Existence and non-existence of elastic graphs with the symmetric cone obstacle

東北大学大学院理学研究科数学専攻 吉澤 研介 *
Kensuke Yoshizawa
Mathematical Institute,
Tohoku University

1 Introduction

平面曲線 $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ に対し, 弾性エネルギーと呼ばれる量が次で定義される:

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_\gamma \kappa^2 \, ds.$$

但し κ, s はそれぞれ γ の曲率, 弧長パラメータを表す. 端点が $(0,0)$, $(1,0)$ で固定され, 函数 $u:[0,1] \to \mathbb{R}$ により与えられる開曲線 $(x, u(x))$ の場合, $(x,u(x))$ の (x でパラメータ表示された) 曲率 κ_u は

$$\kappa_u(x) = \frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となるため, $(x,u(x))$ に対する弾性エネルギー $\mathcal{W}(u)$ は以下で与えられる:

$$\mathcal{W}(u) := \int_0^1 \kappa_u(x)^2 \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{u''(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx.$$

本稿では上述のような, 端点が固定され, かつある函数のグラフで表される開曲線という枠組みに, 既知函数 $\psi:[0,1] \to \mathbb{R}$ による片側制約条件 (以降, ψ を障害物と呼ぶ) を加えた以下の最小化問題を考察する:

$$\text{(M)} \qquad \min_{v \in M_{\mathrm{sym}}} \mathcal{W}(v).$$

但し M_{sym} は 以下で与えられる $H(0,1) := H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ の凸部分集合とする:

$$M_{\mathrm{sym}} := \left\{ v \in H(0,1) \;\middle|\; v \geq \psi \ \text{ in } \ [0,1], \quad v(x) = v(1-x) \ \text{ for } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

このような問題は障害物問題と呼ばれ, 近年 [2, 4, 6] などにより研究されている. 以降簡単のため, $\inf_{v \in M_{\mathrm{sym}}} \mathcal{W}(v)$ を達成する $u \in M_{\mathrm{sym}}$ が存在する場合, その u を (M) の解と呼ぶ.

本稿を通じて, 障害物を表す既知函数 ψ に以下の条件を課す:

*email: kensuke.yoshizawa.s5@dc.tohoku.ac.jp.

仮定 1.1. 既知函数 $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ が以下をみたすとき, ψ は**対称錐条件**をみたす, と呼ぶ:

(i) $\psi(x) = \psi(1-x) \quad \text{for} \quad x \in [0,1]$;

(ii) $\psi(0) < 0, \ \psi(\frac{1}{2}) > 0 \quad \text{and}$

$$\psi(x) = (1-2x)\psi(0) + 2x\,\psi(\tfrac{1}{2}) \quad \text{for} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

また, 対称錐条件をみたす函数全体の集合を SC と記す.

問題 (M) に対する基礎的な結果は [2, 6] により与えられており, 特に,

$$\begin{aligned} c_* &:= \frac{2}{c_0} = 0.8346262684\ldots, \\ c_0 &:= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}\,dt = \mathcal{B}\Big(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\Big) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} = 2.396280469\ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

と定めると, $\psi \in$ SC であるとき,

- $\psi(1/2) < c_*$ ならば (M) の解が存在し,
- $\psi(1/2) > c_*$ ならば (M) の解は存在しない

という結果が得られている. その一方,

(Q) $\qquad \psi(\frac{1}{2}) = c_*$ における可解性, (M) の解の一意性及び正則性

については未解明であった. 特に, 汎函数 $\mathcal{W}$ が凸性をもたないことから, 障害物による条件 $u \ge \psi$ を課さずとも開曲線に対する $\mathcal{W}$ の最小元の一意性については明らかではない. また, 条件 $u \ge \psi$ を課さない下で u が $\mathcal{W}$ の最小元であった場合, u は $(0,1)$ 上で $\mathcal{W}$ の Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{1}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa_u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right) + \frac{1}{2}\kappa_u^3(x) = 0 \tag{1.3}$$

をみたすため, 最小元の正則性は $C^\infty(0,1)$ まで上がることが知られている. しかしながら, 障害物問題の解は直接 (1.3) を $(0,1)$ 上でみたす函数として特徴づけることはできないため, (M) の解の正則性が $C^\infty(0,1)$ まで上がるかは明らかではない. 実際, $\mathcal{W}$ と異なる汎函数の最小化問題において, 障害物による条件を課すと, 障害物を課さない場合に比べて最小元の正則性が悪くなる例が [1] において挙げられている. 本問題については, [2] により (M) の解は三階弱微分可能で, その弱微分は有界変動函数のクラスに属すことが示されているが, 著者の知る限りこの正則性が最良であった.

未解明問題 (Q) を踏まえ, 本稿における主結果を述べる.

定理 1.2 ([8, Theorem 1.2])**.** 既知函数 $\psi \in$ SC が

$$\psi(\tfrac{1}{2}) < c_* \tag{1.4}$$

をみたすならば, (M) は一意解 u をもつ. さらに, u の三階弱微分 u''' が存在し $u''' \in BV(0,1)$ をみたすが,

$$u \notin C^3([0,1]) \tag{1.5}$$

は成立しない. また, $\psi \in \mathsf{SC}$ が

$$\psi(\tfrac{1}{2}) \geq c_* \tag{1.6}$$

をみたすならば, (M) に解は存在しない.

障害物が $\psi \in \mathsf{SC}$ をみたすとき, (M) の解は次の二点境界値問題

$$\text{(BVP)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa_u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\right) + \frac{1}{2}\kappa_u^3(x) = 0 \quad \text{in} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \\ u(\frac{1}{2}) = \psi(\frac{1}{2}), \quad u'(\frac{1}{2}) = 0, \end{cases}$$

の解として特徴付けられる. これは障害物の形状が対称錐型であることと, u が (M) の解であるならば u は凹となることより, u と ψ の一致集合を決定できることに由来する (詳細は注意 2.2 を参照されたい). これにより仮定 1.1 を課しているが, (BVP) への帰着が可能であればもう少し広い枠組みの ψ を考えても良い ([8, Remark 3.3]). 以上より, u が (BVP) の解に帰着されるため, 二点境界値問題の解析に有効な Shooting method の適用が期待できる (Shooting method については [9] において大変詳しく解説されている). Shooting method は通常, 微分方程式に対する境界値問題の解の一意性ないしは多重性を示す際によく用いられ, 境界値問題の解を対応する初期値問題の解により特徴づける手法である. 実際に定理 1.2 の条件 (1.4) 下における (M) の解の一意性はまさにその帰結として得られている. さらに, 障害物問題 (M) を初期値問題として捉えることで, MAPLE 等を用いることにより解の可視的な表示を得ることもできる (図 1).

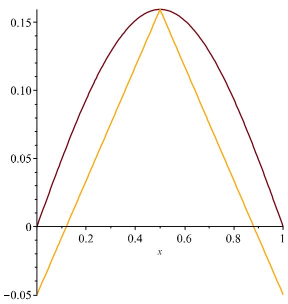

図 1: 障害物が $\psi(1/2) \approx 0.16$ の時の (M) の解.

しかし, Shooting method は二階の非線形微分方程式への応用こそよく知られているが, (BVP) のように方程式が四階である時には, パラメータの取り扱いを困難点の一端としてその応用は容易ではない. 実際, (BVP) では端点 $x = 0, 1/2$ での境界条件はそれぞれ二つしか与えられていないため, 初期値問題として考える場合, 解を一意に定めるには付加的な条件を二つ (例えば $x = 0$ を初期値と見るならば $u'(0)$ と $u'''(0)$ についての条件) 課す必要がある. これはすなわち未知のパラメーターを二つ同時に取り扱わなければならないことを意味している.

にも関わらず定理 1.2 では Shooting method を応用して得られている. これは, 対応する方程式 (1.3) を変分的な構造と, 幾何学的な構造に着目し, Shooting method が適用しやすい $U'' + f(U) = 0$ 型の二階の方程式に書き換えて用いているためである. パラメーターを二つ同時に取り扱うという困難点は抱えているが, これも方程式の構造より見通しよく処理することができ, 結果として定理 1.2 が得られる.

注意 1.3. (1) 定理 1.2 と同様の結果が [5, 7] により得られている．証明はそれぞれ三つとも大きく異なり, [5] では幾何学的な量である polar tangential angle を用いて定理 1.2 の主張を示している．また, [7] は Talenti の対称化により一意性を示している．[7] の手法では $\psi(1/2)$ を十分小さくしないといけないため, (1.4) より ψ に対する狭い枠組みでの結果ではあるが, 解の対称性を外した M_{sym} より広い枠組み $\{v \in H(0,1) \mid v \geq \psi\}$ における結果を得ている．
(2) $u \in M_{\mathrm{sym}}$ が (M) の解であるとき, u は変分不等式

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{W}(u+\varepsilon(v-u))\Big|_{\varepsilon=0} \geq 0 \quad \text{for all} \quad v \in \{\, v \in H(0,1) \mid v \geq \psi \text{ in } [0,1] \,\} \tag{1.7}$$

をみたすことが知られている．文献 [8] では (M) より広い枠組みである (1.7) をみたす u に対して定理 1.2 と同様の一意性や $\psi(1/2)$ を用いた解の存在-非存在の結果を得ている．

2 Preliminaries

初めに, $\mathcal{W}$ の Euler-Lagrange 方程式が (1.3) で与えられることを示す．$u \in C^4([0,1])$ であるとき, 任意の $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(0,1)$ に対し部分積分を用いることで次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{W}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^1 \left(2\frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{5}{2}}}\varphi'' - 5\frac{(u'')^2u'}{(1+(u')^2)^{\frac{7}{2}}}\varphi'\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(-2\frac{u'''}{(1+(u')^2)^{\frac{5}{2}}} + 5\frac{(u'')^2u'}{(1+(u')^2)^{\frac{7}{2}}}\right)\varphi'\,dx \\ &= \int_0^1 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\kappa_u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right) + \frac{1}{2}\kappa_u^3\right)\varphi\,dx.\end{aligned} \tag{2.1}$$

函数 $G : \mathbb{R} \to (-c_0/2, c_0/2)$ を [3] が導入したように次のように定める:

$$G(x) := \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}\,dt. \tag{2.2}$$

但し c_0 は $c_0 := \int_{\mathbb{R}}(1+t^2)^{-\frac{5}{4}}\,dt$ で定められる定数である．このとき $G'(x) > 0$ が成り立つため, G は全射かつ単調増加である．よって, 滑らかな G の逆函数 G^{-1} が存在し, さらに次をみたすことがわかる:

$$\frac{d}{dx}G^{-1}(x) = \left(1+G^{-1}(x)^2\right)^{\frac{5}{4}}. \tag{2.3}$$

次に, (M) における既存の結果を述べる．

命題 2.1 ([2])**.** c_* を (1.4) で与えられる定数とし, ψ は

$$\psi \in C([0,1]), \quad \psi(0) < 0, \quad \psi(1) < 0 \quad \text{and} \quad \max_{0\leq x\leq 1}\psi(x) > 0 \tag{2.4}$$

をみたすとする．このとき,

(i) u が (M) の解ならば,

$$u \in C^2([0,1]) \quad \text{and} \quad u''' \in BV(0,1). \tag{2.5}$$

(ii) u が (M) の解ならば, u は凹である, i.e., $u'' \le 0$ in $[0,1]$.

(iii) u が (M) の解ならば, ある $x_0 \in (0,1)$ が存在して $u(x_0) = \psi(x_0)$ となる.

(iv) $E \subset \{\, x \in (0,1) \mid u(x) > \psi(x) \,\}$ となる任意の E に対し, $u \in C^\infty(\bar{E})$ が成り立つ. さらに u は (1.3) を E 上 (古典的な意味で) みたす.

(v) 境界で u の曲率は 0 となる: $\kappa_u(0) = \kappa_u(1) = 0$, i.e., $u''(0) = u''(1) = 0$.

(vi) $\psi \in \mathsf{SC}$ が (1.4) をみたすとき, (M) は解をもつ.

注意 2.2. $\psi \in \mathsf{SC}$ を仮定する. このとき, 命題 2.1-(ii), (iii) より u が (M) の解ならば,

$$u(x) = \psi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

となる. さらに命題 2.1-(iv) から (M) の解 u は $(0, 1/2)$ 上で (1.3) を満たすため, 命題 2.1-(iv), (v) と $u \in M_{\mathrm{sym}}$ より u が (M) の解ならば u は (BVP) の解であることがわかる.

3 Shooting method

3.1 Two-point boundary value problem

この節では, (BVP), すなわち $\mathcal{W}$ に対する Euler-Lagrange 方程式 (1.3) に, 境界条件

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(\tfrac{1}{2}) = \psi(\tfrac{1}{2}), \quad u'(\tfrac{1}{2}) = 0 \tag{3.1}$$

を課した境界値問題の解の多重性を考察する. Shooting method を用いるため, $u(1/2) = \psi(1/2)$ 及び $u'(1/2) = 0$ の代わりに, 初期条件

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = \beta \tag{3.2}$$

を (1.3) に課した初期値問題を考察し, その一意解 $u_{\alpha,\beta}$ が $u_{\alpha,\beta}(1/2) = \psi(1/2)$, $u'_{\alpha,\beta}(1/2) = 0$ となるような $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を求めよ, という問を考察する. 命題 2.1 より (M) の解は凹となるので, $u'(0) = \alpha > 0$ のみを考えれば良い.

Euler-Lagrange 方程式が第一変分に由来する点に着目して, (2.1) で示したように, $u_{\alpha,\beta}$ がみたす方程式 (1.3) は

$$\left(2\frac{u'''(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{5}{2}}} - 5\frac{u''(x)^2 u'(x)}{(1+u'(x)^2)^{\frac{7}{2}}} \right)' = 0 \tag{3.3}$$

と書き換えられることに注意する. さらに,

$$u'_{\alpha,\beta}(x) =: w(x)$$

にて函数 w を定めると, (3.3) はさらに

$$\frac{w''(x)}{(1+w(x)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{2}\frac{w'(x)^2 w(x)}{(1+w(x)^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{w''(0)}{(1+w(0)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{2}\frac{w'(0)^2 w(0)}{(1+w(0)^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{3.4}$$

と書き換えられる. 但し (3.4) では (3.2) に由来する

$$w(0) = u'_{\alpha,\beta}(0) = \alpha, \quad w'(0) = u''_{\alpha,\beta}(0) = 0 \tag{3.5}$$

を用いた．ここで (2.2) で与えられる G を用いて函数 y を

$$y(x) := G(w(x)) = G(u'_{\alpha,\beta}(x)) \tag{3.6}$$

と定めると, (3.4) と (3.6) から

$$y'(x) = \frac{w'(x)}{(1+w(x)^2)^{\frac{5}{4}}}, \quad y''(x) = \frac{w''(x)}{(1+w(x)^2)^{\frac{5}{4}}} - \frac{5}{2}\frac{w'(x)^2 w(x)}{(1+w(x)^2)^{\frac{9}{4}}},$$

が成り立つので,

$$\frac{y''(x)}{\left(1+G^{-1}(y(x))^2\right)^{\frac{5}{4}}} = \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{3.7}$$

を得る．関係式 (3.6) と (3.5) より, (3.7) に対する初期条件は

$$y(0) = G(\alpha) > 0 \quad \text{and} \quad y'(0) = \frac{w'(0)}{(1+w(0)^2)^{\frac{5}{4}}} = 0 \tag{3.8}$$

となる．

ここで, 境界条件の一つ $u_{\alpha,\beta}(1/2) = \psi(1/2)$ は, (3.6) より $y(1/2) = 0$ となることに注意し, まず $y(1/2) = 0$ をみたす (α, β) を求める．ここで, (3.7), (3.8) の解 y が零点をもつには,

$$\beta < 0$$

であることが必要かつ十分であることがわかる．さらに, $\beta < 0$ であるとき $y''(x) < 0$ となることから, y の零点は高々一つであることに注意する．以下の y の零点を与える補題は, *time map* 公式と呼ばれる ([9, 第 5 節]):

補題 3.1. 各 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{<0}$ に対し, y を 初期条件 (3.8) をもつ (3.7) の解とする．このとき, $y(x) = 0$ となる x は以下の $Z_{\alpha,\beta}$ で与えられる:

$$Z_{\alpha,\beta} = \frac{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{2}\sqrt{|\beta|}} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha - t}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}. \tag{3.9}$$

Proof. 定数 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{<0}$ を任意に取り, y を初期条件 (3.8) の下での (3.7) の解とする．函数 f, F を以下のように定める:

$$f(t) := (1+G^{-1}(t)^2)^{\frac{5}{4}}, \quad F(X) := 2\int_0^X f(t)\,dt.$$

さらに, $Z \in (0, \infty)$ を y の最小の零点とする ($y''(x) < 0$ 及び $y(0) > 0$ から, $Z \in (0, \infty)$ は well-defined であることに注意する)．このとき (3.7) より

$$\frac{d}{dx}\left(y'(x)^2 - \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} F(y(x))\right) = 2y'\left(y'' - \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} \left(1+G^{-1}(y)^2\right)^{\frac{5}{4}}\right) = 0$$

となり, (3.8) の $y'(0) = 0$ から

$$y'(x)^2 - \frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} F(y(x)) = -\frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} F(y(0)) \quad \text{for} \quad x \in (0, Z) \tag{3.10}$$

を得る. さらに, $y'(0)=0$ 及び $y''(x)<0$ in $(0,Z)$ より $y'(x)<0$ in $(0,Z)$ が成り立つ. これと (3.10) 及び $y(0)=\alpha$ より,

$$y'(x)=-\frac{\sqrt{|\beta|}}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}\sqrt{F(G(\alpha))-F(y(x))}=-\frac{\sqrt{|\beta|}}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}\sqrt{2\alpha-2G^{-1}(y(x))} \tag{3.11}$$

が得られる. 但し, 上式では (2.3) 及び $G^{-1}(0)=0$ から従う以下の関係式を用いた:

$$F(s)=2\int_0^s\left(1+G^{-1}(t)^2\right)^{\frac{5}{4}}dt=2\int_0^s\left(G^{-1}(t)\right)'dt=2G^{-1}(s).$$

以上より (3.11) を $(0,Z)$ 上で積分し, 変数変換 $s=y(t)$ を用いることで

$$\frac{\sqrt{|\beta|}}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}Z=\int_0^Z-\frac{y'(t)}{\sqrt{2\alpha-2G^{-1}(y(t))}}\,dt=\int_0^{G(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{2\alpha-2G^{-1}(s)}}$$

を得る. 従って

$$Z=\frac{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{|\beta|}}\int_0^{G(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{2\alpha-2G^{-1}(s)}}$$

が成り立ち, 最後の式で変数変換 $t=G^{-1}(s)$ を用いることで (3.9) が得られる. □

各 $\alpha>0$ を止める毎に定まる $\mathbb{R}_{<0}$ 上の写像

$$\beta\mapsto Z_{\alpha,\beta}$$

は β について狭義単調増加であること, 及び, 次をみたすことが (3.9) より従う:

$$\lim_{\beta\uparrow 0}Z_{\alpha,\beta}=\infty\quad\text{and}\quad\lim_{\beta\to-\infty}Z_{\alpha,\beta}=0.$$

よって, 各 $\alpha>0$ に対し $Z_{\alpha,\beta}=1/2$ をみたす $\beta<0$ が一意に存在する. これより (3.9) において $Z_{\alpha,\beta}$ を $1/2$ に換えることで, 以下が直ちに従う:

命題 3.2. 各 $\alpha>0$ に対し, $Z_{\alpha,\beta}$ が $1/2$ であるための必要十分条件は, $\beta<0$ が

$$\beta=\beta_*(\alpha):=-2(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}\left(\int_0^\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha-t}}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}\right)^2$$

で与えられることである.

命題 3.2 より, $\alpha=u'(0)$ に対し初期値問題 (1.3), (3.2) の解 u が $u'(1/2)=0$ をみたすには, 初期条件 (3.2) において

$$u'''(0)=\beta_*(\alpha)$$

であることが必要かつ十分であることがわかる. よって, 以下では (3.2) において $\beta<0$ を $\beta_*(\alpha)$ に換えた初期条件

$$u(0)=0,\quad u'(0)=\alpha,\quad u''(0)=0,\quad u'''(0)=\beta_*(\alpha) \tag{3.12}$$

の下での (1.3) の解が $u(1/2)=\psi(1/2)$ をみたす時の $\alpha>0$ を求めればよい．初期条件を (3.12) とした時の (1.3) の一意解を $u(x;\alpha)$ と記す．ここで, $y(x;\alpha):=G(u'(x;\alpha))$ は初期条件 (3.8) を課した初期値問題

$$\frac{y''(x)}{\left(1+G^{-1}(y(x))^2\right)^{\frac{5}{4}}}=\frac{\beta_*(\alpha)}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{3.13}$$

の解であることに注意する．簡単のため, (3.13) の右辺を以下のように記す:

$$\gamma(\alpha):=\frac{\beta_*(\alpha)}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}}=-2\left(\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha-t}}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}\right)^2.$$

補題 3.3. 各 $\alpha>0$ に対し $u(x;\alpha)$ を初期条件 (3.12) の下での (1.3) の一意解とする．このとき以下が成り立つ:

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)=\frac{\displaystyle\int_0^\alpha \frac{s}{\sqrt{\alpha-s}}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}}{\displaystyle 2\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha-s}}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}}. \tag{3.14}$$

Proof. 初期値問題 (1.3), (3.12) の解 $u(x;\alpha)$ に対し, $y(x;\alpha)$ を $y(x;\alpha):=G(u'(x;\alpha))$ にて定まる函数とする．このとき $y(x;\alpha)$ は (3.13) をみたすこと, 及び (3.11) より $y(x;\alpha)$ は $(0,1/2)$ 上狭義単調減少函数であることがわかる．従って $u(0;\alpha)=0$ より

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)=\int_0^{\frac{1}{2}} u'(x;\alpha)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} G^{-1}(y(x;\alpha))\,dx$$

が成り立つ．さらに, 変数変換 $y(x;\alpha)=s$ を用いた後に (3.11) を用いることで

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)=\int_{G(\alpha)}^0 G^{-1}(s)\frac{1}{y'(x;\alpha)}\,ds=\int_{G(\alpha)}^0 G^{-1}(s)\left(-\frac{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}{|\beta_*(\alpha)|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\alpha-2G^{-1}(s)}}\right)ds$$

を得る．次に, 変数変換 $G^{-1}(s)=x$ により

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)=\frac{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}{|\beta_*(\alpha)|^{\frac{1}{2}}}\int_0^\alpha \frac{x}{\sqrt{2\alpha-2x}}\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{5}{4}}}\,dx=\frac{\displaystyle\int_0^\alpha \frac{x}{\sqrt{\alpha-x}}\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{4}}}}{\displaystyle 2\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha-s}}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}}$$

が成り立ち, (3.14) を得る．但し上記では命題 3.2 より従う関係式

$$\frac{|\beta_*(\alpha)|^{\frac{1}{2}}}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}}=\sqrt{2}\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha-s}}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}} \tag{3.15}$$

を用いた． □

ここで, 以下のように各 $\alpha>0$ に対し定まる次の積分を用意する:

$$I(\alpha):=\int_0^\alpha \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-s}}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}},\quad J(\alpha):=\int_0^\alpha \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-x}}\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{5}{4}}}\,dx. \tag{3.16}$$

補題 3.3 より, 上記 $I(\alpha)$, $J(\alpha)$ は $u(\frac{1}{2};\alpha)$ の別表記を与えることがわかる．すなわち,

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)=\frac{J(\alpha)}{2I(\alpha)}. \tag{3.17}$$

補題 3.4. $J(\alpha)$ を (3.16) にて与えられる函数とする. このとき, 次が成り立つ:

$$J'(\alpha) > 0 \quad \text{for} \quad \alpha > 0.$$

Proof. まず, 変数変換により $J(\alpha)$ は次のように書き換えられることに注意する:

$$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2 t^2)^{\frac{5}{4}}}\, dt. \tag{3.18}$$

これにより, (3.18) の両辺 α について微分することで

$$J'(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} \frac{4-\alpha^2 t^2}{(1+\alpha^2 t^2)^{\frac{9}{4}}}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^\alpha \frac{t}{\sqrt{\alpha - t}} \frac{4-t^2}{(1+t^2)^{\frac{9}{4}}}\, dt \tag{3.19}$$

が成り立つ. 上式より $\alpha \le 2$ の場合には主張が成立することがわかるので, 以下では $\alpha > 2$ の場合を考える. このとき,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\alpha}\, J'(\alpha) &= \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{\alpha - t}} \frac{4-t^2}{(1+t^2)^{\frac{9}{4}}}\, dt - \int_2^\alpha \frac{t}{\sqrt{\alpha - t}} \frac{t^2-4}{(1+t^2)^{\frac{9}{4}}}\, dt \\ &\ge \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{\alpha - t}} \frac{4-t^2}{(1+t^2)^{\frac{9}{4}}}\, dt - \frac{2}{3} \int_2^\alpha \frac{1}{(\alpha - t)^{\frac{3}{4}}}\, dt - \frac{1}{3} \int_2^\alpha \frac{t^3(t^2-4)^3}{(1+t^2)^{\frac{27}{4}}}\, dt \\ &=: j_1(\alpha) - \frac{2}{3} j_2(\alpha) - \frac{1}{3} j_3(\alpha) \end{aligned} \tag{3.20}$$

が従うこと, 並びに $j_1'(\alpha) < 0$, $j_2'(\alpha) > 0$, $j_3'(\alpha) > 0$ であることから

$$j(\alpha) := \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left(j_1(\alpha) - \frac{2}{3} j_2(\alpha) - \frac{1}{3} j_3(\alpha) \right)$$

が $\alpha > 2$ で狭義単調減少であることがわかる. さらに,

$$j_1(\alpha) = O(\alpha^{-\frac{1}{2}}), \quad j_2(\alpha) = O(\alpha^{\frac{1}{4}}), \quad j_3(\alpha) = O(1) \quad (\alpha \to \infty)$$

であることから, 次が成り立つ:

$$j(\alpha) \to 0 \quad \text{as} \quad \alpha \to \infty.$$

これより $\alpha > 2$ において $j(\alpha) > 0$ が従うので, (3.20) より,

$$J'(\alpha) \ge j(\alpha) > 0 \quad \text{for} \quad \alpha > 2$$

を得る. 以上より $\alpha > 2$ の場合も主張が成立することが示されたので, 証明が完了する. □

補題 3.3 を用いて, $\alpha \mapsto u(\frac{1}{2}; \alpha)$ が狭義単調増加であることを示そう. その準備として, $y(x;\alpha)$ を $[0, 1/2] \times \mathbb{R}_{>0}$ 上の二変数函数と見なして得られる函数

$$\xi(x, \alpha) := \frac{\partial y}{\partial \alpha}(x; \alpha),$$

を用意する (y の α に関する可微分性は, $y(x;\alpha) = G(u(x;\alpha))$ と u の初期値に関する可微分性より従う). このとき, (3.13) より

$$\partial_x^2 \xi - \gamma(\alpha) f'(y) \xi - \gamma'(\alpha) f(y) = 0 \tag{3.21}$$

が成り立つ．ここで, $f(t)=(1+G^{-1}(t)^2)^{\frac{5}{4}}$ より

$$f'(t)=\frac{5}{4}\big(1+G^{-1}(t)^2\big)^{\frac{1}{4}}\cdot 2G^{-1}(t)\cdot\frac{d}{dt}G^{-1}(t)=\frac{5}{2}\big(1+G^{-1}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}G^{-1}(t)$$

となるため,

$$f'(t)\geq 0 \quad \text{for} \quad t\geq 0$$

が成り立つことに注意する．このとき, $y(0;\alpha)=G(\alpha)$, $y'(0;\alpha)=0$ 及び $y(\frac{1}{2};\alpha)=0$ より,

$$\xi(0,\alpha)=G'(\alpha),\quad \xi'(0,\alpha)=0,\quad \xi\Big(\frac{1}{2},\alpha\Big)=0 \tag{3.22}$$

を得る．

次の命題 3.5 が定理 1.2 の証明において大きな役割を占める．補題 3.3 より, $u(\frac{1}{2};\alpha)$ は $\alpha>0$ で連続的に微分可能であることに注意する．

命題 3.5. 各 $\alpha>0$ に対し, $u(x;\alpha)$ を初期値問題 (1.3), (3.12) の解とする．このとき,

$$\frac{d}{d\alpha}\left[u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)\right]>0 \quad \text{for} \quad \alpha>0 \tag{3.23}$$

が成り立つ．

Proof. 初めに, 各 $\alpha>0$ に対し

$$y'(x;\alpha)<0 \quad \text{and} \quad 0<y(x;\alpha)<y(0;\alpha)=G(\alpha) \quad \text{for} \quad 0<x<\frac{1}{2} \tag{3.24}$$

が成り立つため, $y(\cdot;\alpha)$ は $[0,1/2]$ 上減少函数である．また, $\gamma(\alpha)$ を用いて (3.11) の二乗を

$$y'(x;\alpha)^2=-\gamma(\alpha)\big(2\alpha-2G^{-1}(y(x;\alpha))\big) \tag{3.25}$$

と書き換えることができることに注意する．ここで, (3.25) の両辺を α について微分することで,

$$2y'\cdot\xi'=-2\gamma'(\alpha)\Big[\alpha-G^{-1}(y)\Big]-2\gamma(\alpha)\Big[1-\Big(1+G^{-1}(y)^2\Big)^{\frac{5}{4}}\xi\Big] \tag{3.26}$$

を得る．右辺に現れる $(\alpha-G^{-1}(y))$ について, (3.24) より $G^{-1}(y)<\alpha$ が得られることに注意する．α が $\Gamma_+:=\{\,\alpha>0\mid\gamma'(\alpha)>0\,\}$ に属すか $\Gamma_-:=\{\,\alpha>0\mid\gamma'(\alpha)\leq 0\,\}$ に属すかの場合分けにより (3.23) を示す．

Case I. $\alpha\in\Gamma_-$ の場合． $\alpha\in\Gamma_-$ を任意に取り固定する．(3.26) と (3.24) より, $\gamma(\alpha)<0$ 及び $\gamma'(\alpha)\leq 0$ が成り立つので,

$$\xi(c,\alpha)\leq 0 \text{ となる } c\in(0,\tfrac{1}{2}) \text{ に対し, } \xi'(c,\alpha)<0 \tag{3.27}$$

となる．これより,

$$\xi(x,\alpha)\geq 0 \quad \text{for} \quad 0\leq x\leq\frac{1}{2} \tag{3.28}$$

が成り立つ．実際, もし $\xi(c,\alpha)<0$ となる $c\in(0,1/2)$ が存在するならば, (3.22) より $x>c$ で ξ は狭義単調減少なので $\xi(\frac{1}{2},\alpha)=0$ をみたさず, (3.22) に矛盾する．一方, $u(0;\alpha)=0$ を用いて $u(\frac{1}{2};\alpha)$ の表示

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)=\int_0^{\frac{1}{2}}u'(x;\alpha)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}G^{-1}(y(x;\alpha))\,dx$$

が得られ, (3.28) とあわせることで

$$
\frac{d}{d\alpha}\left[u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)\right]=\int_0^{\frac{1}{2}}\big(1+G^{-1}(y)^2\big)^{\frac{5}{4}}\xi(x,\alpha)\,dx\geq 0 \tag{3.29}
$$

が成り立つ. 但し最後の式では (2.3) を用いた. (3.29) における不等式は, $\xi(0,\alpha)>0$ より等号が成立しないため, $\alpha\in\Gamma_-$ の場合に (3.23) が得られた.

Case II. $\alpha\in\Gamma_+$ の場合. 各 $\alpha>0$ に対し, $y(\frac{1}{2};\alpha)=0$ 及び $\xi(\frac{1}{2},\alpha)=0$ であることから, (3.26) において $x=1/2$ とすることで,

$$
2y'\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)\cdot\partial_x\xi\Big(\frac{1}{2},\alpha\Big)=-2\Big(\alpha\gamma'(\alpha)+\gamma(\alpha)\Big) \tag{3.30}
$$

を得る. 以下, さらに二つの場合分けを行う:

(i) $\alpha\in\Gamma_+$ かつ $\alpha\gamma'(\alpha)+\gamma(\alpha)\leq 0$ の場合. このとき, (3.30) と $y'(\frac{1}{2};\alpha)<0$ より,

$$
\partial_x\xi\Big(\frac{1}{2},\alpha\Big)\leq 0 \tag{3.31}
$$

が成り立つ. ここで, (3.13) と γ, f の定義より

$$
y''(x;\alpha)=\big(1+G^{-1}(y(x;\alpha))^2\big)^{\frac{5}{4}}\frac{\beta_*}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}}=f(y(x;\alpha))\gamma(\alpha)
$$

が得られるので,

$$
\begin{aligned}
\partial_x\Big(\partial_x\xi\,y'-\xi\gamma(\alpha)f(y)\Big)&=\partial_x^2\xi\,y'+\partial_x\xi\,y''-\gamma(\alpha)\Big(\partial_x\xi\,f(y)+\xi\,f'(y)y'\Big)\\
&=\partial_x^2\xi\,y'-\gamma(\alpha)\xi\,f'(y)y'\\
&=\gamma'(\alpha)f(y)y'
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

が成り立つ. 但し最後の等式では (3.21) を用いた. 以下, $\alpha\gamma'(\alpha)+\gamma(\alpha)\leq 0$ をみたす任意の $\alpha\in\Gamma_+$ に対し,

$$
\xi(x,\alpha)\geq 0\quad\text{for}\quad x\in\Big(0,\frac{1}{2}\Big) \tag{3.33}
$$

が成り立つことを示す. 反対に, $\bar\alpha\gamma'(\bar\alpha)+\gamma(\bar\alpha)\leq 0$ をみたすある $\bar\alpha\in\Gamma_+$ が存在して

$$
\xi(x_0,\bar\alpha)<0\quad\text{for some}\quad 0<x_0<\frac{1}{2}
$$

が成り立つと仮定する. (3.22) より $\xi(\frac{1}{2},\bar\alpha)=0$ であったので, ある $x_1\in(0,1/2)$ が存在して $\xi(x_1,\bar\alpha)<0$, $\partial_x\xi(x_1,\bar\alpha)=0$ をみたす. 従って (3.32) を $(x_1,1/2)$ 上で積分すると等式

$$
\partial_x\xi\Big(\frac{1}{2},\bar\alpha\Big)y'\Big(\frac{1}{2};\bar\alpha\Big)+\xi(x_1,\bar\alpha)\gamma(\bar\alpha)f(y(x_1;\bar\alpha))=\gamma'(\bar\alpha)\int_{x_1}^{\frac{1}{2}}f(y)y'\,dx \tag{3.34}
$$

が得られる. 上式の右辺に現れる積分は $y'<0$ in $(0,1/2)$ 及び f の正値性から負値であり, さらに $\bar\alpha\in\Gamma_+$ より $\gamma'(\bar\alpha)<0$ であるので, (3.34) の右辺は負値である. しかし, (3.31) や x_1 がみたす性質を思い出すと, (3.34) の左辺は非負値であることがわかるため, 矛盾である. 従って (3.33) が成り立つ. 結果として, (3.28) から (3.29) を導いた議論と同様にして, $\alpha\in\Gamma_+$ かつ $\alpha\gamma'(\alpha)+\gamma(\alpha)\leq 0$ の場合に (3.23) を得る.

(ii) $\alpha \in \Gamma_+$ かつ $\alpha\gamma'(\alpha) + \gamma(\alpha) > 0$ の場合．このとき

$$\big(\alpha\gamma(\alpha)\big)' > 0 \tag{3.35}$$

であることに注意する．ここで, $I(\alpha)$, $J(\alpha)$ を (3.16) で定められる函数とすると,

$$\alpha\gamma(\alpha) = -2\left(\sqrt{\alpha}\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha - t}}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{5}{4}}}\right)^2 = -2I(\alpha)^2$$

であることより, (3.35) から $I'(\alpha) < 0$ を得る．さらに, (3.17) より $u(\frac{1}{2};\alpha) = J(\alpha)/2I(\alpha)$ であるので,

$$\frac{d}{d\alpha}\left[u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big)\right] = \frac{J'(\alpha)I(\alpha) - J(\alpha)I'(\alpha)}{2I(\alpha)^2} > \frac{J'(\alpha)I(\alpha)}{2I(\alpha)^2}$$

が従う．但し最後の不等式で $I'(\alpha) < 0$ 及び $J(\alpha) > 0$ を用いた．さらに補題 3.4 より $J'(\alpha) > 0$ であったので, この場合にも (3.23) が得られる． □

命題 3.6. 各 $\alpha > 0$ に対し $u(x;\alpha)$ を初期値問題 (1.3)-(3.12) の解とし, c_* を (1.2) にて与えられる定数とする．このとき, 以下が成り立つ:

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big) \to c_* \quad \text{as} \quad \alpha \to \infty. \tag{3.36}$$

Proof. 以下, $\alpha > 0$ は十分大きいものとする．$I(\alpha)$ を (3.16) で与えられる $\alpha > 0$ の函数とし, 次のように分割する:

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{1 - s/\alpha}}\frac{1}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}\,ds + \int_{\alpha^{\frac{3}{4}}}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - s/\alpha}}\frac{1}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}\,ds =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

函数 $s \mapsto (1+s^2)^{\frac{5}{4}}$ は $(0,\infty)$ 上可積分であるので,

$$I_1(\alpha) = \int_0^\infty \chi_{(0,\alpha^{\frac{3}{4}})}\frac{1}{\sqrt{1 - s/\alpha}}\frac{1}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}\,ds \to \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}\,ds \quad \text{as} \quad \alpha \to \infty$$

を得る．一方, I_2 について

$$|I_2(\alpha)| \le \frac{1}{(1+\alpha^{\frac{3}{2}})^{\frac{5}{4}}}\int_{\alpha^{\frac{3}{4}}}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - s/\alpha}}\,ds = \frac{1}{(1+\alpha^{\frac{3}{2}})^{\frac{5}{4}}} \cdot 2\alpha\sqrt{\alpha - \alpha^{\frac{3}{4}}} \to 0, \quad \alpha \to \infty$$

が成り立つ．以上より

$$I(\alpha) \to \int_0^\infty \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{5}{4}}}\,ds = \frac{c_0}{2} \quad \text{as} \quad \alpha \to \infty \tag{3.37}$$

を得る．同様の議論によって, 次が成り立つ:

$$J(\alpha) \to \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{5}{4}}}\,dx = 2 \quad \text{as} \quad \alpha \to \infty. \tag{3.38}$$

最後に, (3.14), (3.37), (3.38) を合わせることにより (3.36) が導かれる． □

3.2　定理 1.2 の証明

注意 2.2 で述べたように, u は (M) の解ならば u は (BVP) の解でもあることに注意する. 以下, 次のステップに分けて証明を行う:

▷ $\psi(1/2) < c_*$ の場合の (M) の解の存在及び一意性.

命題 2.1(vi) より, $\psi(1/2) < c_*$ のとき (M) は解をもつので, 一意性のみ示せば良い. u, $\tilde{u}$ を (M) の解とする. このとき u , $\tilde{u}$ は (BVP) の解でもあるので, $\alpha := u'(0)$, $\tilde{\alpha} := \tilde{u}'(0)$ と定めると, $u|_{[0,1/2]}$, $\tilde{u}|_{[0,1/2]}$ はそれぞれ $u(x;\alpha)$, $u(x;\tilde{\alpha})$ と表せる. さらに,

$$u\Big(\frac{1}{2};\alpha\Big) = u\Big(\frac{1}{2};\tilde{\alpha}\Big) = \psi\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

より, 命題 3.5 から $\alpha = \tilde{\alpha}$ を得る. よって $u(x;\alpha)$, $u(x;\tilde{\alpha})$ は同じ初期値をもつ (1.3) の解なので, 初期値問題の解の一意性より $u(x;\alpha) = u(x;\tilde{\alpha})$, すなわち $u = \tilde{u}$ on $[0,1/2]$ を得る. それぞれ u, $\tilde{u}$ は $x = 1/2$ について対称であったので, $u = \tilde{u}$ on $[0,1]$ も従う.

▷ $\psi(1/2) \geq c_*$ の場合の (M) の解の非存在.

条件 $\psi(1/2) \geq c_*$ において (M) の解 u が存在したとする. このとき u は (BVP) の解となるので, $\alpha := u'(0)$ とすると $u(x)|_{[0,1/2]}$ は (1.3) の解 $u(x;\alpha)$ として表せる. しかし, 命題 3.5, 3.6 より $u(\frac{1}{2};\alpha) \geq c_*$ をみたす $\alpha > 0$ は存在しないので, 矛盾である. 従って $\psi(1/2) \geq c_*$ の場合に (M) の解は存在しない.

▷ (M) の解の正則性.

命題 2.1(i) より, 既に $u''' \in BV(0,1)$ が得られているので, (1.5), すなわち $u \notin C^3([0,1])$ を示せばよい. 先の議論から, (M) の解 u は一意であり, $u'(0) =: \alpha > 0$ と置くと (1.3), (3.12) の解 $u(x;\alpha)$ を用いて $u|_{[0,1/2]} = u(x;\alpha)|_{[0,1/2]}$ と表せる. このとき, (3.4) より

$$\lim_{x \nearrow \frac{1}{2}} u'''(x;\alpha) = \frac{\beta_*(\alpha)}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{4}}} < 0 \tag{3.39}$$

が従う. もし仮に $u \in C^3(0,1)$ であるならば, 対称性より $u'''(1/2) = 0$ が得られるが, (3.39) に矛盾するため, (1.5) が得られる.

以上で定理 1.2 の証明が完了する.

3.3　Why c_* is the threshold?

本稿の最後に, (1.2) で与えられる c_* がなぜ (M) の可解性の閾値を与えるかについて考察する. 函数 $U_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を

$$U_0(x) := \begin{cases} \dfrac{2}{c_0 \sqrt[4]{1 + G^{-1}(\frac{c_0}{2} - c_0 x)^2}} & \text{if } \ 0 < x < 1, \\ 0 & \text{if } \ x = 0, 1 \end{cases} \tag{3.40}$$

にて定める. この函数 U_0 は [3] で (1.3) に Navier 境界条件 $u(0) = u(1) = 0$, $u''(0) = u''(1) = -c$ を課した下での解 u_c において, $c \uparrow c_0$ として得られる曲線である. 但し, U_0 は $\lim_{x\downarrow 0} |U_0'(x)| = \lim_{x\uparrow 0} |U_0'(x)| = \infty$ をみたすため, $\mathbb{R}^2$ の曲線として滑らかだが $U_0 \notin C^1([0,1])$ であることに注意する.

この節では, (M) の解の性質を与えていた $u(\cdot;\alpha)$ が $\alpha \to \infty$ で U_0 に収束することを示す. 但し, $u(\cdot;\alpha)$ において $\alpha := u'(0)$ であったので, 境界で勾配が発散する U_0 に $\alpha \to \infty$ で収束するこ

とは一見自然に見えるが, 境界での二階微分はそれぞれ $u''(0;\alpha)=0$, $\lim_{x\downarrow 0} U_0''(x)=-\infty$ となるため, どの意味で収束するかは明らかでないことに注意する. そのため, 次の記号を導入する.

定義 3.7. (1) 曲線 $\{(x,U_0(x))\,|\,0\le x\le 1/2\}$ の曲線長を L_U, すなわち

$$L_U := \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+U_0'(x)^2}\,dx$$

と定め, $\gamma_U : [0,L_U]\to\mathbb{R}^2$ を $(x,U_0(x))$ の弧長パラメータ表示とする.

(2) 各 $\alpha>0$ に対し, 曲線 $\{(x,u(x;\alpha))\,|\,0\le x\le 1/2\}$ の曲線長を L_α, すなわち

$$L_\alpha := \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+u'(x;\alpha)^2}\,dx$$

と定め, $\gamma_\alpha : [0,L_\alpha]\to\mathbb{R}^2$ を $(x,u(x;\alpha))$ の弧長パラメータ表示とする.

以下は $u(x;\alpha)$ が U_0 に平面曲線として収束することを意味する:

定理 3.8 ([8, Theorem A.5])**.** 曲線 γ_α, γ_U を定義 3.7 で定められる曲線とする. このとき, 以下が成り立つ:

$$\gamma_\alpha\left(\tfrac{L_\alpha}{L_U}s\right)\to\gamma_U(s)\quad\text{uniformly for } s\in[0,L_U]\quad\text{as}\quad \alpha\to\infty.$$

定理 3.8 と $U_0(\frac{1}{2})=2/c_0=c_*$ であったことから, 障害物の高さを c_* に近づけると $u(x;\alpha)$ がグラフの形を保てないことが言えるため, この事実が M_{sym} での最小元の非存在を裏付けていると言える.

参考文献

[1] L. A. Caffarelli, A. Friedman, *The obstacle problem for the biharmonic operator.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) **6** (1979), 151–184.

[2] A. Dall'Acqua, K. Deckelnick, *An obstacle problem for elastic graphs.* SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), 119–137.

[3] K. Deckelnick, H.-C. Grunau, *Boundary value problems for the one-dimensional Willmore equation.* Calc. Var. Partial Differential Equations **30** (2007), 293–314.

[4] T. Miura, *Singular perturbation by bending for an adhesive obstacle problem.* Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), 19.

[5] T. Miura, *Polar tangential angles and free elasticae.* Math. Eng. **3** (2021), Paper No. 034, 12.

[6] M. Müller, *An obstacle problem for elastic curves: Existence results.* Interfaces Free Bound. **21** (2019), 87–129.

[7] M. Müller, *The elastic flow with obstacles: small obstacle results*, Appl. Math. Optim. **84**(1, suppl.) (2021), S355–S402.

[8] K. Yoshizawa, *A remark on elastic graphs with the symmetric cone obstacle.* SIAM J. Math. Anal. **53**(2) (2021), 1857–1885.

[9] 田中 敏, 非線形常微分方程式の 2 点境界値問題入門 -正値解の存在と一意性について- `https://www.xmath.ous.ac.jp/~tanaka/pdf/2pointbvp20180820.pdf`.