^K \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu_1(z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_2 y_3^2) = c_1 \\ \mu_2(z) = -x_2y_3 = c_2 \end{array} \right\}.$$

すなわち $W_{(c_1,c_2)}$ は，$\{\mu_1 = c_1\}$ と $\{\mu_2 = c_2\}$ の $x_1x_2y_3$ 空間内での共通部分である．このとき $V_{(c_1,c_2)}$ は $W_{(c_1,c_2)}$ を底空間とする $x_1x_2y_3y_4y_5$ 空間内のシリンダーである．$c_1 \geq 0$ と仮定しても一般性を失わない．まず $c_1 > 0$ と仮定する．すると集合 $\{\mu_1 = c_1\}$ は，$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のとき楕円面，$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 > 0$ のとき一葉双曲面，$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 < 0$ のとき二葉双曲面である．$c_1 = 0$ の場合，集合 $\{\mu_1 = c_1\}$ は，$\lambda_1\lambda_2 < 0$ ならば錐，$\lambda_1\lambda_2 > 0$ ならば原点である．$\{\mu_2 = c_2\}$ が滑らかな部分多様体（実際のところ，双曲線柱面）になるように，$c_2 \neq 0$ と仮定する．さらに一般性を欠くことなく $c_2 > 0$ と仮定する．
モーメント写像 μ の正則点を調べることにより，集合 $W_{(c_1,c_2)}$ が,（ゆえに集合 $V_{(c_1,c_2)}$ が,）部分多様体であることが確かめられる．そこで次を得る．

補題 6.2 集合 $V_{(c_1,c_2)}$ は，以下のそれぞれの場合において，$\mathbb{C}^5$ の 3 次元，非コンパクト，非連結な部分多様体である．

(1) $c_1>0,\ c_2>0,\ \lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_2<c_1/c_2,$

(2) $c_1>0,\ c_2>0,\ \lambda_1\lambda_2<0,\ \lambda_2\neq c_1/c_2,$

(3) $c_1=0,\ c_2>0,\ \lambda_1\lambda_2<0.$

特に，いずれの場合においても，条件 $\dim V_{(c_1,c_2)}+\dim(H/K)=5=(\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^5)/2$ が成立する．

直接計算によって，$a_H=(\lambda_1+2\lambda_2)\xi^1$ が得られる．ゆえに，ベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ は次で与えられる．

$$J_z[\alpha_H(z)]_z^\#=-\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{\lambda_1^2x_1^2+\lambda_2^2x_2^2+\lambda_2^2y_3^2}\begin{bmatrix}\lambda_1x_1\\ \lambda_2x_2\\ \sqrt{-1}\lambda_2y_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\in \mathrm{T}_zL\quad\bigl(z\in L\bigr).$$

補題 6.2 のいずれの $V_{(C_1,c_2)}$ に対しても，命題 5.2 の広義直交条件，および命題 3.20 の条件が成立することが直接的に確かめられる．以上から次を得る．

命題 6.3 c_1,c_2,λ_1 および λ_2 を補題 *6.2* の通りとする．このとき，ある $T>0$ が存在して，写像 $\phi_{V_{(c_1,c_2)}}:H\times V_{(c_1,c_2)}\to\mathbb{C}^5$ は *Lagrange* 平均曲率流 $(F_t)_{t\in[0,T]}$ を生成する．

6.3 非可換群 $H=\mathbb{R}\times SO(3)$ の狭義直交作用によるトランスレーティング・ソリトンの構成

$(\mathbb{C}^5,J,\omega,\Omega,g)$ を，標準的な Calabi-Yau 構造を備えた 5 次元複素 Euclid 空間とする．J,ω,Ω,g は 6.1 項と同様である．$H=\mathbb{R}\times SO(3)$ とする．$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し，H 作用 $\Phi:H\times\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5;(t,h,z)\mapsto\Phi(t,h,z)$ を次で定める．

$$\begin{aligned}&\Phi(t,h,z)\\ &:=\left[\begin{array}{c|c|c}1&&\\ \hline &h&\\ \hline &&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c}e^{\sqrt{-1}\lambda_1t}&&\\ \hline &e^{\sqrt{-1}\lambda_2t}E_3&\\ \hline &&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sqrt{-1}t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

この作用が複素構造 J および Kähler 形式 ω を保つことは直接的に確かめられる．
L を次で定められる特殊 Lagrange 部分多様体とする．

$$L:=\left\{(\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ 0\\ 0\\ x_5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 0\\ y_3\\ y_4\\ 0\end{bmatrix})\in\mathbb{R}^5\times\mathbb{R}^5\right\}\cong\mathbb{R}^5.$$

K を次で定まる H の閉部分群であるとする．

$$K := \{0\} \times \left\{ \left[\begin{array}{c|c} k & \\ \hline & 1 \end{array} \right] \,\middle|\, k \in SO(2) \right\} \cong SO(2).$$

L^K は次で与えられる．

$$L^K = \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \,\middle|\, x_2 \neq 0 \right\}.$$

このとき，H 作用が L^K 上で L に狭義に直交していることが直接的に確かめられる．
モーメント写像 $\mu : \mathbb{C}^5 \to \mathfrak{h}^*$ を考える．H の双対 Lie 環 $\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{u}(1)^* \oplus \mathfrak{so}(3)^*$，その中心 $Z(\mathfrak{h}^*)$ は $\mathfrak{u}(1)^*$ である．$\mathfrak{h}$ の基底 $(\xi_1, \xi_{(2,3)}, \xi_{(2,4)}, \xi_{(3,4)})$ を次で定める．

$$\Phi(\exp(t\xi_1), z) = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{\sqrt{-1}\lambda_1 t} & & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2 t} E_3 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{-1}t \end{bmatrix},$$

$$\Phi(\exp(t\xi_{(i,j)}), z) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & R_{(i,j)}(t) & \\ \hline & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad ((i,j) = (2,3), (2,4), (3,4)).$$

ここに，$R_{(2,3)}(t), R_{(2,4)}(t)$ and $R_{(3,4)}(t)$ は 6.1 項で定めた通りである．このとき，次で与えられる写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ がモーメント写像であることが直接に確かめられる．

$$\langle \mu(z), \xi_1 \rangle := \frac{1}{2}(\lambda_1 |z_1|^2 + \lambda_2 |z_2|^2 + \lambda_2 |z_3|^2 + \lambda_2 |z_4|^2) + \mathrm{Re} z_5 =: \mu_1(z),$$
$$\langle \mu(z), \xi_{(i,j)} \rangle := \mathrm{Im}\,(z_i \bar{z}_j) =: \mu_{(i,j)}(z) \quad ((i,j) = (2,3), (2,4), (3,4)).$$

$c \in \mathbb{R}$ に対し，集合 V_c を次で定める．

$$\begin{aligned} V_c &:= L^K \cap \mu^{-1}(c\xi^1) \\ &= \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in L^K \,\middle|\, \mu_1(z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) + x_5 = c \right\}. \end{aligned}$$

ここに $\xi^1 \in \mathfrak{h}^*$ は $\xi \in \mathfrak{h}$ の双対元である．また集合 $\widetilde{V}_c$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}_c &:= L^K \cap \mu^{-1}(c\xi^1) \\
&= \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{0} \right) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \mu_1(z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) + x_5 = c \right\}.
\end{aligned}
$$

μ の正則点を考えることにより，任意の $c \in \mathbb{R}$，任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し，$\widetilde{V}_c$ が 2 次元の部分多様体であり，条件 $\dim V_c + \dim(H/K) = 5 = (\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^5)/2$ を満たすことが確かめられる．実際，$\widetilde{V}_c$ は，$\lambda_1\lambda_2 > 0$ のとき楕円放物面，$\lambda_1\lambda_2 < 0$ のとき双曲放物面である．直接計算で $a_H = (\lambda_1 + 3\lambda_2)\xi^1$ が得られる．ベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^{\#}$ は次で与えられる．

$$
J_z[\alpha_H(z)]_z^{\#} = -\frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}_z L \quad (z \in L^K).
$$

$J[\alpha_H(\cdot)]^{\#} : L^K \to \mathrm{T}L$ の自然な拡張として，ベクトル場 $A : L \to \mathrm{T}L$ を次で定める．

$$
A_z = -\frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}_z L \quad (z \in L).
$$

任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し，部分多様体 $\widetilde{V}_{c_0}$ とベクトル場 A が，命題 3.20 の条件を満たしていることが確かめられる．よって 6.1 項と同様に，任意の $c_0 \in \mathbb{R}$ に対し，ベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^{\#}$ は V_{c_0} の変形を生成することがわかる．

命題 6.4 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し，ある $T > 0$ が存在し，写像 $\phi_{V_c} : H \times V_c \to \mathbb{C}^5$ は *Lagrange* 平均曲率流 $(F_t)_{t \in [0,T]}$ を生成する．さらに，これはトランスレーティング・ソリトンである．

前半は上で既に示されている．後半は命題 3.15 に基づいて示される．

6.4 可換群 $H = \mathbb{R} \times SO(2)$ の広義直交作用によるトランスレーティング・ソリトンの構成

$(\mathbb{C}^6, J, \omega, \Omega, g)$ を標準的な Calabi-Yau 構造を備えた 6 次元複素 Euclid 空間とする．J, ω, Ω, g は 6.1 項と同様である．$H = \mathbb{R} \times SO(2)$ とする．$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し，H 作用 $\Phi : H \times \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6; (t, h, z) \mapsto \Phi(t, h, z)$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t, h, z) \\
&:= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ \hline & h & & \\ \hline & & h & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} e^{\sqrt{-1}\lambda_1 t} & & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2 t} E_2 & \\ \hline & & E_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{-1}t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

この作用は複素構造 J と Kähler 形式 ω を保存する．
特殊 Lagrange 部分多様体 L を次で定める．

$$L := \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \right\} \cong \mathbb{R}^6.$$

K を H の自明な部分群，すなわち $K := \{0\} \times \{E_2\} \subset \mathbb{R} \times SO(2)$ とし，また Π を L 内の x_1x_6 平面とする．このとき，$L^K = L - \Pi$ である．
次にモーメント写像 $\mu : \mathbb{C}^6 \to \mathfrak{h}^*$ を考える．$\mathfrak{h}$ の基底 (ξ_1, ξ_2) を次で定める．

$$\Phi(\exp(t\xi_1), z) = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{\sqrt{-1}\lambda_1 t} & & \\ \hline & e^{\sqrt{-1}\lambda_2 t} E_2 & \\ \hline & & \\ & & E_3 \\ & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{-1}t \end{bmatrix},$$

$$\Phi(\exp(t\xi_2), z) = \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 1 & & & & & \\ \hline & \cos t & -\sin t & & & \\ & \sin t & \cos t & & & \\ \hline & & & \cos t & -\sin t & \\ & & & \sin t & \cos t & \\ \hline & & & & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_6 \end{bmatrix}.$$

直接計算により，次の写像 $\mu : M \to \mathfrak{h}^*$ がモーメント写像であることが確かめられる．

$$\begin{aligned} \langle \mu(z), \xi_1 \rangle &= \frac{1}{2}(\lambda_1 |z_1|^2 + \lambda_2 |z|^2 + \lambda_2 |z_3|^2) + \mathrm{Re} z_6 =: \mu_1(z), \\ \langle \mu(z), \xi_2 \rangle &= \mathrm{Im}\,(z_2 \bar{z}_3 + z_4 \bar{z}_5) =: \mu_2(z). \end{aligned}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対し，集合 $V_{(c_1,c_2)}$ を次で定める．

$$\begin{aligned} V_{(c_1,c_2)} &:= L^K \cap \mu^{-1}(c_1 \xi^1 + c_2 \xi^2) \\ &= \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \in L^K \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu_1(z) = \dfrac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_2 y_3^2) + x_6 = c_1 \\ \mu_2(z) = -x_2 y_3 = c_2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ここに，$\xi^1, \xi^2 \in \mathfrak{h}^*$ は，それぞれ $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}$ の双対元である．
任意の $c_1 \in \mathbb{R}$，および任意の $c_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ に対し，集合 $V_{(c_1,c_2)}$ が 4 次元の部分多様体であることが，正則点を調べることにより確かめられる．ゆえにこれらの $V_{(c_1,c_2)}$ は条件 $\dim V_{(c_1,c_2)} + \dim(H/K) = 6 = (\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^6)/2$ を満たす．

計算により $a_H = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\xi^1$ を得る．これによりベクトル場 $J[\alpha_H(\cdot)]^\#$ は次で与えられる．

$$J_z[\alpha_H(z)]_z^\# = -\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_2^2 y_3^2 + 1}\begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \sqrt{-1}\lambda_2 y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

任意の $c_1 \in \mathbb{R}$，および任意の $c_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し，部分多様体 $V_{(c_1,c_2)}$ が，命題 5.2 における広義の直交条件と，命題 3.20 の条件を満たすことが確かめられる．以上から次を得る．

命題 6.5 任意の $c_1 \in \mathbb{R}$，および任意の $c_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し，ある $T > 0$ が存在し，写像 $\phi_{V_{(c_1,c_2)}}$ は *Lagrange* 平均曲率流 $(F_t)_{t\in[0,T]}$ を生成する．さらに，このフローは平均曲率流のトランスレーティング・ソリトンである．

命題の前半はすでに示されており，後半は命題 3.15 に基づく．

References

[1] H. Anciaux, *Construction of Lagrangian self-similar solutions to the mean curvature flow in* $\mathbb{C}^n$, Geom. Dedicata **120** (2006) 37–48.

[2] T. Behrndt, *Generalized Lagrangian mean curvature flow in Kähler manifolds that are almost Einstein*, Complex Differ Goem. **8**, (2011) 65–79. Springer Proceedings in Mathematics

[3] I. Castro, A.M. Lerma, *Translating solitons for Lagrangian mean curvature flows in the complex Euclidean plane*, Int. J. Math. **23** (2012), 1250101.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[5] K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, Tohoku Math. J. (2) **64** (2012), no. 1, 141–169.

[6] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differ. Geom. **31** (1990), 285–299.

[7] J. Jost, *Postmodern Analysis*, 3rd ed, Springer (2005).

[8] D. Joyce, Y.-I. Lee, M.-P. Tsui, *Self-similar solutions and translating solitons for Lagrangian mean curvature flow*, J. Differ. Geom. **8** (2010), 127–161.

[9] D. D. Joyce, *Conjectures on Bridgeland stability for Fukaya categories of Calabi-Yau manifolds, special Lagrangians, and Lagrangian mean curvature flow*, EMS Surv. Math. Sci. **2**(1) (2015), 1–62.

[10] D. D. Joyce, *Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), no. 1, 1–51.

[11] H. Konno, *Lagrangian mean curvature flows and moment maps*, Geom. Dedicata **198** (2019), 103–130.

[12] Y.-I. Lee, M.-T. Wang, *Hamiltonian stationary cones and self-similar solutions in higher dimension*, Trans. Am. Math. Soc. **362** (2010), no. 3, 1491–1503.

[13] Y.-I. Lee, M.-T. Wang, *Hamiltonian stationary shrinkers and expanders for Lagrangian mean curvature flow*, J. Differ. Geom. **83** (2009), 27–42.

[14] A. Ochiai, *A construction of special Lagrangian submanifolds by generalized perpendicular symmetries*, Tokyo J. Math. **43** (2020), no. 1, 215–238.

[15] L. S. Pontryagin, *Ordinary differential equations*, Pergamon Press (1962).

[16] M. B. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), 151–163.

[17] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. **B479** (1996), 243–259.

[18] R.P. Thomas and S.-T. Yau, *Special Lagrangians, stable bundles and mean curvature flow*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), 1075–1113.

[19] H. Yamamoto, *Weighted Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds and generalized Lagrangian mean curvature flows in toric almost Calabi-Yau manifolds*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 329–347.