有理点，数論的力学系の問題

日本大学理工学部 安福 悠 *
Yu Yasufuku
Department of Mathematics
College of Science and Technology, Nihon University

本稿では，代数多様体の有理点の問題と，数論的力学系の問題を述べる．この 2 つのテーマの間にも関連があるのだが，テーマごとに節を分けて述べていく．どちらのテーマも，関数体上，有限体などの正標数の体上などの問題もよく考えられるのだが，ここでは主に，k を代数体として，k 上定義される代数多様体における，k 有理点や，k 上定義される有理写像による力学系の問題に焦点を当てる．

1　有理点の問題

1.1　定性的な問題

X が k 上のスキームのとき，k 有理点とは，$\operatorname{Spec} k \longrightarrow X$ のことで，k 有理点の集合のことを $X(k)$ と表す．X が $\mathbb{P}_k^N$ の部分多様体 (quasi-affine も含む) のときは，

$$X(k) = \{[a_0 : \cdots : a_N] \in X : 任意の\ 0 \leq i, j \leq N\ で\ a_i/a_j \in k\}$$

である．

例えば，$X_1 = (x^2 + y^2 - 1 = 0)$ とすると，$X_1(\mathbb{Q})$ には，$(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), \ldots$ が含まれ，ピタゴラスの 3 つ組ごとに有理点を作れるので無限集合である．一方，$X_2 = (x^2 + y^2 - 3 = 0)$ とすると，$X_2(\mathbb{Q})$ は空集合である．もし，$(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ が X_2 の $\mathbb{Q}$ 有理点ならば，$(p/r)^2 + (q/r)^2 = 3$ を満たすので，$p^2 + q^2 = 3r^2$ となるが，左辺が 3 の倍数となるのは $p \equiv q \equiv 0 \pmod 3$ のみで，このときは，r も 3 の倍数となって既約分数表示に矛盾するからである．

ただ，X_1 も X_2 も幾何学的には円，つまり $\mathbb{P}^1$ に同型であり，実際，X_2 にも $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 有理点は無限個 (特に Zariski 稠密に) ある．そこで，代数体に依存して大きく変わることがないような，有理点の特徴に注目していく．この上で便利なのが次の概念である．

* yasufuku@math.cst.nihon-u.ac.jp

定義 1. 代数多様体 X が potentially dense な有理点を持つとは，ある代数体 k が存在して，$X(k)$ の Zariski 閉包が X となることである．

1 次元の場合は，次の有名な定理がある (種数が 2 以上の場合が Faltings の定理)．

定理 1. C を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される滑らかな射影代数曲線とする．このとき，C の種数 $g(C)$ が 1 以下のとき有理点は potentially dense で，2 以上のときは，どんな代数体 k に対しても $C(k)$ は有限集合である．

種数が 2 以上であることは，$C(\mathbb{C})$ が Brody 双曲的であること，そして小林双曲的であることとも同値である．したがって，曲線の場合は，幾何学的情報，あるいは複素解析的な情報が有理点の豊富さを完全決定する．そこで：

問題 1 (***)**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数多様体とする．このとき，任意の代数体 k に対して，$X(k)$ が有限であるような (あるいは Zariski 非稠密であるような，つまり potentially dense でないような) 幾何学的，あるいは解析的十分条件を見つけよ．理想的には，必要条件でもあって欲しい．

曲線 C が $g(C) \geq 2$ を満たすことと，C の標準因子 K_C が big であることは同値なので，この問題の具体化として，次が自然となる．

問題 2 (***; $\dim X = 2$ のときは Bombieri 予想，一般には Lang 予想)**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影代数多様体とする．このとき，もし X の標準因子 K_X が big ならば (つまり X が一般型ならば)，任意の代数体 k に対して，$X(k)$ は Zariski 非稠密である．

この予想は，Nevanlinna 理論の次の有名な予想 (を少し弱めたもの) の数論版でもある．

問題 3 (***, Green–Griffiths 予想)**.** X が一般型ならば，Zariski 閉な $Y \subsetneq X$ が存在し，正則曲線 $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ の像は必ず Y の部分集合となる．

これらの問題は，曲面に制限してもおそらく十分に難しく，実は次がすでに未解決である．

問題 4 (** or ***)**.** $\mathbb{Q}$ 上定義できる一般型曲面 X で，$X(k)$ がどの代数体 k でも Zariski 非稠密となるような “非自明” な例を 1 つ見つけよ．

ここで，“自明な” 例とは，アーベル多様体の部分多様体の場合や，種数が 2 以上の曲線上の fibration となっている場合がある．

一方，逆に，有理点が potentially dense となる条件については，次の予想 [4] がある (ここでは orbifold の定義は割愛する)．

問題 5 (***, Campana 予想)**.** X が，一般型の orbifold への fibration を持たないならば，X の有理点は potentially dense である．

2 次元の場合は，次の具体的な問題が考えられる．

問題 6 (*** or **)**.** $\mathbb{Q}$ 上定義される K3 曲面 X で，幾何学的 Picard ランクが 1 で，かつ X の有理点が potentially dense であるようなものを 1 つ構築せよ．

K3 曲面 X が elliptic pencil を持つときや，自己同型群が無限集合のときは，Bogomolov–Tschinkel [2] が potential density を示しているが，これらの場合幾何学的 Picard ランクは 1 にならない．

1.2 定量的な問題

ここまでは，Zariski 稠密になるか，非稠密になるか，といういわば定性的な問題を扱ってきた．より定量的に，有理点がどのような式を満たすのかを調べることも可能である．このためには，高さ関数や局所高さ関数を準備する必要がある．高さに関しては，[3, 15, 19] などが詳しいので，ここでは概要だけ述べる．大域高さ関数 $h(D,-) : X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ とは，X 上の Cartier 因子 D ごとに定義できる関数で，D を線形同値で動かしても有界関数のズレしか生じない，幾何学的なふるまいをする関数である．大域高さ関数は，Nevanlinna 理論の特性関数の数論版類似である．斉 d 次多項式 F で定義される，$\mathbb{P}^N$ 上の因子 $D = (F = 0)$ の場合は，$P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ に対し，$P = [a_0 : \cdots : a_N]$ となる整数 a_i で $\gcd(a_0, \ldots, a_N) = 1$ を満たすものを選べば，

$$h(D,P) = d \log \max_i |a_i|$$

である．

一方，局所高さ関数は，素点 (代数体 k の非自明絶対値の同値類) ごとに定まるもので，幾何学的ではなく数論的にふるまうものである．v を素点としたとき，局所高さ関数 $\lambda_v(D,-) : X(k) \setminus |D| \longrightarrow \mathbb{R}$ は，P が D に v 進絶対値で近いほど大きな値を持つような関数で，$|D|$ で対数的な極を持つものである．局所高さ関数の Nevanlinna 理論における類似は少しややこしく，S を素点の有限集合としたとき，

$$\sum_{v \in S} \lambda_v(D,P) \quad \longleftrightarrow \text{接近関数 } m_D(r,f)$$
$$\sum_{v \notin S} \lambda_v(D,P) \quad \longleftrightarrow \text{個数関数 } N_D(r,f)$$

が対応となる．$X = \mathbb{P}^N$ で，斉 d 次多項式 F が定義する因子 $D = (F = 0)$ の場合，$P = [a_0 : \cdots : a_N] \in (\mathbb{P}^N \setminus |D|)(\mathbb{Q})$ の局所高さは

$$\lambda_v(D,P) = \log \frac{(\max_i |a_i|_v)^d}{|F(a_0, \ldots, a_N)|_v}$$

で与えられる．

有理点の定量的な分析の代表的なものが次の Vojta 予想 [43, Conjecture 3.4.3] である．

問題 7 (***, Vojta 主予想)．X を k 上定義された滑らかな射影代数多様体とし，D を被約な正規交叉因子，K を標準因子，A を豊富な因子とする．S を代数体 k の素点の有限集合とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して，Zariski 閉な $Z_\epsilon \neq X$ が存在し，

$$\sum_{v\in S} \lambda_v(D,P) + h(K,P) < \epsilon h(A,P)$$

が全ての $P \in X(k) \setminus Z_\epsilon$ で成立する．

P が D に近いほど局所高さは大きくなるので，この予想は，「例外集合 Z_ϵ 以外では，K に負がある分だけ P が D に近づける」と解釈できる．

Vojta 予想に登場する大域高さ関数や局所高さ関数を，対応する Nevanlinna 理論の概念に置き換えると，値分布理論の Griffiths 予想となる．元々，Vojta は，Griffiths 予想の数論版として，この予想を提唱し出した．Vojta 予想は，曲線の場合には解決しており (種数が 0 のときは Roth の定理，種数 1 のときは楕円曲線の整数点に関する Siegel の定理，そして種数が 2 以上のときは定理 1 と同値)，また，アーベル多様体の場合も Faltings の定理により解決している．その他は，次に述べる射影空間の場合を除くと殆ど何もわかっていない状況で，ディオファントス幾何の最も深遠な予想の 1 つである (ちなみに Griffiths 予想の方も，同じ位未解決である)．

射影空間 $\mathbb{P}^N$ の場合は，標準因子は，超平面 H の $-(N+1)$ 倍となるので，Vojta 予想の不等式は単に

$$\sum_{v\in S} \lambda_v(D,P) < (N+1+\epsilon)h(H,P)$$

となる．D が超平面だけから構成されている場合は，次の定理で Vojta 予想が解決されている．

定理 2 (Schmidt の部分空間定理)．$X = \mathbb{P}^N$，D が一般の位置の超平面の和集合のとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し，

$$\{P \in \mathbb{P}^N(k) : \sum_{v\in S} \lambda_v(D,P) \geq (N+1+\epsilon)h(H,P)\}$$

は，超平面の有限和集合に含まれる．

この定理は，値分布理論の Cartan の定理に対応する．例外集合が単に Zariski 閉な真部分集合というだけでなく，超平面の和集合だと言えるので，この場合の Vojta 予想よりも強い．なお，その後の研究により，例外集合の超平面の個数に関しては，計算実効的であることが分かっているが，各超平面の定義式の係数は，$N=1$ の Roth の定理の場合も含め，計算実効的だとはまだ知られていない．それでは，超平面以外の因子だとどうなるのだろうか？

問題 8 (**)．$X = \mathbb{P}^N$ とし，D_i を幾何学的既約な超曲面で一般の位置にあるとする．このとき，次の条件を満たす係数 c_i を見つけよ： 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある Zariski 閉な $Z_\epsilon \neq \mathbb{P}^N$ が存在して，

$$\sum_{v\in S}\sum_{i=1}^{\ell} c_i \lambda_v(D_i,P) < (N+1+\epsilon)h(H,P)$$

が全ての $P \in (\mathbb{P}^N \setminus Z_\epsilon)(k)$ で成り立つ．

$c_i = 1$ で成り立つと主張するのが Vojta 予想である (ただ，「一般の位置」よりは強い条件である「正規交叉」という条件下)．一方，Evertse–Ferretti [10] により，$c_i = \frac{1}{\deg D_i}$ と取れることは証明されている．具体的な D_i のときに，この中間の c_i を適切に取れるかどうかは自然な問題である．例えば，

問題 9 (**)**.** $X = \mathbb{P}^2$，D_1, D_2 を 2 直線，D_3 を既約 2 次曲線とし，$D = D_1 + D_2 + D_3$ が正規交叉しているとする．H を超平面としたとき，

(a) $(\mathbb{P}^2 \setminus |D|)(k)$ が Zariski 非稠密であることを示せ．

(b) 次の条件を満たす係数 $\frac{1}{2} < c_3 \le 1$ を見つけよ： 任意の $\epsilon > 0$ に対して，Z_ϵ が存在し，任意の $P \in (\mathbb{P}^2 \setminus Z_\epsilon)(k)$ で

$$\sum_{v \in S} \Bigl(\lambda_v(D_1, P) + \lambda_v(D_2, P) + c_3 \lambda_v(D_3, P) \Bigr) < (3 + \epsilon) h(H, P).$$

(c) Vojta 予想を証明せよ．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して，Z_ϵ が存在し，任意の $P \in (\mathbb{P}^2 \setminus Z_\epsilon)(k)$ で

$$\sum_{v \in S} \lambda_v(D, P) < (3 + \epsilon) h(H, P).$$

この問題の (a) の Nevanlinna 理論類似は Noguchi–Winkelmann–Yamanoi [36] で解決しており ($\mathbb{P}^N$ 上の同様の設定でも成り立つ)，関数体上では (c) まで Corvaja–Zannier [8] により解決している．

最近，McKinnon–Roth [33] は Seshadri 定数とディオファントス近似の関連を調べた．また，Ru–Vojta [38] は代数多様体を色々な射影空間に埋め込んで因子を線形化した上で Schmidt の部分空間定理を何度も用いる方法のうち，強力な結果が出る方法を提案し，それに関連し次の β 不変量

$$\beta(L, D) = \liminf_{N \to \infty} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} h^0(V, \mathcal{O}(NL - mD))}{N \cdot h^0(V, \mathcal{O}(NL))}$$

を導入した (L と D は因子)．どちらも似たような結果 (ただ完全に同じというわけでもなく，仮定などの条件が微妙に異なる) なので，ここでは，Ru–Vojta に沿う．

定理 3 (Ru–Vojta)**.** X を射影代数多様体とし，$D_1, \ldots, D_q$ を Cartier 因子で交叉が proper (各点における局所環で，D_i の定義式が regular sequence となっている) とする．このとき，L が big な因子で ϵ が正ならば，Zariski 閉な Z_ϵ が存在し，

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{v \in S} \beta(L, D_i) \lambda_v(D_i, P) \le (1 + \epsilon) h(L, P)$$

が $P \in (X \setminus Z_\epsilon)(k)$ で成立する．

nef 因子に関しての漸近的なリーマンロッホの定理を使えば，h^0 は交叉数の計算で求められるので，交叉数が近似を制御するという主張である．

問題 10 (*)**.** K3 曲面，$\mathbb{P}^N$ やアーベル多様体のブローアップ，fibration などの具体例において，$\beta(L, D_i)$ の計算をし，Ru–Vojta の定理を用いることで，有理点の近似に関する新しい結果を得よ．

問題 11 (* or **)**.** 「交叉が proper である」という Ru—Vojta の定理における仮定を弱めて，同じような主張を証明せよ．

Heier–Levin [14] は，McKinnon–Roth の証明をかなり単純化したので，これと Ru–Vojta の方法を融合するのが有望である．

1.3 整数点の問題

これまでも見てきた通り，有理点全体の分析は難しいことが多いので，その部分集合に制限して分析を試みることは自然な問題で，特に整数点集合は大事な対象である．

定義 2. X を代数体 k 上定義される射影代数多様体，D を因子，S を素点の有限集合としたとき，(D, S) 整数の集合とは，ある定数 C を用いて

$$\{P \in X(k) : \sum_{v \notin S} \lambda_v(D, P) \leq C\}$$

と書ける集合のことである．

C によって多少変動する集合ではあるものの，本質的な差は生まれないので，記号の乱用ではあるが，(D, S) 整数点のことを $(X \setminus D)(R_S)$ と表記する．$\mathbb{A}^N$ を $(\mathbb{P}^N \setminus (X_0 = 0))$ と捉えると，$\mathbb{A}^N(R_S)$ の点は，$[1 : a_1 : \cdots : a_N]$ の形の点のうち a_i が R_S の元 (S 整数)，つまり S の外にある非アルキメデス素点 v に関しては $|a_i|_v \leq 1$ となっている (すなわち，v に対応する素イデアルが分母にない) ものなので，「整数点」という言葉が使われる．整数点の概念は，Nevanlinna 理論の正則曲線 $\mathbb{C} \longrightarrow X \backslash |D|$ に対応する．

P が $(X \setminus D)(R_S)$ の元のとき，$h(D, P) \geq \sum_{v \in S} \lambda_v(D, P) \geq h(D, P) - C$ なので，「大域高さ」という幾何学的に制御しやすいもので「局所高さ」という極めて数論的なものを抑えられることになり，整数点問題の方が易しくなることを期待できる．例えば，定性的問題では，Bombieri–Lang 予想 (問題 2) の整数点版が次のようになる．

問題 12 (***; Lang–Vojta 予想)**.** X を代数体 k 上定義される滑らかな射影代数多様体とし，K_X を標準因子とする．もし $K_X + D$ が big ならば (つまり $X \setminus D$ が対数的一般型ならば)，$(X \setminus D)(R_S)$ は Zariski 非稠密である．

定量的問題では，Vojta 主予想 (問題 7) の整数点版が次のようになる．

問題 13 (***)**.** 問題 7 と同じ設定で，$h(K+D,P) < \epsilon h(A,P)$ が全ての $P \in (X \setminus D)(R_S) \setminus Z_\epsilon$ で成立する．

整数版にすると直ちに簡単になるわけでもないと思われるが，ただ，より取り組みやすい問題は増えるかもしれない．例えば，2 次元では，次のような問題が考えられる．

問題 14 (**)**.** D_i を $\mathbb{P}^2$ 内の曲線とする．このとき，$(\mathbb{P}^2 \setminus \sum D_i)(R_S)$ が必ず Zariski 非稠密となるような，交叉数 $D_i \cdot D_j$ などに関する条件を見つけよ．

これに関しては，例えば，次のような結果がすでに知られている．

定理 4 (Corvaja–Zannier [6])**.** $D_1, \ldots, D_q$ が $\mathbb{P}^2$ の曲線で，どの 3 つにも共通部分はないとする．もし，自然数 p_i と c が存在して
(i) $r \geq 4$，$p_i p_j D_i \cdot D_j = c$ が $i \neq j$ で成り立つ，あるいは
(ii) $r \geq 5$，$D_i^2 = 0$ がある i で成り立ち，任意の $j \neq i$ で $p_i p_j D_i \cdot D_j = c$ が成り立つ
とき，$(X \setminus \sum D_i)(R_S)$ は Zariski 非稠密である．

Fibration の場合は

問題 15 (**)**.** X を曲面とし，曲線への fibration $\phi : X \longrightarrow C$ を持つとする．D を X の因子としたとき，$(X \setminus D)(R_S)$ が Zariski 非稠密になる (逆に potentially dense になる) 十分条件を決定せよ．

この問題に関しては，アフィン代数幾何の構造定理や，ディオファントス近似，特に単数方程式の理論や abc 予想を用いることで，次が証明されている．

定理 5 (Levin–Yasufuku [23])**.** Λ を平面曲線束とし，D を平面曲線 (既約とは限らない) とする．また，(既約とも被約とも限らない) 平面曲線 C に対して，C の既約成分のうち D には含まれないものの重複度の下限を $m_D(C)$ とする (特に C の既約成分が全て D に含まれるときは ∞ である)．もし

$$\sum_{C \in \Lambda} \left(1 - \frac{1}{m_D(C)}\right)$$

が 2 を超えるならば，abc 予想より $(\mathbb{P}^2 \setminus D)(R_S)$ の Zariski 非稠密性を導ける．さらに，もし D の特異点が尖点のみで，$(\mathbb{P}^2 \setminus D)$ の対数的小平次元が 1 で，$(\mathbb{P}^2 \setminus D)(R_S)$ が potentially dense ならば，D は，明示的に与えられる 5 つの族のどれかと射影同値となる．

問題 16 (* or **)**.**
(i) これらの 5 つの族において，整数点が実際に potentially dense かどうか決定せよ．
(ii) D が既約で丁度 1 つの特異点を持ち，それが尖点ではないとき，$\mathbb{P}^2 \setminus D$ の整数点は Zariski 非稠密なのだろうか？

(i) については，体系だった手法が現在なく，素数の分布に関する性質が成り立つかどうかや，よい性質を持った水平切断を構築できるかなどで証明できるかが決まっているのが現状である．(ii) に関しては，この場合のアフィン代数幾何の構造定理がないので，([23] と同じような手法で解決を試みるならば) まずは構造定理を証明するところから始めることになる．

1.4　ブローアップと最大公約数の問題

$\pi : X' \longrightarrow X$ がブローアップ写像のとき，X' 上の豊富な因子は，$\pi^*(A) - cE$ の形となる (A は X 上の豊富な因子，c は正定数)．したがって，Vojta 予想 (問題 7) の不等式は

$$\sum_{v \in S} \lambda_v(D, P) + h(K, P) < \epsilon h(A, \pi(P)) - \epsilon c h(E, P)$$

となるので，移項すると，$h(E, -)$ の上界を得ることができる．一方，高さ関数の定義から，例外因子に対する高さ関数は，ブローアップのセンターの局所定義式の最大公約数となることが分かるので，Vojta 予想をブローアップ上で用いることで，最大公約数の上界が得られる．次の問題で掲げる最大公約数の不等式は，Vojta 予想を仮定した上で Silverman [41] が得た結果である．

問題 17 (**)**.** McKinnon–Roth，Ru–Vojta，Heier–Levin の手法，あるいはその他の手法を用いて，非自明な最大公約数の上界を与える不等式を証明せよ．特に：

(i) E_i を楕円曲線としたときの，$E_1 \times E_2$ のブローアップを考えることで，$P_i \in E_i(\mathbb{Q})$ に対し，

$$\mathrm{GCD}(\mathrm{denom}(P_1), \mathrm{denom}(P_2)) < \exp(h(P_1) + h(P_2))^{\epsilon}$$

が成り立つこと．

(ii) $\mathbb{P}^2$ を $[1:1:1]$ でブローアップし，D を $(XYZ = 0)$ の引き戻しとしたときを考えることで，$u, v \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\mathrm{GCD}(u-1, v-1) < \max(|u|, |v|)^{\epsilon} |uv|'_S$$

が成り立つこと (ここで，$|x|'_S$ とは，x の素因数分解のうち S の外の素数で構成される部分のこと)．

(i) に関しては，McKinnon [32] による先行研究があるが，$E_1 = E_2$ かつ $\mathrm{rk}\, E_1 = 1$，というかなり特殊な場合のみ扱われている．(ii) に関しては，u, v が S 単数 (つまり，S の外の非アルキメデス素点の絶対値では $|u| = |v| = 1$) のときに，Corvaja–Zannier [7] により証明されており，これは Levin [22] により高次元化もされている．また，この Levin による $\mathbb{G}_m^N$ 上での結果を，Cohen–Macaulay 多様体へと Wang–Yasufuku [44] で拡張しているが，まだまだ特別な場合でしか解決されていないのが現状である．

1.5　その他の有理点の問題

本稿では「無限か有限か」「Zariski 稠密か非稠密か」のような議論しかしてこなかったが，無限の場合「どのくらい無限か」というのを考えることもできる．例えば，$\mathbb{P}^1$ も楕円曲線もどちらも potentially dense な有理点を持つが，勿論，$\mathbb{P}^1$ の方が有理点の量は多い．これを正確に予想するのが Manin 予想である．次で述べる Fano 多様体以外でも予想されているが，ここでは主張が一番簡単になる Fano 多様体の場合だけ述べる．

問題 18 (***, Manin 予想)**.** X を Fano 多様体とし，ρ を Néron–Severi ランクとする．このとき，Zariski 開な U と定数 c が存在し，

$$\#\{P \in U(k) : \exp\big(h(-K_X, P)\big) \leq B\} \sim cB(\log B)^{\rho-1}.$$

また，c には玉河数による予測値もある．

逆に，有限の場合をさらに精密にして，代数体や多様体を動かした時に「有限性が一様かどうか」を問うこともできる．

問題 19 (***)**.** 代数体 k を固定 (あるいはより強力に，拡大次数 $[k:\mathbb{Q}]$ だけを固定) し，整数 $g \geq 2$ を固定する．このとき，次を満たす定数 B は存在するのだろうか： k 上定義される滑らかな射影代数曲線 C が種数 g を持つならば，$\#C(k) \leq B$ が成り立つ．

Caporaso–Harris–Mazur [5] は，Bombieri–Lang 予想 (問題 2) を曲線のモジュライのファイバー積上で用いることで，定数 B が存在することを (計算実効的ではないが) 証明した (2020 年に修正・拡張されている)．ただ，Bombieri–Lang 予想の仮定には線束 (つまり 1 次元) に関する情報しかないので，高い次元を持つ代数多様体の有理点を本当に制御できるのか疑義もあり，B が存在すると信じる人が多いか信じない人が多いか，微妙なところである．最近の Dimitrov–Gao–Habegger [9] と Kühne [18] の結果により，C のヤコビアンの有理点のランクに依存させる B では，無条件で証明できる．

問題 20 (* or **)**.** 問題 19 を，1 次元の族 (例えば超楕円曲線の族) の場合に考察せよ．B を計算実効的に求められるだろうか？

2　数論的力学系の問題

力学系とは，宇宙における天体の移動の漸近的性質を調べることから始まった分野である．これを離散時間，つまりある自己写像 $\phi : X \longrightarrow X$ の多重合成を調べることにした研究は，100 年ほど前から，主に複素数上で Julia や Fatou などを中心に始められた．n 重合成のことを $\phi^{\circ n}$ と書く

ことにすると，力学系において重要なのは, 点 P の軌道

$$\mathcal{O}_\phi(P) = \{P, \phi(P), \phi(\phi(P)), \phi^{\circ 3}(P), \dots, \},$$

つまり，P が ϕ によって次々どのような点に移っていくかの記録である．

軌道は

$$P \xrightarrow{\phi} \phi(P) \xrightarrow{\phi} \phi^{\circ 2}(P) \xrightarrow{\phi} \phi^{\circ 3}(P) \xrightarrow{\phi} \cdots$$

アーベル多様体内の，P が生成する部分群は

$$O \xrightarrow{+P} P \xrightarrow{+P} 2P \xrightarrow{+P} 3P \xrightarrow{+P} \cdots$$

なので，形式的な類似がある．Mordell–Weil の定理より，アーベル多様体 A と代数体 k が与えられたら，$A(k)$ は有限生成であるので，より厳密には,

「代数体上のアーベル多様体」の力学系類似：

互いに可換な写像 $\phi_1, \dots, \phi_\ell : X \longrightarrow X$ による軌道

$= \{\phi_1^{\circ n_1} \circ \cdots \phi_\ell^{\circ n_\ell}(P) : n_1, \dots, n_\ell \geq 0\}$

「代数体上のアーベル多様体のランク 1 部分」の力学系類似：

$\phi : X \longrightarrow X$ による軌道

である．

これを踏まえて，本稿での「数論的力学系」とは，代数体 k 上定義された射影代数多様体 X の，k 上定義される自己有理写像が作る力学系を指すものとする．有限体上の力学系，関数体上の力学系，$\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{C}_p(= \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ 上の力学系なども「数論的」力学系と呼ばれてよいはずだが，上の類似が自然に成り立つ設定ということで，代数体に制限する．ただ，X はアーベル多様体である必要はなく，(興味深い) 自己写像を持つことが重要である．アーベル多様体ではないのに，軌道に制限すればアーベル多様体のように振る舞うかもしれない，と上の類似が期待させてくれるわけである．

問題 21 (* or ** or ***)．代数体上のアーベル多様体における定理や予想の，数論的力学系版 (1 つの写像，あるいは互いに可換な有限個の写像) を証明するか，反例を挙げよ．

この問題はあまりに具体性に乏しいので，より具体的な類似を示していく．安直な数論的力学系類似には，くだらない反例が得てして見つかるものの，その反例を除くような仮定を設けると，良い問題，あるいは難しい問題になることが多い．アーベル多様体と数論的力学系の関連については，[48, 49] もご参照頂きたい．

2.1 (前) 周期点の一様有界性の問題

まず最初に，アーベル多様体上の次の予想を紹介する．

問題 22 (ねじれ群の一様有界性)**.** k を代数体とし，g を自然数とする．このとき，定数 $C(k,g)$ が存在し，k 上定義される g 次元アーベル多様体 A は，次を満たす：

$$\#\{P \in A(k) :\ \text{ある整数}\ n \geq 1\ \text{に対し}\ nP = O\} \leq C(k,g).$$

A を固定すれば，ねじれ群が有限集合であることは (例えば，ねじれ元が標準高さ 0 であることを用いて) すぐ分かるが，A を動かしているのがポイントで，その意味では，問題 19 にも似ている．$g=1$ の場合，つまり楕円曲線の場合は，Mazur [31] ($k=\mathbb{Q}$) と Merel [34] (k は一般) の定理であるが，それ以外の場合では知られていない．

アーベル多様体においては，ある自然数 n に対して $nP=O$ が成り立つことと，$0 \leq m < m'$ を満たす自然数 m, m' が存在して $mP = m'P$ が成り立つことは同値である．一方力学系類似は，2 つに分かれる：

- ある自然数 n に対して $\phi^{\circ n}(P)(=\phi^{\circ 0}(P)) = P$
- $0 \leq m < m'$ を満たす自然数 m, m' が存在して $\phi^{\circ m}(P) = \phi^{\circ m'}(P)$

上の条件を満たす点 P を ϕ の周期点といい，下の条件を満たす点 P を ϕ の前周期点という．そこで，問題 22 に対応する力学系類似も 2 種類作れ，Morton–Silverman 予想 [35] と呼ばれる．

問題 23 (*** (前) 周期点の一様有界性)**.** 定数 $C(k,N,d)$ が存在し，代数体 k 上定義される次数 $d \geq 2$ の射 $\phi : \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ に対し，

$$\#\{P \in \mathbb{P}^N(k) : P\ \text{が}\ \phi\ \text{の (前) 周期点}\ \} \leq C(k,N,d).$$

アーベル多様体のときと同様，1 つの ϕ に対しては，ϕ に対する標準高さを用いることで，前周期点の有限性を示せる (Northcott の定理)．また，d も動かしてしまうと，$\phi_d(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-d)+x$ の周期点 (実際には固定点) に $x = 1,\ldots,d$ があり，一様性が言えない．

1 変数多項式の場合は，$d \geq 5$ のときには abc 予想を，$d \leq 4$ のときは abc 予想の高次元版を用いて，Looper [24, 25] がこの問題を解決している．

また，2 次多項式は座標変換で $\phi_c(x) = x^2 + c$ と書け，1 つの前周期条件 $\phi_c^{\circ m}(x) = \phi_c^{\circ m'}(x)$ は (c,x) の多項式となるので，平面曲線となる．m, m' を大きくすると，この曲線の次数は上がり，特異点が余程特殊にならない限り種数も上がる．そこで，Chabauty–Coleman の方法などを使うことで，このような曲線に $\mathbb{Q}$ 有理点が 1 つもないと (運よく) 示せれば，このような前周期の構造が，有理数上の 2 次多項式で起きないと示せる．Flynn–Poonen–Schaefer [12] は，有理数係数 2 次多項式が周期 5 の有理点を持たないことを示した．また，少し違った方向としては，ϕ_c が周期 6 以上の $\mathbb{Q}$ 周期点を持たないならば，ϕ_c の $\mathbb{Q}$ 前周期点の総数は 9 以下だと Poonen [37] により示されている．

この議論は 2 次多項式に限らず，写像の 1 次元族 (例えば，臨界点が 1 つの多項式の族) に使え，

また前周期の条件だけでなく，次のようなサイクル構造の条件にも使える：

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \\ \bullet \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

問題 24 (* or **)**.** 写像の 1 次元族 $\{\psi_t\}_t$ と，サイクル構造の具体例を見つけて，どの ψ_t も有理数上でこのサイクル構造を持たないことを示せ.

2.2　軌道の整数点の問題

代数体上のアーベル多様体に関しては，次の有名な定理がある.

定理 6 (Faltings [11])**.** A を代数体 k 上定義されたアーベル多様体とし，L を豊富な因子とする．このとき，$(A \setminus L)(R_S)$ は有限集合である.

この数論的力学系版を考えると，X を代数体 k 上の代数多様体，L を豊富な因子，$\phi : X \longrightarrow X$ を k 上定義される射としたとき，

$$\{\phi^{\circ n}(P) : P \in X(k), \phi^{\circ n}(P) \in (X \setminus L)(R_S)\}$$

が有限集合かどうか，ということになる．しかし，これには反例がすぐに見つかる： $X = \mathbb{P}^N$，$L = (X_0 = 0)$，$\phi = [X_0^d : F_1 : \cdots, F_N]$，$F_i \in R_S[X_0, \ldots, X_N]$ とし，$a_i \in R_S$ を選んで，$P = [1 : a_1 : \cdots : a_N]$ とする．すると，$\phi(P) = [1 : F_1(1, a_1, \ldots, a_N) : \cdots : F_N(1, a_1, \ldots, a_N)]$ も整数点となるので，帰納法で，どの自然数 n に対しても，$\phi^{\circ n}(P)$ は整数点となる．つまり，軌道上の全ての点が整数点なので，軌道の整数点は (P が前周期点でない限り) 無限個となる．この例の場合は，$\phi^{-1}(L) = L$ を満たすこと，つまり L が ϕ に対して完全不変であることに注意しておく．また，高次元だと「有限集合」という結論は強すぎるかもしれないので，まずは「Zariski 非稠密」としておく (後述の問題 29 も参照のこと).

問題 25 (*** Yasufuku [46])**.** $\phi : \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を k 上定義できる射とし，D を k 上定義される非自明な有効因子とする．また，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される Zariski 閉な真部分集合は全て，ϕ-完全不変でないとする．このとき，任意の $P \in \mathbb{P}^N(k)$ に対し，$\mathcal{O}_\phi(P) \cap (\mathbb{P}^N \setminus D)(R_S)$ は $\mathbb{P}^N$ 内で Zariski 非稠密である.

$N = 1$ の場合は Silverman [40] により解決されており，このときは，完全不変な Zariski 閉集合が存在することと，自然数 n と座標変換が存在して $\phi^{\circ n}$ が多項式になることと，$\phi^{\circ 2}$ がある座標変換で多項式になることが，全て同値である．$N = 2$ のときは，Lang–Vojta 予想を $\mathbb{P}^2$ の開部分多様体で仮定することで，Levin–Yasufuku [23] により解決されている．この論文では，ある軌道に整数点が Zariski 稠密に含まれるとき，次のいずれかが起きると示されている：

(i) 直線 L と自然数 n が存在し，$(\phi^{\circ n})^{-1}(L) = L$ (つまり $\phi^{\circ n}$ は，座標変換すれば多項式).

(ii) 曲線 C と ϕ-完全不変な点 $P \in C$ が存在し，どの自然数 n に対しても $(\phi^{\circ n})^*(C)$ は既約かつ被約で P のみが特異点である．

問題 26 (**)**．** 上の (ii) が起きないことを証明せよ．

この問題が解決すれば，軌道の整数点が Zariski 稠密になるのは，$\mathbb{P}^2$ のときも多項式のときだけとなる．D を動かさず，ある 1 つの D に対する整数点だけ見ることにすれば，また，十分条件だけ求めることにすれば，問題はより簡単になるはずである．

問題 27 (* or **)**．** $\mathcal{O}_\phi(P) \cap (X \setminus D)(R_S)$ が必ず Zariski 非稠密になるような，ϕ や D の十分条件を決定せよ．

問題 28 (* or **)**．** 同じ問題を，整数点でなく準整数点，つまり次で行え．ある定数 $0 \leq \epsilon < 1$ に対し，

$$\{Q \in X(k) : \sum_{v \notin S} \lambda_v(D, Q) < \epsilon h(D, Q)\}.$$

準整数点のうち，$\epsilon = 0$ の特別な場合が整数点に対応する．整数点より幅広い概念ではあるものの，準整数点のような見方をすることで，定量的な分析がしやすくなる．例えば，Yasufuku [47] は，$X = \mathbb{P}^N$ のときに，Vojta 予想を仮定して，$(\phi^{\circ n})^*(D)$ の部分因子のうち正規交叉しているものが十分な次数を持つことを十分条件に挙げている．また，Matsuzawa [27] は，やはり Vojta 予想を仮定した上で，有限射で全射な $\phi : X \longrightarrow X$ に関して，周期部分多様体の重複度と，2.3 節で述べる算術的次数の不等式で定まる条件を挙げている．

問題 29 (***)**．** この節で述べた問題を，Zariski 非稠密ではなく「有限集合」にして解け．

この問題はおそらく難しい．アーベル多様体には，Mordell–Lang 予想と呼ばれている定理があり，部分多様体と群の共通部分の構造に言及する．まず，第一段階として「Zariski 非稠密」が言えた後に，第二段階として，軌道と部分多様体の共通部分についての言及 (有限回しかぶつからない，あるいはある種の周期性がある)，つまり力学系 Mordell–Lang 予想 [13] に当たるものがないと,「有限性」まではおそらく言えないであろう．力学系 Mordell–Lang 予想は，$\mathbb{A}^2$ の時には，Xie [45] により解決されている．

2.3 算術的次数の問題

アーベル多様体との類似というわけではないが，2010 年ごろから盛んに研究されている数論的力学系のテーマが算術的次数である．本節では，X を滑らかな N 次元射影代数多様体，$\phi : X \dashrightarrow X$ を支配的な有理写像とする．より古くから研究されているもので，(1 次) 力学系次数 δ_ϕ とは，

$$\lim_{n \to \infty} \left((\phi^{\circ n})^* H \cdot H^{N-1} \right)^{1/n}$$

のことで，ここで，H は何らかの豊富な因子である．$X=\mathbb{P}^N$ のとき，δ_ϕ は，$(\deg\phi^{\circ n})^{1/n}$ の極限となる．一方，算術的次数は，ϕ だけでなく点にも依存する概念である．前方軌道が定義できるような点の集まりを，$X_\phi=\{P\in X:$ 全ての $n\geq 0$ に対し$,\phi^{\circ n}(P)\notin \mathrm{Indet}(\phi)\}$ としたとき，$P\in X_\phi$ の算術的次数 $\alpha_\phi(P)$ とは，

$$\alpha_\phi(P)=\lim_{n\to\infty}\max(1,h(H,\phi^{\circ n}(P)))^{1/n}$$

である．

問題 30 (***，具体例では**，Kawaguchi–Silverman 予想)**.** $P\in X_\phi$ に対し，$\alpha_\phi(P)$ は存在する (極限がある)．また，もし $\mathcal{O}_\phi(P)$ が Zariski 稠密ならば，$\alpha_\phi(P)=\delta_\phi$ である．

Kawaguchi–Silverman, Lesieutre, Matsuzawa, Meng, Sano, Satriano, Shibata, Zhang などにより，$N^1(X)\otimes\mathbb{R}=\mathbb{R}$ で ϕ が射の場合，ϕ が曲面の射の場合，ϕ が単項式写像の場合，ϕ が準アーベル多様体の射の場合，ϕ が超ケーラー多様体上の全射な射の場合などで解決している [16, 17, 20, 21, 26, 29, 30, 42]．さらなる精密化も提案，部分解決されているが，ここでは，「算術的次数が最大でないような点はあまりない」と主張する次の予想 [28] だけ挙げる．

問題 31 (***，具体例では**，sAND (small Arithmetic-degree Non-Density) 予想)**.** 自然数 d ごとに，$\{P\in X_\phi(L):k\subset L\subset\overline{k},[L:k]=d,\alpha_\phi(P)<\delta_\phi\}$ は Zariski 非稠密である．

逆に，Sano–Shibata [39] では，算術的次数が最大となるような点が Zariski 稠密にあることが，いくつかの場合で示されている．

2.4 その他の数論的力学系の問題

ページの都合上，ここでは述べられないが，アーベル多様体から動機付けされる数論的力学系の問題は他にもある．例えば，ガロア群が逆像の木

$$\bigsqcup_n(\phi^{\circ n})^{-1}(a)$$

にどのように作用するかを調べる問題は，Serre の open image 定理の類似となっていて，盛んに研究されている．また，André–Oort 予想の力学系版もある．つまり，“special point” として post-critically finite 写像 (臨界点が前周期点となっている写像) を該当させることで，力学系における unlikely intersection を調べるテーマで，複素解析的，Berkovich 解析，数論などの手法の融合も行われており，未解決問題も多い．このあたりのテーマに関しては概説 [1] をご参照頂きたい．

謝辞：複素幾何の専門家ではないにもかかわらず「複素幾何学の諸問題 II」で講演の機会を下さった高山先生に厚く御礼申し上げます．また，世話人の小池様，野村様にもお世話になりました．

参考文献

[1] Robert Benedetto, Patrick Ingram, Rafe Jones, Michelle Manes, Joseph H. Silverman, and Thomas J. Tucker, *Current trends and open problems in arithmetic dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **56** (2019), no. 4, 611–685.

[2] F. A. Bogomolov and Yu. Tschinkel, *Density of rational points on elliptic $K3$ surfaces*, Asian J. Math. **4** (2000), no. 2, 351–368.

[3] Enrico Bombieri and Walter Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] Frédéric Campana, *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 499–630.

[5] Lucia Caporaso, Joe Harris, and Barry Mazur, *Uniformity of rational points*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 1–35.

[6] P. Corvaja and U. Zannier, *On integral points on surfaces*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 2, 705–726.

[7] Pietro Corvaja and Umberto Zannier, *A lower bound for the height of a rational function at S-unit points*, Monatsh. Math. **144** (2005), no. 3, 203–224.

[8] ______, *Some cases of Vojta's conjecture on integral points over function fields*, J. Algebraic Geom. **17** (2008), no. 2, 295–333.

[9] Vesselin Dimitrov, Ziyang Gao, and Philipp Habegger, *Uniformity in Mordell-Lang for curves*, Ann. of Math. (2) **194** (2021), no. 1, 237–298.

[10] Jan-Hendrik Evertse and Roberto G. Ferretti, *Diophantine inequalities on projective varieties*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 25, 1295–1330.

[11] Gerd Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 3, 549–576.

[12] E. V. Flynn, Bjorn Poonen, and Edward F. Schaefer, *Cycles of quadratic polynomials and rational points on a genus-2 curve*, Duke Math. J. **90** (1997), no. 3, 435–463.

[13] Dragos Ghioca, Thomas J. Tucker, and Michael E. Zieve, *Intersections of polynomials orbits, and a dynamical Mordell-Lang conjecture*, Invent. Math. **171** (2008), no. 2, 463–483.

[14] Gordon Heier and Aaron Levin, *A generalized Schmidt subspace theorem for closed subschemes*, Amer. J. Math. **143** (2021), no. 1, 213–226.

[15] Marc Hindry and Joseph H. Silverman, *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction.

[16] Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, *Examples of dynamical degree equals arithmetic

degree, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41–63.

[17] ———, *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 7, 5009–5035.

[18] Lars Kühne, *Equidistribution in families of abelian varieties and uniformity*, arXiv:2101.10272.

[19] Serge Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[20] John Lesieutre and Matthew Satriano, *A rational map with infinitely many points of distinct arithmetic degrees*, Ergodic Theory Dynam. Systems **40** (2020), no. 11, 3051–3055.

[21] ———, *Canonical Heights on Hyper-Kähler Varieties and the Kawaguchi–Silverman Conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2021), no. 10, 7677–7714.

[22] Aaron Levin, *Greatest common divisors and Vojta's conjecture for blowups of algebraic tori*, Invent. Math. **215** (2019), no. 2, 493–533.

[23] Aaron Levin and Yu Yasufuku, *Integral points and orbits of endomorphisms on the projective plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 2, 971–1002.

[24] Nicole R. Looper, *The uniform boundedness and dynamical Lang conjectures for polynomials*, arXiv:2105.05240.

[25] ———, *Dynamical uniform boundedness and the abc-conjecture*, Invent. Math. **225** (2021), no. 1, 1–44.

[26] Yohsuke Matsuzawa, *On upper bounds of arithmetic degrees*, Amer. J. Math. **142** (2020), no. 6, 1797–1820.

[27] ———, *Growth of local height functions along orbits of self-morphisms on projective varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2021), to appear.

[28] Yohsuke Matsuzawa, Sheng Meng, Takahiro Shibata, and De-Qi Zhang, *Non-density of points of small arithmetic degrees*, arXiv:2002.10976.

[29] Yohsuke Matsuzawa and Kaoru Sano, *Arithmetic and dynamical degrees of self-morphisms of semi-abelian varieties*, Ergodic Theory Dynam. Systems **40** (2020), no. 6, 1655–1672.

[30] Yohsuke Matsuzawa, Kaoru Sano, and Takahiro Shibata, *Arithmetic degrees and dynamical degrees of endomorphisms on surfaces*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 7, 1635–1657.

[31] B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1977), no. 47, 33–186 (1978).

[32] David McKinnon, *Vojta's main conjecture for blowup surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 1, 1–12.

[33] David McKinnon and Mike Roth, *Seshadri constants, diophantine approximation, and*

Roth's theorem for arbitrary varieties, Invent. Math. **200** (2015), no. 2, 513–583.

[34] Loïc Merel, *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 437–449.

[35] Patrick Morton and Joseph H. Silverman, *Rational periodic points of rational functions*, Internat. Math. Res. Notices (1994), no. 2, 97–110.

[36] Junjiro Noguchi, Jörg Winkelmann, and Katsutoshi Yamanoi, *Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties*, J. Math. Pures Appl. (9) **88** (2007), no. 3, 293–306.

[37] Bjorn Poonen, *The classification of rational preperiodic points of quadratic polynomials over $\mathbb{Q}$: a refined conjecture*, Math. Z. **228** (1998), no. 1, 11–29.

[38] Min Ru and Paul Vojta, *A birational Nevanlinna constant and its consequences*, Amer. J. Math. **142** (2020), no. 3, 957–991.

[39] Kaoru Sano and Takahiro Shibata, *Zariski density of points with maximal arithmetic degree*, arXiv:2007.15180.

[40] Joseph H. Silverman, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 793–829.

[41] ———, *Generalized greatest common divisors, divisibility sequences, and Vojta's conjecture for blowups*, Monatsh. Math. **145** (2005), no. 4, 333–350.

[42] ———, *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 2, 647–678.

[43] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[44] Julie Tzu-Yueh Wang and Yu Yasufuku, *Greatest common divisors of integral points of numerically equivalent divisors*, Algebra Number Theory **15** (2021), no. 1, 287–305.

[45] Junyi Xie, *The dynamical Mordell-Lang conjecture for polynomial endomorphisms of the affine plane*, Astérisque (2017), no. 394, vi+110.

[46] Yu Yasufuku, *Deviation from S-integrality in orbits on $\mathbb{P}^n$*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) **9** (2014), no. 4, 603–631.

[47] ———, *Integral points and relative sizes of coordinates of orbits in $\mathbb{P}^N$*, Math. Z. **279** (2015), no. 3-4, 1121–1141.

[48] 安福 悠, アーベル多様体と数論的力学系 – 類似と相違, 日本数学会秋季総合分科会 総合講演・企画特別講演アブストラクト集 (2018), 69–80.

[49] ———, 数論的力学系と高さ関数, Algebraic Number Theory and Related Topics 2018, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, vol. B86, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2021, pp. 229–246.