Kähler-Einstein 幾何の問題 – 計量の存在と安定性

大阪大学・大学院理学研究科　満渕俊樹
Toshiki Mabuchi
Graduate School of Science
Osaka University

１．Setting-up

(X, L) を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された**偏極代数多様体**とする．即ち L を連結非特異射影代数多様体 X 上の豊富な正則直線束とする．よって L のエルミート計量 h で

$$\omega = c_1(L; h)$$

が Kähler 計量となるものが存在する．X の正則局所座標 $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta, \\
\mathrm{Ric}(\omega) &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log \omega^n = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta, \\
\sigma_\omega &= \sum_{\alpha,\beta} g^{\bar{\beta}\alpha} R_{\alpha\bar{\beta}}, \\
\mathrm{grad}^{\mathbb{C}}_\omega \sigma_\omega &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{\alpha,\beta} g^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial \bar{z}_\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}
\end{aligned}$$

とおく．このとき次の定義を思い起こす：

- ω: Kähler-Einstein $\iff$ $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$.
- ω: CSC Kähler $\iff$ $\sigma_\omega =$ 定数.
- ω: extremal Kähler $\iff$ $\mathrm{grad}^{\mathbb{C}}_\omega \sigma_\omega$ は正則ベクトル場.

偏極代数多様体 (X, L) に対し，既約かつ被約な代数多様体 $\mathcal{X}$ とその上の正則直線束 $\mathcal{L}$ の対 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が (X, L) の**テスト配位**であるとは，$\mathbb{C}^*$-同変な射影射

$$\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1 = \{z \in \mathbb{C}\}$$

が存在して，$1 \in \mathbb{A}^1$ 上のファイバー $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1)$ が $(X, L^{\otimes\gamma})$ と同型になる正整数 γ が存在するときに言う．ここで γ はテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の指数とよばれ，また乗法群 $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{A}^1$ に自然な掛け算として作用するものとする．$m \gg 1$ に対して，次元 $N_m := h^0(X, L^{\otimes m\gamma})$ および $\det H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^{\otimes m})$ への $\mathbb{C}^*$-作用の重み w_m は

$$\begin{aligned} N_m &= a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n \\ w_m &= b_0 m^{n+1} + b_1 m^n + \ \cdots \ + b_n m + b_{n+1} \end{aligned}$$

の形の多項式として書け，テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の **Donaldson-二木不変量** $\mathrm{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を次式で定める：

$$\mathrm{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}.$$

テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は，ファイバー空間 $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1$ が群作用を除き複素解析的に自明であるときに積配位と言い，一方群作用も込めて複素解析的に自明であるときには自明な配位とよぶ．またテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が正規であるとは，$\mathcal{X}$ が正規な代数多様体であるときに言う．安定性では次の定義が良く知られている：

- 偏極代数多様体 (X, L) が **K-多重安定**であるとは，(X, L) のすべての正規なテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して不等式 $\mathrm{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \leq 0$ が成り立ち，しかも等号成立は $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が積配位に限るときに言う．

２．Fano 多様体の場合

この節では偏極代数多様体 (X, L) において $L = K_X^{-1}$ である場合を考える．従って $c_1(X) > 0$ となり X は Fano 多様体となる．よって第１節の ω に対し

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}(\omega) \ = \ \omega + (\sqrt{-1}/2\pi)\partial\bar{\partial} f_\omega, \\ \int_X (1 - e^{f_\omega})\, \omega^n \ = \ 0 \end{cases}$$

を満たす X 上の実数値関数 f_ω が存在する．X が **extremal Kähler Fano 多様体**であるとは，ケーラー類 $c_1(X)$ に属する extremal Kähler 計量が存在するときに言う．一方 $c_1(X)$ に属するケーラー計量 ω に対して，次のように定義する：

- ω: generalized Kähler-Einstein $\iff$ $\mathrm{grad}^{\mathbb{C}}_\omega (1 - e^{f_\omega})$ は正則ベクトル場.

ケーラー多様体 (X, ω) 上の正則ベクトル場の実ハミルトン関数 φ で $\int_X \varphi\omega^n = 0$ を満たすもの全体を $\mathcal{H}$ とし，$\mathrm{pr} : C^\infty(X)_{\mathbb{R}} \to \mathcal{H}$ を自然な直交射影とする．ここで

$$V_X \ := \ \mathrm{grad}^{\mathbb{C}}_\omega \, \mathrm{pr}(1 - e^{f_\omega}) \ = \ \mathrm{grad}^{\mathbb{C}}_\omega \, \mathrm{pr}(\sigma_\omega)$$

はファノ多様体 X の extremal ベクトル場とよばれる正則ベクトル場である．ここで $\beta_X := \max_X \mathrm{pr}(1 - e^{f_\omega})$ とおくと，次の事実が容易に示せる．

事実 1: ファノ多様体 X が generalized Kähler-Einstein 計量 ω をもつと $\mathrm{pr}(1-e^{f_\omega}) = 1 - e^{f_\omega}$ が成り立ち，特に $\beta_X < 1$ を得る．

Fano 多様体の安定性と Kähler-Einstein 計量の存在の同値性についての Tian-Yau-Donaldson 予想の肯定的解決として，次が有名である：

定理（Chen-Donaldson-Sun, Tian）： Fano 多様体 X に対し，次の２条件は同値．
X が Kähler-Einstein 計量をもつ $\iff (X, K_X^{-1})$ は K-多重安定．

Fano 多様体 X の自己同型群の単位元連結成分 $\mathrm{Aut}^0(X)$ 内で考えたとき，V_X の中心化群 G_0 の中心を Z とする．このとき generalized Kähler-Einstein 計量の存在については，次の定理が知られている：

定理 (Hisamoto)： 次の２つの条件が満たされれば，ファノ多様体 X 上に generalized Kähler-Einstein 計量が存在する：

- 松島タイプの障害が消える，すなわち代数群 G_0 は reductive である．
- (X, L) は "uniformly Ding stable" relative to Z である．

Fano 多様体における extremal Kähler 計量の存在と generalized-Kähler-Einstein 計量の存在については，次のような諸事実が知られている：

事実 2: Fano 多様体 X が generalized Kähler-Einstein 計量をもつならば，X は extremal Kähler Fano 多様体である．

事実 3 (Nakamura, Nitta-Saito): Extremal Kähler Fano 多様体であるにもかかわらず generalized Kähler-Einstein 計量をもたないようなものが存在する．

Kähler-Einstein 計量 ω_0 をもつような Fano 多様体 N 上の正則直線束 L がエルミート計量 h をもち，$\mathrm{Ric}(h)$ の ω_0 に関するすべての固有値が定数であったとする．さらに $X := \mathbb{P}(\mathcal{O}_N \oplus L)$ が Fano 多様体であったとする．このとき次が成り立つ．

事実 4 ([3]): もし $\mathrm{Aut}^0(N)$ が semisimple なら（もちろんこれは $\mathrm{Aut}^0(N)$ が trivial であるときも含む），次の２条件は同値：
X が generalized Kähler-Einstein 計量をもつ $\iff \beta_X < 1$.

問題 1 **: 一般の extremal Kähler Fano 多様体 X に対し，generalized Kähler-Einstein 計量をもち得るような X すべてを簡単な条件で特徴付けよ．

問題 2 *: 上の事実 4 で，$\mathrm{Aut}^0(N)$ の semisimplicity の条件を削ることは可能か？

3．CSC Kähler 計量と extremal Kähler 計量

偏極代数多様体 (X, L) に対して，$\mathrm{Aut}^0(X)$ における extremal ベクトル場 V_X の中心化群を G_0 とする．このとき CSC Kähler の場合の Chen-Cheng の結果を extremal Kähler の場合に一般化した次の He の結果に注意する：

定理 ([1])：$\exists$ extremal Kähler 計量 in $c_1(L)$ と次は同値：
(X, L) の modified K-energy は (J-functional に関し) proper modulo the G_0-action.

問題 3 ***（Yau-Tian-Donaldson 予想の extremal Kähler 版）：偏極代数多様体に対し extremal Kähler 計量が存在するための（必要かつ十分な）安定性条件を与えよ．

たとえば CSC Kähler 計量の場合は，Li [2] の結果や Paul [4] の結果がある．そこで次のような問題も大切である：

問題 4 ***（Yau-Tian-Donaldson 予想の CSC Kähler 版）： CSC Kähler 計量の存在について，Li [2] の結果や Paul [4] の結果をより詳しく研究せよ．

(X, L) を偏極代数多様体とする．G を $\mathrm{Aut}^0(X)$ の極大連結線形代数群とする．G は Chevalley 分解により，簡約代数群 S とユニポテント群 U が存在して半直積

$$G = S \ltimes U$$

の形に書ける．Z を S の中心とし，S の極大代数的トーラス T をひとつ固定する．もちろん Z は T の部分群となる．Extremal Kähler 計量の存在に関連する (X, L) の安定性概念としては，代数的トーラス Z や T に関する

K-相対安定性，強 K-相対安定性，一様 K-相対安定性

などが考えられる．偏極代数多様体 (X, L) に対して，次の諸条件を考える：

(1) $\exists$ extremal Kähler 計量 in $c_1(L)$

(2) (X, L): T に関して強 K-相対安定

(3) (X, L): T に関して一様 K-相対安定

(4) (X,L): T に関して K-相対安定

(5) (X,L): T に関して漸近 Chow 相対安定

(6) (X,L): Z に関して強 K-相対安定

(7) (X,L): Z に関して一様 K-相対安定

このとき，次が知られている：

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4), \qquad (2) \Rightarrow (5)$$

ただし (1) ⇒ (2) は folklore できちんとした証明を与えておく必要がある．また次のような予想が考えられる：

予想 5 ***： $(3) \Rightarrow (1)$

予想 6 **： $(2) \Leftrightarrow (6)$

予想 7 **： $(3) \Leftrightarrow (7)$

References

[1] He, W.: *On Calabi's extremal metrics and properness*, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), 5595–5619

[2] Li, C.: *Geodesic rays and stability in the cscK problem*, arXiv (math.DG): 2001.01366 (2021)

[3] Mabuchi, T.: *Test Configurations, stabilities and canonical Kähler metrics – Complex geometry by the energy method*, SpringerBriefs in Mathematics (2021)

[4] Paul, S.T.: *Mahler measures, stable pairs, and the global coercive estimate for the Mabuchi functional*, arXiv (math.DG): 2105.01240 (2021)