ADIABATIC LIMITS, THETA FUNCTIONS, AND GEOMETRIC QUANTIZATION (RÉSUMÉ)

明治大学理工学部数学科　吉田　尚彦
TAKAHIKO YOSHIDA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
MEIJI UNIVERSITY

1. Introduction

Lagrange fibration の幾何学的量子化において，Spin^c Dirac 作用素の指数と Bohr-Sommerfeld ファイバーと呼ばれる離散的に現れるファイバーの個数とが一致する現象が，様々な例で確認されている [3, 6, 7, 8, 9, 13, 17, 18, 23, 10, 19, 20]．これについて，論文 [22] では，非特異 Lagrange fibration（つまり，Lagrange ファイバー束）に対して，Bohr-Sommerfeld 点で添え字づけられた前量子化束の切断の族で

(1) どのふたつも互いに直交し，
(2) 断熱極限の下で，
   (a) 各切断のサポートが，対応する Bohr-Sommerfeld ファイバーに集中し，
   (b) 切断の族が生成するベクトル空間が，Spin^c Dirac 作用素の核に近づく

ようなものを構成した．本稿では，このようなことを考える動機を説明したうえで，論文 [22] の主結果を正確に述べる．

2. 幾何学的量子化

2.1. **古典力学．** C^∞ 級多様体 M とその上の非退化な閉 2 次形式 ω の組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**といい，ω を M の**シンプレクティック構造**という．(M, ω) をシンプレクティック多様体とするとき，ω は非退化なので，M の各点 $x \in M$ で接空間 T_xM と余接空間 T_x^*M との同一視を与える．特に，M 上の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$df = -\iota_{X_f}\omega$$

によって M のベクトル場 X_f が定まる．ここで，ι_{X_f} はベクトル場 X_f の内部積とする．X_f を f の **Hamilton ベクトル場**という．また，関数 $f, g \in C^\infty(M)$ に対して，関数 $\{f, g\} \in C^\infty(M)$ を

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$$

Partly supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 15K04857 and 19K03479.

で定める．$\{f,g\}$ を f と g の**Poisson 括弧**という．Poisson 括弧は $C^\infty(M)$ に Poisson 代数の構造を定める．

解析力学において，M 上の関数 $H \in C^\infty(M)$ を Hamiltonian とする古典力学系は H の Hamilton ベクトル場の積分曲線

$$\frac{dx}{dt}(t) = X_H\,(x(t))$$

として記述される．特に，関数 $f \in C^\infty(M)$ が与えられたとき，この系における観測量 f の時間発展はポアソン括弧を用いて

$$\frac{d}{dt}f\,(x(t)) = \{H,f\}\,(x(t)) \tag{2.1}$$

で与えられる．

2.2. **量子力学**． 落下するボールやバネで繋がれたおもりの運動などが古典力学で記述されるのに対して，原子など非常に小さなスケールの現象は古典力学の代わりに量子力学で記述される．前節で述べたように，シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の関数 $H \in C^\infty(M)$ を Hamiltonian とする古典力学系では，観測量 $f \in C^\infty(M)$ の時間発展はポアソン括弧を用いて (2.1) と記述された．これに対して，量子力学系では Hamiltonian や観測量（古典力学系の H や f に対応するもの）はある複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素として定式化され，$\hat{H}$ を Hamiltonian とする量子力学系における観測量 $\hat{f}$ の時間発展は **Heisenberg の方程式**

$$\frac{d}{dt}\hat{f} = [\hat{H},\hat{f}]_h := \frac{2\pi\sqrt{-1}}{h}\left(\hat{H}\circ\hat{f} - \hat{f}\circ\hat{H}\right) \tag{2.2}$$

で記述される．ここで，h は Planck 定数と呼ばれる定数である．

物理学では，古典力学の理論から量子力学の理論に移行するための手続きを量子化という．

定義 2.1 (Dirac による量子化の公理)**.** h を Planck 定数に対応する形式的なパラメータとする．$(C^\infty(M,\mathbb{C}),\{\,,\})$，あるいは，その部分代数からある複素 Hilbert 空間 $\mathcal{Q}(M,\omega)$ 上の線型作用素全体の集合 $\mathrm{Op}\,(\mathcal{Q}(M,\omega))$ への線形写像 $f \mapsto \mathcal{Q}(f)$ で次の条件を満たすものを**量子化**とよぶ．$\mathcal{Q}(M,\omega)$ は**量子 Hilbert 空間**と呼ばれる．

(1) $\mathcal{Q}(1) = \mathrm{id}_{\mathcal{Q}(M,\omega)}$
(2) $\mathcal{Q}(\{f,g\}) = [\mathcal{Q}(f),\mathcal{Q}(g)]_h = \dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{h}\left(\mathcal{Q}(f)\mathcal{Q}(g) - \mathcal{Q}(g)\mathcal{Q}(f)\right)$
(3) $\mathcal{Q}$ は f の複素共役 f^* を $\mathcal{Q}(f)$ の共役作用素 $\mathcal{Q}(f)^*$ に移す，つまり，$\mathcal{Q}(f^*) = \mathcal{Q}(f)^*$.
(4) 関数の組 $\{f_1,\ldots,f_n\}$ が complete ならば，対応する線型作用素の組 $\{\mathcal{Q}(f_1),\ldots,\mathcal{Q}(f_n)\}$ も complete.

つまり，数学的には，量子化とは Lie 代数 $(C^\infty(M,\mathbb{C}),\{\ ,\ \})$（或いは，$(C^\infty(M,\mathbb{C}),\{\ ,\ \})$ の部分代数）の複素 Hilbert 空間への上記の条件をみたす表現のことである．

例 2.2 (正準量子化). $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ 上の 2 次微分形式 ω_0 を

$$\omega_0 := dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$$

と定める．ここで，$\mathbb{R}^n_x$ は $x_1, \ldots, x_n$ を座標とする n 次元ユークリッド空間とする．$\mathbb{R}^n_y$ も同様とする．ω_0 は $\mathbb{R}^{2n}$ にシンプレクティック構造を定める．

シンプレクティック多様体 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上の関数で $x_1, \ldots, x_n$ について 1 次多項式であるようなもの全体の集合を A とする．すなわち，$x = (x_1, \ldots, x_n)$，$y = (y_1, \ldots, y_n)$ とするとき

$$A := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(y)x_i + b(y), a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y)\}.$$

A は $(C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\ ,\ \})$ の部分代数である．$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) := L^2(\mathbb{R}^n_y)$ と定める．また，関数 $f \in A$ に対して $L^2(\mathbb{R}^n_y)$ 上の線型作用素 $\mathcal{Q}(f)$ を

$$\mathcal{Q}(f)s = fs + \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}X_f s - \lambda(X_f)s \quad (s \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n_y, \mathbb{C})) \tag{2.3}$$

で定める．ここで，$\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i$．特に，(2.3) において $f = x_i$，あるいは $f = y_i$ とすると

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(x_i) = \dfrac{h}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial y_i}, \\ \mathcal{Q}(y_i) = y_i \end{cases} \tag{2.4}$$

となり，これらは，いわゆる **Heisenberg の交換関係**

$$[\mathcal{Q}(x_i), \mathcal{Q}(y_j)]_h = \delta_{ij}, \quad [\mathcal{Q}(x_i), \mathcal{Q}(x_i)] = [\mathcal{Q}(y_i), \mathcal{Q}(y_i)] = 0 \tag{2.5}$$

を満たす．この量子化は**正準量子化**と呼ばれる．

一般に，シンプレクティック多様体が与えられたときに，その量子化を幾何学的に構成する手続きが複数知られている．このような手続きを総称して，**幾何学的量子化**と呼ぶ．以下では，ある二通りの量子化で得られる量子 Hilbert 空間の関係を論じる．

2.3. **Kostant-Souriau 理論．** ここでは，幾何学的量子化の一つである Kostant-Souriau 理論について説明する．(M, ω) をシンプレクティック多様体とする．(M, ω) 上の Hermite 直線束 L と L の Hermite 接続 ∇ の組 (L, ∇) で ∇ の曲率が $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-1}}\omega$ であるようなものを**前量子化束**という．

(M, ω) 上に前量子化束 (L, ∇) が与えられているとする．このとき，Kostant-Souriau 理論では，量子 Hilbert 空間を得るためには，次の偏極と呼ばれる付加構造が必要になる．

定義 2.3. M の接束の複素化 $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の可積分な Lagrange 部分束 $\mathcal{P}$ を**偏極**と呼ぶ．

$\mathcal{P}$ を偏極とし，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{P}$ に沿って共変コンスタントであるような L の切断のなす芽の層とする．このとき，量子 Hilbert 空間はナイーヴには $\mathcal{Q}(M,\omega) := H^0(M;\mathcal{S})$ と定義される．以下では，Kähler 偏極と実偏極という 2 つの代表的な偏極の場合を詳しく見ていく．

2.3.1. *Kähler* 偏極. (M,ω) に ω と整合的な複素構造 J があるとき（つまり，(M,ω,J) が Kähler 多様体の場合），反正則接束 $T^{0,1}M$ は (M,ω) の偏極である．$T^{0,1}M$ を **Kähler 偏極**とよぶ．この場合，L には ∇ が Chern 接続となるような正則直線束の構造が一意に定まり，$H^0(M;\mathcal{S})$ は L の正則切断全体のなすベクトル空間 $H^0(M;\mathcal{O}_L)$ に一致する．この場合の量子 Hilbert 空間を $\mathcal{Q}_{K\ddot{a}hler}(M,\omega)$ と書くことにすると，

$$\mathcal{Q}_{K\ddot{a}hler}(M,\omega) = H^0(M;\mathcal{O}_L)$$

である．M がコンパクトで小平消滅定理が成り立つ場合には，$H^0(M;\mathcal{O}_L)$ の次元は L に係数を持つ Dolbeault 作用素の指数と一致する．

2.3.2. 実偏極.

定義 2.4. (M^{2n},ω) を全空間とするファイバー束 $\pi\colon (M^{2n},\omega)\to B^n$ で，ファイバーが Lagrange 部分多様体であるようなものを **Lagrange ファイバー束**とよぶ．

例 2.5. n 次元トーラス $T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ の余接束の全空間 $(\mathbb{R}^n\times T^n, \sum_i dx_i\wedge dy_i)$ から $\mathbb{R}^n$ への射影 $\pi\colon (\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)\to\mathbb{R}^n$ は Lagrange ファイバー束である．ここで，x_i は $\mathbb{R}^n$ 方向の，y_i は T^n 方向の標準的な座標とする．

例 2.5 は，Lagrange ファイバー束の局所モデルを与える．

定理 2.6 (Arnold-Liouville の定理 [4])**.** ファイバーがコンパクト，弧状連結であるような *Lagrange* ファイバー束は，局所的には例 2.5 の $(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)\to\mathbb{R}^n$ と同一視できる．

以下では，$\pi\colon (M,\omega)\to B$ をファイバーがコンパクト，弧状連結な Lagrange ファイバー束とする．B には整アファイン構造[1]が入ることが知られている．またこのとき，前量子化束 (L,∇) の π の各ファイバーへの制限は平坦束であることに注意する．

定義 2.7. $b\in B$ が **Bohr-Sommerfeld** であるとは，$(L,\nabla)|_{\pi^{-1}(b)}\to\pi^{-1}(b)$ が非自明な平行切断を許容するときをいう．B の Bohr-Sommerfeld 点全体のなす集合を B_{BS} と表すことにする．

例 2.8. 例 2.5 において，前量子化束として

$$\left(\mathbb{R}^n\times T^n\times\mathbb{C}, d-2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i\right)\to(\mathbb{R}^n\times T^n,\sum_i dx_i\wedge dy_i)$$

を考える．このとき，直接計算により，Bohr-Sommerfled 点全体の集合 $\mathbb{R}^n_{BS}$ は $\mathbb{Z}^n$ と一致する．

[1]座標変換がアファイン写像であり，ヤコビ行列が $GL_n(\mathbb{Z})$ であるような座標近傍系を整アファイン構造とよぶ

この例からも分かるように，Bohr-Sommerfled 点は離散的に現れる．特に，M がコンパクトな場合には，Bohr-Sommerfeld 点は有限個である．

(M,ω) に Lagrange ファイバー束の構造 $\pi\colon (M,\omega)\to B$ があるとき，π のファイバーに沿った M の接束の複素化 $T_\pi M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ は (M,ω) の偏極である．$T_\pi M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ を**実偏極**とよぶ．このとき，次が知られている．

定理 2.9 (Śniatycki [21])**.**

$$H^q(M;\mathcal{S})=\begin{cases}\oplus_{b\in B_{BS}}\left\{s\in\Gamma(L|_{\pi^{-1}(b)})\mid \nabla^L s=0\right\} & q=\frac{\dim_{\mathbb{R}}M}{2}\text{のとき}\\ 0 & q:\text{それ以外}\end{cases}$$

これを踏まえて，量子 *Hilbert* 空間 $Q_{real}(M,\omega)$ を次のように定める．

定義 2.10 (Real quantization)**.**

$$Q_{real}(M,\omega):=\oplus_{b\in B_{BS}}\left\{s\in\Gamma(L|_{\pi^{-1}(b)})\mid \nabla^L s=0\right\}$$

定義より，M がコンパクトならば，$Q_{real}(M,\omega)$ は有限次元で，その次元は BS 点の個数である．

2.4. 量子 Hilbert 空間は偏極の取り方に依存するのか？.

2.4.1. *RR=# BS.* $(L,\nabla)\to(M,\omega)$ を前量子化束付きシンプレクティック多様体とする．(M,ω) に ω と整合的な複素構造 J と Lagrange ファイバー束の構造 $\pi\colon (M,\omega)\to B$ の両方がある場合，Kähler 偏極と実偏極の両方を考えることができる．このとき，これらを用いて得られる量子化の間にどのような関係があるだろうか？これについて，M がコンパクトな場合には，次がよく知られている．

定理 2.11 ([3])**.**

$$\dim\mathcal{Q}_{\mathit{K\ddot{a}hler}}(M,\omega)=\dim Q_{real}(M,\omega)$$

定義 2.12. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) から $\mathbb{R}^n$ への滑らかな写像 $f=(f_1,\dots,f_n)$ で，任意の $i,j=1,\dots,n$ に対して $\{f_i,f_j\}=0$ であり，かつ $d(f_1)_p,\dots,d(f_n)_p$ が 1 次独立であるような点 $p\in M$ 全体の集合が M の稠密開集合であるとき，f を**完全可積分系**とよぶ．

完全可積分系は，特異ファイバーを許容した Lagrange ファイバー束とみなすことができる．完全可積分系についても，トーリック多様体の運動量写像，複素旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系，Riemann 面上の平坦 $SU(2)$ 束のモジュライ上の Goldman 系などの場合に定理 2.11 と同様の結果が知られている [6, 14, 17].

2.4.2. *Kähler* 偏極の極限としての実偏極*.* (M,ω) がトーリック多様体の場合には，シンプレクティックポテンシャルを用いて，M 上に ω と整合的な複素構造の 1 係数族 $\{J^t\}_{t>0}$ を構成することが出来る（cf [12, 11, 1, 2]）．Baier-Florentino-Muorão-Nunes はこの複素構造の 1 係数族 $\{J^t\}_{t>0}$ に対して，次を示した．

定理 2.13 ([5]). 各 $t>0$ に対して $L\to(M,\omega,J^t)$ の正則切断の空間の基底 $\{\sigma^t_m\}_{m\in\mu(M)\cap\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}}$ で次をみたすものが存在する：すなわち，$t\to\infty$ とするとき，各 σ^t_m は $\mu^{-1}(m)$ に台を持つデルタ関数的切断 δ_m に次の意味で収束する．

$$\lim_{t\to\infty}\int_M\left\langle s,\frac{\sigma^t_m}{\|\sigma^t_m\|_{L^1}}\right\rangle_L\frac{\omega^n}{n!}=\int_{\mu^{-1}(m)}\langle s,\delta_m\rangle_L\,d\theta_m\quad(\forall s\in\Gamma(L))$$

この結果は，J_t から定まる Kähler 偏極がトーリック多様体の運動量写像から定まる実偏極に収束することを示している．

同様の結果が，複素旗多様体上の Gelfand-Cetlin 系の場合 [16] や非特異な既約複素代数多様体の場合 [15] にも示されている．

3. 主定理

3.1. **Spin^c 量子化 -Kähler 量子化の一般化.** $(L,\nabla^L)\to(M,\omega)$ を前量子化束付きシンプレクティック多様体とし，J を ω と整合的な M の概複素構造とする．J が可積分でないときは，$T^{0,1}M$ は偏極ではない．しかし，この場合にも Dolbeault 作用素の一般化である Spin^c Dirac 作用素を考えることができる．$W:=\wedge^\bullet T^{0,1}M^*\otimes L$ とおく．W には，ω と J から定まる Riemann 計量に関する Levi-Civita 接続と L の接続 ∇^L から定まる接続がある．これを ∇ とする．また，$c\colon T^*M\to\mathrm{End}(W), u\mapsto\sqrt{-2}\,(u^{0,1}\wedge\bullet-u^{0,1}\llcorner\bullet)$ を Clifford 積とする．このとき，

$$D:=c\circ\nabla\colon\Gamma(W)\to\Gamma(W)$$

を L を係数にもつ Spin^c Dirac 作用素と呼ぶ．D は形式的自己共役な 1 階楕円型微分作用素である．また，(M,ω,J) が Kähler の場合（従って，L が正則で ∇^L が Chern 接続の場合），D は Dolbeault 作用素と定数倍を除いて一致することが知られている．このとき，形式的な差

$$Q_{Spin^c}(M,\omega):=\ker D^0-\ker D^1 \tag{3.1}$$

を **Spin^c 量子化**と呼ぶ．ここで，D^0 と D^1 はそれぞれ，D の次数 0 と次数 1 成分

$$D^0:=D|_{\Gamma(\wedge^{\mathrm{even}}T^{0,1}M^*\otimes L)},\ D^1:=D|_{\Gamma\left(\wedge^{\mathrm{odd}}T^{0,1}M^*\otimes L\right)}$$

とする．M がコンパクトな場合，$Q_{Spin^c}(M,\omega)$ は有限次元であり，その次元は D の指数と一致する．

Spin^c 量子化について，定理 2.11 の一般化である次の結果が得られている．

定理 3.1 ([7]). $(L,\nabla^L)\to(M,\omega)\xrightarrow{\pi}B$ を前量子化束付き *Lagrange* ファイバー束とする．J を ω と整合的な M の概複素構造とする．M がコンパクトとすると，次が成り立つ．

$$\mathrm{ind}\,D=\dim Q_{real}(M,\omega)$$

3.2. **主定理.** 今回，Spin^c 量子化についても，[5] の結果の類似を得たので報告したい．$\pi\colon (M,\omega)\to B$ を Lagrange ファイバー束とし，J を ω と整合的な M の概複素構造とする．$T_\pi M$ を π のファイバーに沿った M の接束とするとき，TM は

$$TM = JT_\pi M \oplus T_\pi M$$

と直和分解される．このとき，$t>0$ に対して，M の概複素構造 J^t を

$$J^t v := \begin{cases} \frac{1}{t}Jv & (v\in T_\pi M \text{ のとき}) \\ tJv & (v \in JT_\pi M \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.2}$$

で定義する．

注 3.2. (1) 各 $t>0$ に対して，J^t も ω と整合的な M の概複素構造である．
(2) J が π のファイバーに沿って不変な場合は，J が可積分であることと全ての $t>0$ について J^t が可積分であることは同値である．
(3) $t\to+\infty$ とすると, J^t と ω から定まる Riemann 計量に関して，$T_\pi M$ 方向は小さくなり，$JT_\pi M$ 方向は大きくなる．

各 $t>0$ に対して, J^t に付随する Spin^c Dirac 作用素を D^t で表す．このとき，次の結果が得られた．ここでは，M はコンパクトとは仮定しない．

定理 3.3 ([22]). $(L,\nabla^L)\to(M,\omega)\xrightarrow{\pi} B$ を前量子化束付き *Lagrange* ファイバー束とし，J を π のファイバーに沿って不変な ω と整合的な M の概複素構造とする．B がアファイン幾何学の意味で完備である（即ち，B の普遍被覆 $\widetilde{B}$ が $\mathbb{R}^n$ と同型）と仮定する．このとき，各 $t>0$ に対して, *Bohr-Sommerfeld* 点で添え字づけられた L の互いに直交する切断の族 $\{\vartheta^t_m\}_{m\in B_{BS}}$ で次を満たすものが存在する：

(1) 任意の $m\in B_{BS}$ に対して，δ_m を $\pi^{-1}(m)$ に台を持つデルタ関数的切断とする．このとき，コンパクトな台をもつ L の任意の切断 $s\in\Gamma_c(L)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\int_M \left\langle s, \frac{\vartheta^t_m}{\|\vartheta^t_m\|_{L^1}}\right\rangle_L \frac{\omega^n}{n!} = \int_{\pi^{-1}(m)} \langle s,\delta_m\rangle_L\,|dy|.$$

が成り立つ．ここで，$|dy|$ は $\pi^{-1}(m)$ 上の自然な体積 *density* である．

(2) $\lim_{t\to\infty}\|D^t\vartheta^t_m\|_{L^2}=0.$

更に，J が可積分ならば，ある技術的な条件の下, $\{\vartheta^t_m\}_{m\in B_{BS}}$ を $L\to(M,\omega,J^t)$ の互いに直交する正則切断の空間の基底にとることができる．

M がコンパクトな場合，定理 3.1 と指数のホモトピー不変性より，$Q_{Spin^c}(M,\omega)$ の次元は t に依らず，Bohr-Sommerfeld 点の個数なので，定理 3.3 は, Spin^c 量子化を近似するベクトル空間の 1 係数族で $Q_{real}(M,\omega)$ に収束するものを構成したとみることができる．

定理 3.3 の系として，次が得られる．

系 3.4. *Lagrange* ファイバー束が $T^n \times T^n$ の第１成分への射影 $p_1 \colon M = T^n \times T^n \to B = T^n$ で J が可積分の場合，$\vartheta_m := \vartheta_m^1$ は，定数倍を除いて，*Jacobi* のテータ関数と一致する．

$$\vartheta_m(x,y) = e^{\pi\sqrt{-1}(-m\cdot\Omega m + x\cdot\Omega x)}\vartheta\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}(-\Omega x + y, \Omega).$$

ここで，詳細は省くが，Ω は J から定まるある行列値関数である．

最後に，定理 3.3 の証明の概要について述べる．B がアファイン幾何学の意味で完備ならば，$(L, \nabla^L) \to (M,\omega) \xrightarrow{\pi} B$ の $\widetilde{B}$ への引き戻しは、例 2.8 と同型になる．特に，$(L, \nabla^L) \to (M,\omega) \xrightarrow{\pi} B$ の Spin^c 量子化を考えることは，例 2.8 の $\pi_1(B)$ 不変な Spin^c 量子化を考えることと同値である．そこで，例 2.8 上の $\pi_1(B)$ 不変な概複素構造の 1 係数族 $\{\widetilde{J}^t\}_{t>0}$ に付随する Spin^c Dirac 作用素 $\widetilde{D}^t$ について，$\widetilde{D}^t s = 0$ の解 s を前量子化束の切断の中で探すと，J が可積分なとき，そのときに限り，非自明な解を持つことが分かる．J が可積分な場合は，s を Lagrange ファイバー束のファイバー方向の座標に関する Fourier 展開することによって，$\widetilde{D}^t s = 0$ の $\pi_1(B)$ 不変な解の基底を具体的に求めることができる．J が可積分でない場合は，$\widetilde{D}^t s = 0$ を，ある意味で，近似する方程式の解として，ϑ_m^t を具体的に求め，条件を満たすことを確かめる．

References

1. M. Abreu, *Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics*, Internat. J. Math. **9** (1998), no. 6, 641–651.
2. ______, *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), Fields Inst. Commun., vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 1–24.
3. J. E. Andersen, *Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations*, Comm. Math. Phys. **183** (1997), no. 2, 401–421.
4. V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., Graduate texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.
5. T. Baier, C. Florentino, J. M. Mourão, and J. P. Nunes, *Toric Kähler metrics seen from infinity, quantization and compact tropical amoebas*, J. Differential Geom. **89** (2011), no. 3, 411–454.
6. V. Danilov, *The geometry of toric varieties (Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2, 85–134, English translation: Russian Math. Surveys 33 (1978), no. 2, 97–154.
7. H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index I*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), no. 1, 1–26.
8. ______, *Torus fibrations and localization of index II*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), no. 3, 585–633.
9. ______, *Torus fibrations and localization of index III*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 3, 665–689.
10. M. D. Grossberg and Y. Karshon, *Equivariant index and the moment map for completely intergrable torus actions*, Adv. Math. **133** (1998), no. 2, 185–223.
11. V. Guillemin, *Kaehler structures on toric varieties*, J. Differential Geom. **40** (1994), no. 2, 285–309.

12. ———, *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, Progress in Mathematics, vol. 122, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
13. V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 515–538.
14. ———, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 1, 106–128.
15. M. Hamilton, M. Harada, and K. Kaveh, *Convergence of polarizations, toric degenerations, and newton-okounkov bodies*, arXiv:1612.08981, 2016.
16. M. D. Hamilton and H. Konno, *Convergence of Kähler to real polarizations on flag manifolds via toric degenerations*, J. Symplectic Geom. **12** (2014), no. 3, 473–509.
17. L. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630.
18. Y. Kamiyama, *The cohomology of spatial polygon spaces with anticanonical sheaf*, Int. J. Appl. Math. **3** (2000), no. 3, 339–343.
19. Y. Karshon and S. Tolman, *The moment map and line bundles over presymplectic toric manifolds*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 3, 465–484.
20. M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans, and equivariant index*, Tohoku Math. J. **51** (1999), no. 2, 237–265.
21. J. Śniatycki, *Geometric quantization and quantum mechanics*, Applied mathematical sciences, vol. 30, Springer-Verlag, New York, 1980.
22. T. Yoshida, *Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization*, arXiv:1904.04076, 2019.
23. ———, *On counting lattice points and Riemann-Roch numbers in Lagrangian fibrations*, Talk at University of Toronto, January 2008.

Department of Mathematics, School of Science and Technology, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki, 214-8571, Japan
Email address: `takahiko@meiji.ac.jp`