

優臨界楕円型方程式の球対称解の構造

東京大学 大学院数理科学研究科 宮本 安人¹

Yasuhito Miyamoto

Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

0 序文

この小論文は、球領域における優臨界楕円型方程式のディリクレ問題の正值解の構造に関する概説（サーベイ）である。優臨界方程式について日本語で書かれた文献が殆どないため概説を試みた。しかし、球対称解に限っても多くの先行研究があるため分岐問題の周辺しか触れられず、その点にご容赦いただきたい。この概説によって優臨界の問題に興味を持っていただける方が増えれば筆者の喜びである。

1 問題設定

この概説では、1つのパラメータを持つ次の半線形楕円型問題の正值解を考える：

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $\lambda \geq 0$ 。また、領域 Ω は球領域 $B := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < 1\}$ とする。非線形項 $f(u)$ の典型的な例として

$$u^p, \quad u + u^p, \quad (u + 1)^p, \quad e^u$$

が挙げられる。 $f(u)$ が代数的増大度を持つ場合は、最高次の次数を p とする（一般の増大度を持つ場合は Section 8 を参照）。 $N \geq 3$ のとき、 $p_S := 2^* - 1 = (N + 2)/(N - 2)$ とすると、（この概説では） p_S を臨界ソボレフ指数と呼び、

$$\begin{cases} p > p_S \text{ のとき, 問題 (1.1) を優臨界,} \\ p = p_S \text{ のとき, 問題 (1.1) を臨界,} \\ p < p_S \text{ のとき, 問題 (1.1) を劣臨界} \end{cases}$$

と呼ぶ。優臨界の問題は、劣臨界や臨界の場合とは本質的に異なる現象から来る困難があることが知られている。例えば $f(u) = |u|^{p-1}u$ の場合を考える。 $p > p_S$ の場合は、ソボレフの不等式

$$\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

では、問題 (1.1) に対応するエネルギー

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^p dx$$

¹email: miyamoto@ms.u-tokyo.ac.jp

本研究は科研費（課題番号:19H01797, 19H05599）の助成を受けたものである。

の第2項を H^1 -ノルムを用いて抑えることができない ($H^1(\Omega)$ 上で I は well-defined にならない). 従って標準的な変分法は適用できない. そこで, 球領域における正值解を考えたい. Gidas-Ni-Nirenberg の定理 [20] から古典解は常に球対称解となるので次の ODE の問題に帰着される:

$$\begin{cases} u'' + \frac{N-1}{r}u' + \lambda f(u) = 0 & \text{for } 0 < r < 1, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

ODE の手法は非常に強力で, PDE の手法では到底望めないような詳細な情報を引き出すことが可能となる. 領域の一般性は諦める代わりに球対称解の詳細な構造を解明することを目標とする.

まず, 変数変換 $s = \sqrt{\lambda}r$, $v(s) = u(r)$ によって次の v に関する方程式を得る:

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{s}v' + f(v) = 0 & \text{for } 0 < s < \sqrt{\lambda}, \\ v(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

初期条件 $v(0) = \alpha$, $v'(0) = 0$ の下で (1.3) を初期値問題として解き, v の最初の零点があるとき, それを $s_0(\alpha)$ とする. 境界条件を満たすために $\lambda(\alpha) = s_0(\alpha)^2$ とすれば, $\{(\lambda(\alpha), \alpha)\} \subset \mathbb{R}^2$ が (1.1) の分岐図式となる. 従って, 分岐図式は解の L^∞ -ノルム (すなわち $u(0) = \alpha$) でグラフ表示できる (詳しくは [29] 参照). $\lambda = \lambda(\alpha)$ のグラフの形状を調べることが目標となる.

2 Gel'fand 問題と Joseph-Lundgren の問題

まず, 次の楕円型方程式の正值解の構造を考える:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda e^u = 0 & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{on } \partial B. \end{cases} \quad (2.1)$$

解構造は次のようになることが知られている:

定理 2.1. $N > 2$ とする. このとき, (2.1) は次の正值特異解を持つ:

$$(\lambda, u) = (\lambda^*, -2 \log r + \log 2(N-2)).$$

ここで, $\lambda^* = 2(N-2)$. また $\lambda(0) = 0$ で $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha) = \lambda^*$ となり, 次を満たす.

(i) $2 < N < 10$ ならば, $\alpha \rightarrow \infty$ において $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りで振動する (折り返し点が無限個存在する). 特に, $\lambda = \lambda^*$ のとき正值古典解を無限個持つ (図 1 の左)

(ii) $N \geq 10$ ならば, $\lambda(\alpha)$ は狭義単調増加する (折り返し点を持たない). 従って, $0 < \lambda < \lambda^*$ ならばただ 1 つ正值古典解を持つ (図 1 の右)

(2.1) は Gel'fand 問題と呼ばれ, Gel'fand [18] において $N = 3$ の場合に定理 2.1 が示された. その後, Joseph-Lundgren [26] により $N \geq 4$ の場合が示された. この研究により, 優臨界の場合は劣臨界の場合と異なり古典解の集合が $L^\infty(\Omega)$ 内で有界とは限らないことが明らかになった. また, 簡単な計算で特異解は $H^1(\Omega)$ に属し弱解となることが分かるので, 弱解であっても解が有界とは限らないことが分かる. さらに, 定理 2.1 によって $N = 10$ がある種の臨界次元となることが明らかになった. 証明は, 変数変換

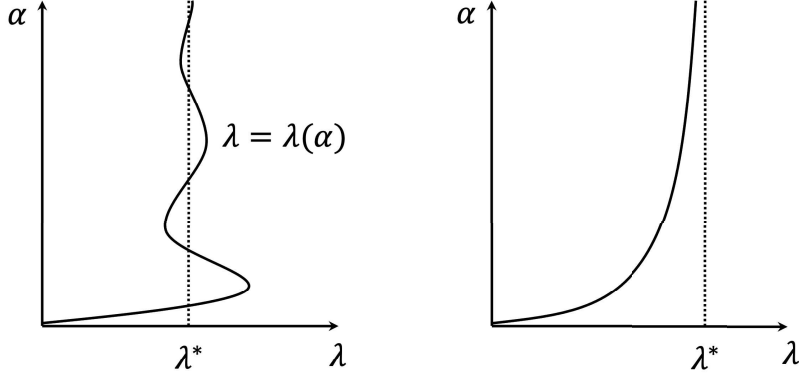


図 1: 問題 (2.1) の分岐図式. 左図が定理 2.1 (i), 右図が定理 2.1 (ii). 同じ特徴を持った分岐図式は他の定理でも現れる.

$$t := -\log r, \quad x(t) = u(r) - (-2 \log r + \log 2(N-2) - \log \lambda) \quad (2.2)$$

により自励系

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (N-2)y - 2(N-2)(e^x - 1) \end{cases}$$

となるので相平面解析の方法による.

[26] では (2.1) の非線形項を代数的増大度を持つものに代えた問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda(u+1)^p = 0 & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{on } \partial B. \end{cases} \quad (2.3)$$

も研究されており次が示された.

定理 2.2. $N > 2, p > p_S$ とする. このとき, (2.3) は次の正值特異解を持つ:

$$(\lambda, u) = \left(\lambda^*, r^{-\frac{2}{p-1}} - 1 \right), \quad \text{ここで } \lambda^* := \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right).$$

また $\lambda(0) = 0$ で $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha) = \lambda^*$ となり次を満たす.

(i) $2 < N < 11$ ならば, $\alpha \rightarrow \infty$ において $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りで振動する. 特に, $\lambda = \lambda^*$ のとき正值古典解を無限個持つ (図 1 の左).

(ii) $N \geq 11$ かつ $p \geq p_{JL}$ ならば, $\lambda(\alpha)$ は狭義単調増加する. 従って, $0 < \lambda < \lambda^*$ ならばただ 1 つ正值古典解を持つ (図 1 の右). 一方, $N \geq 11$ かつ $p < p_{JL}$ ならば, $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りで振動する (図 1 の左). ここで,

$$p_{JL} := \begin{cases} 1 + \frac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}} & \text{if } N > 10, \\ \infty & \text{if } 2 < N \leq 10. \end{cases}$$

問題 (2.3) では, 指数 p_{JL} が重要な役割を果たしていることがわかる. p_{JL} は 11 次元以上のときに現れ, ジョセフ・ルンドグレンの指数と呼ばれている. 簡単な計算により $p_{JL} > p_S$ ($N > 2$) となることがわかる. 定理 2.2 の証明は, 2 つの変数変換

$$s = \sqrt{\lambda}r, \quad v(s) = u(r) + 1, \\ t = -\log r, \quad x(t) = v(s) / \left\{ \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right\}^{1/(p-1)} s^{-2/(p-1)} \quad (2.4)$$

により ((2.4) は Emden 変換または Lane-Emden 変換などと呼ばれており 100 年以上前の文献 Emden [14] において既に用いられている), 自励系

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \left(N - 2 - \frac{4}{p-1}\right)y + \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1}\right)(x - x^p) \end{cases}$$

となるので相平面解析の方法による.

問題 (2.1) と (2.3) は完全な分岐図式が得られる数少ない例であり, 定理 2.1 と 2.2 はこの分野を牽引する最重要の先行研究となったが, 証明は技巧的な変数変換 (2.2) と (2.4) に依存しており, この 2 つの例を基礎として一般の非線形項 $f(u)$ を持つ問題 (1.1) を研究するには隔たりがあった.

3 優臨界 Brezis-Nirenberg 問題

Brezis-Nirenberg [4] は, $p = p_S$ のとき Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U + U^p = 0 & \text{in } \Omega, \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

の正值解の存在と非存在を研究した. Ω が星形領域のとき, 臨界 ($p = p_S$) かつ $\lambda = 0$ ならばポホザエフの恒等式から (3.1) は正值解を持たないことが知られている. そこで, [4] は低次の摂動 ($\lambda > 0$) を加えた場合に正值解が存在するか? について詳細に調べた. [4] はその後の研究に大きな影響を与え, これまで様々な拡張がなされてきたが, その一つとして優臨界の問題 ($p > p_S$) も研究されている. 変数変換 $U = \lambda^{1/(p-1)}u$ によって (3.1) は次のようになるので (1.1) の枠組みに入る:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda(u + u^p) = 0 & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{on } \partial B. \end{cases} \quad (3.2)$$

定理 3.1. $N > 2$, $p > p_S$ とし, μ_1 を B 上のディリクレラプラシアン第 1 固有値とする. (3.2) は正值特異解 (λ^*, u^*) を持ち, $u^* \in H^1(B)$ となる. また, 分岐曲線は $\lambda(0) = \mu_1$ で $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha) = \lambda^*$ を満たす.

(i) $p < p_{JL}$ ならば, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りを振動する. 各正值古典解のモース指数は有限となり, 特異解 (λ^*, u^*) のモース指数は無限である. 特に, $\lambda = \lambda^*$ のとき正值古典解を無限個持つ.

(ii) $p \geq p_{JL}$ ならば古典解と特異解のモース指数は有限である.

定理 3.1 は $N = 3$ の場合が Budd-Norbury [7] によって示された. $N \geq 4$ の場合は, Merle-Peletier [31] によって特異解の存在と $\lambda(\alpha) \rightarrow \lambda^*$ が示された. $N \geq 4$ における $\lambda(\alpha)$ の振動とモース指数は Guo-Wei [21] によって示された. [21] より前に Dolbeault-Flores [12] で, 部分的に定理 3.1 が力学系理論を用いて示されている. 定理 3.1 において, $\lambda(0) = \mu_1$ は自明解から局所分岐理論により示される性質なので優臨界の現象とは関係ない. 定理 3.1 の証明は, 特異解の存在は Emden 変換と ODE 的な手法による. 特に, 特異解は具体的に表示できないが, 抽象的な方法で存在が示され, さらに原点近くにおける漸近展開

$$u^*(r) = \left\{ \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right\}^{1/(p-1)} (\sqrt{\lambda^*} r)^{\frac{-2}{p-1}} (1 + o(1)) \quad \text{as } r \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

が得られる (計算は複雑になるが高次の項まで計算できる). $\lambda(\alpha)$ の振動については特異解と古典解の交点数を用いる. 定理 3.1 で得られた正值特異解の一意性が気になるところだが [4, 12, 21, 31] では示されていない (後年, 球対称正值特異解の一意性が成り立つことが示された, 5 節の定理 5.1 を参照). (3.2) と類似の $\Delta u + \lambda u^q + u^p = 0$ ($1 \leq q < p_S < p$) や $\Delta u + \lambda(u^q + u^p) = 0$ についても, [6, 12, 31] において同種の定理が成り立つことが示されている.

定理 3.1 の重要な点は次の 2 つであると思われる: (i) 2 つの例 (2.3) と (3.2) より, 代数的増大度を持つ場合は, 最高次数 p に対して $p < p_{JL}$ と $p \geq p_{JL}$ の場合で解構造が大きく異なっているように見える, (ii) 特殊な変数変換が無くても他の方法で分岐図式やモース指数などの性質を調べることができる.

4 Brezis-Vázquez の問題

$f(u)$ は, 下記を満たす関数とする:

$$u \geq 0 \text{ において連続, 正值, 狭義単調増加, 下に凸で, } \lim_{u \rightarrow \infty} f(u)/u = \infty. \quad (4.1)$$

条件 (4.1) の下で, $0 < \lambda < \lambda^*$ において (1.1) が最小解 (λ, u_λ) からなる分岐の枝を持ち ($u_\lambda(x)$ は λ に対して単調増大となる), $\lambda > \lambda^*$ において古典解を持たないような $\lambda^* > 0$ が存在することが比較的簡単に示される. Brezis-Vázquez [5] では, $\lambda = \lambda^*$ において (1.1) は非常に弱い意味の解 $u^* \in L^1(\Omega)$ (Extremal solution と呼ぶ) が存在することが示された. [5] の主定理の一つが次である:

定理 4.1. (1.1) は非有界な弱解 $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ を持つとする. もし

$$\lambda \int_{\Omega} f'(v)\phi^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \text{ for all } \phi \in C_0^1(\Omega) \quad (4.2)$$

ならば $\lambda = \lambda^*$ かつ $v = u^*$. 逆に $\lambda = \lambda^*$ かつ $v = u^*$ ならば (4.2) が成立する (この定理は, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ が滑らかな境界を持つ一般領域でも成り立つ).

定理 4.1 を一言で述べると次となる:

$$(\lambda^*, u^*) \text{ が安定} \iff (\lambda^*, u^*) \text{ が Extremal solution}$$

$\Omega = B$ では分岐の枝が $\lambda = \lambda(\alpha)$ とグラフ表示でき (定理 8.1 で見るように適当な f の仮定の下で) 正值特異解が存在するので, この定理は分岐理論の視点から見ると折り返し点を持たないための ($\lambda(\alpha)$ が狭義単調増加となるための) 必要十分条件とも言える. 従って, 次が結論される:

$$(\lambda^*, u^*) \text{ が安定} \iff \text{折り返し点を持たない (図 1 の右)}$$

[5] に従い, 上記の「 \implies 」を 2 つの具体例で確かめたい. $\Omega = B$ かつ $f(u) = e^u$ の場合, 定理 2.1 で与えられる特異解を持つ. それを (4.2) に代入し,

$$2(N-2) \int_B \frac{\phi^2}{r^2} dx \leq \int_B |\nabla \phi|^2 dx.$$

Hardy の不等式

$$\frac{(N-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2}{r^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 dx \text{ for } \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の最良定数と比べると $2(N-2) \leq (N-2)^2/4$ のとき (すなわち $N \geq 10$ のとき) (4.2) が成立する. 従って, $N \geq 10$ のとき分岐図式は定理 2.1(ii) の形となり図 1 の右と符合する. 次に, $\Omega = B$ かつ $f(u) = (u+1)^p$ の場合, 定理 2.2 で与えられる特異解を持つので, それを (4.2) に代入し,

$$\frac{2p}{p-1} \left(N-2 - \frac{2}{p-1} \right) \int_B \frac{\phi^2}{r^2} dx \leq \int_B |\nabla u|^2 dx.$$

Hardy の不等式の最良定数と比べると $\frac{2p}{p-1} \left(N-2 - \frac{2}{p-1} \right) \leq \frac{(N-2)^2}{4}$ のとき (この不等式を解くと p_{JL} が現れ, 条件が $p \geq p_{JL}$ となる) (4.2) が成立する. 従って, $p \geq p_{JL}$ のとき分岐図式は定理 2.2(ii) の形となり図 1 の右と符合する. p_{JL} の導出については, 複数の方法が知られているが, この方法が最も簡単なものと思われる.

Brezis-Vázquez [5] の研究によって, 特異解の性質 (定理 4.1 では安定性) と古典解全体の構造 (分岐図式) は密接な関係があり, 特に $\Omega = B$ ならば (4.2) を確かめることによって分岐図式が完全に決定できることが明らかになった. 従って, 分岐図式を研究する上で, 特異解の存在とその性質を研究することの重要性が認識された. 標語的に述べると:

$$\text{特異解は全ての古典解の情報を持っている.} \quad (4.3)$$

5 代数的増大度を持つときの分岐図式

[33, 38, 39] において代数的増大度を持つ下記の (5.1) の場合に, (1.1) が取りうる分岐図式の種類が試みられた:

$$f(u) \text{ は } u \geq 0 \text{ で正值, } C^1 \text{ 級, さらに } 1 < q < p \text{ が存在し,} \\ f(u) = u^p + O(u^q) \text{ as } u \rightarrow \infty, \quad f'(u) = pu^{p-1} + O(u^{q-1}) \text{ as } u \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

定理 5.1. $N > 2, p > p_S$ とし, f は (5.1) を満たすとする. (1.1) は一意的な正值特異解 (λ^*, u^*) を持ち, $u^* \in H^1(B)$ となる. また, 分岐曲線は $\lambda(0) = 0$ で $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha) = \lambda^*$ を満たす.

(i) $p < p_{JL}$ ならば, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りを振動する. 特異解 (λ^*, u^*) のモース指数は無有限大である.

(ii) $p > p_{JL}$ ならば特異解のモース指数は有限である.

この定理によって $\lambda(\alpha)$ の振動は低階項 $O(u^q)$ には依らず p の条件 $p_S < p < p_{JL}$ にのみ依存することが分かった.

定理 5.1 の別の重要な点は特異解の存在と一意性と古典解の特異解への収束性 ($\lambda(\alpha) \rightarrow \lambda^*$ と $u \rightarrow u^*$ in $C_{loc}^2(B \setminus \{O\})$) である. 特に特異解の一意性については (4.3) から強く示唆されており, 実際 [5, 31] で予想されていたが, 技術的に難しく特殊な非線形項を除いて知られていなかった. 一意性についての先行研究は, $f(u) = u^p$ ($p > p_S$) のとき [43] により示され, $f(u) = -u + u^p$ ($p > p_{JL}$) のとき Chern *et al.* [8] により示された. (5.1) の 2 行目が $p > p_S$ で成り立つとき [38] において示され, 最終的に,

$$f(u) = u^p + o(u^p) \text{ as } u \rightarrow \infty, \quad f'(u) = pu^{p-1} + o(u^{p-1}) \text{ as } u \rightarrow \infty.$$

が、 $p > p_S$ で成り立つとき [39] で示された。[39] では、特異解の一意性の他に特異解の存在と古典解の特異解への $C_{loc}^2(B \setminus \{O\})$ における収束も示されている。

全領域の問題は優臨界 Schrödinger 方程式の定在波解と密接な関係がある。その視点からの研究は、[23, 24] が挙げられる。

ところで、定理 5.1 から特異解と分岐図式の (定理 4.1 以外の) 関係が示唆されていないだろうか? 定理 4.1 と 5.1 から着目すべき点は特異解のモース指数と分岐曲線の折り返し点の数にあるように思われる。そこで、次が予想される:

予想 5.2. 特異解のモース指数と、分岐曲線の折り返し点の数は一致する。

定理 5.1(i) は、特異解のモース指数が無限大の場合 (このとき折り返し点の数も無限大) であり、定理 4.1 はモース指数が 0 の場合 (このとき折り返し点の数は 0) であると考えられる。[33] では、特異解のモース指数が有限であり、折り返し点の数も有限となる例を挙げているが、両者が一致していることの証明までは到達していない。

定理 4.1 と 5.1 と予想 5.2 をまとめると、代数的増大度を持つ場合に次の分岐図式の分類が得られる (予想も含む)。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_S < p < p_{JL} \\ \\ p > p_{JL} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{定理 5.1(i)}} \\ \\ \xrightarrow{\text{定理 5.1(ii)}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m(u^*) = \infty \\ \\ \text{or} \\ 1 \leq m(u^*) < \infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{and} \\ \\ \xrightarrow{\text{定理 4.1}} \\ \\ \xrightarrow{\text{予想 5.2}} \end{array} \begin{array}{l} \text{折り返し点無限個} \\ \\ \text{折り返し点なし} \\ \\ \text{折り返し点有限個?} \end{array}$$

図 2: 非線形項が代数的増大度 p を持つ場合の分岐図式の分類. p は $f(u)$ の増大度, $m(u^*)$ は特異解のモース指数.

図 2 において $p = p_{JL}$ の場合が含まれていない。この場合は、定理 2.2 を見ると $p > p_{JL}$ の方に含まれると予想されるが、特異解のモース指数の有限性を示すためには、特異解の高次の漸近展開が必要となり f の低次項にも仮定が必要と思われる。低次項の仮定なしにモース指数の有限性が成り立つかは現時点では不明である。

6 指数的増大度を持つときの分岐図式

[34, 39] において、指数的増大度を持つ下記の (6.1) の場合に、(1.1) が取りうる分岐図式の分類が得られた:

$$f(u) \text{ は } u \geq 0 \text{ で正值, } C^1 \text{ 級, さらに } 0 < \delta < 1 \text{ が存在し,} \\ f(u) = e^u + O(e^{(1-\delta)u}) \text{ as } u \rightarrow \infty, \quad f'(u) = e^u + O(e^{(1-\delta)u}) \text{ as } u \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

定理 6.1. $N > 2$ とし, f は (6.1) を満たすとする. (1.1) は一意的な正值特異解 (λ^*, u^*) を持ち, 分岐曲線は $\lambda(0) = 0$ で $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha) = \lambda^*$ を満たす.

(i) $N < 10$ ならば, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りを振動する. 特異解 (λ^*, u^*) のモース指数は無限大である.

(ii) $N \geq 11$ ならば特異解のモース指数は有限である.

この定理によって指数増大の場合も、 $\lambda(\alpha)$ の振動は低次項 $O(e^{(1-\delta)u})$ には依らず次元 N にのみに依存することが分かった。

定理 6.1 の重要な点は、定理 5.1 と同様に特異解の存在と一意性と古典解の特異解への収束 ($\lambda(\alpha) \rightarrow \lambda^*$ と $u \rightarrow u^*$ in $C_{loc}^2(B \setminus \{O\})$) である。一意性についての先行研究は、 $f(u) = e^u$ のとき Mignot-Puel [32] によって示された。その後、[39] によって、

$$f(u) = e^u + o(e^u) \text{ as } u \rightarrow \infty, \quad f'(u) = e^u + o(e^u) \text{ as } u \rightarrow \infty$$

が成り立つときに示された。[39] では、特異解の一意性の他に特異解の存在と古典解の特異解への $C_{loc}^2(B \setminus \{O\})$ における収束も示されている。代数的増大度のときと同様に分岐図式は図 3 のように分類される (予想も含む)。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 < N < 10 \\ N \geq 11 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{定理 6.1(i)}} \\ \xrightarrow{\text{定理 6.1(ii)}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m(u^*) = \infty \\ m(u^*) = 0 \\ \text{or} \\ 1 \leq m(u^*) < \infty \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{and} \\ \xrightarrow{\text{定理 4.1}} \\ \xrightarrow{\text{予想 5.2}} \end{array} \begin{array}{l} \text{折り返し点無限個} \\ \text{折り返し点なし} \\ \text{折り返し点有限個?} \end{array}$$

図 3: 非線形項の主要部が e^u の場合の分岐図式の分類。 $m(u^*)$ は特異解のモース指数。

図 3 では $N = 10$ の場合が含まれていない。代数的増大度のときと同様に、定理 2.1 を見ると $N \geq 11$ の方に含まれると予想されるが、 f の低次項の仮定なしにこの予想が成り立つかは現時点では不明である。

7 極限方程式の交点数と分岐図式

定理 5.1 (i) と 6.1 (i) の証明では、極限方程式の特異解と古典解の交点数が鍵となっている。代数的増大の場合に手法の概略を解説する。 f は (5.1) を満たすとし (1.2) を考える。変数変換 $s = \sqrt{\lambda}r$, $v(s) = u(r)$ によって v の方程式 (1.3) が得られる。ここで、 $v(0) = \alpha$, $v'(0) = 0$ とする初期値問題を考える。すると、

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{s}v' + f(v) = 0 & \text{for } 0 < s < \sqrt{\lambda}, \\ v(0) = \alpha, v'(0) = 0, v(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

さらに、次のスケール変換

$$t = \alpha^{\frac{p-1}{2}}s, \quad \tilde{v}(t) = \frac{v(s)}{\alpha}. \quad (7.1)$$

を考えると、 \tilde{v} の満たす方程式は、

$$\begin{cases} \tilde{v}'' + \frac{N-1}{t}\tilde{v}' + \tilde{v}^p + \alpha^{-p}g(\alpha\tilde{v}) = 0 & \text{for } 0 < t < \sqrt{\lambda}\alpha^{\frac{p-1}{2}}, \\ \tilde{v}(0) = 1, \tilde{v}'(0) = 0, \tilde{v}(\sqrt{\lambda}\alpha^{\frac{p-1}{2}}) = 0. \end{cases}$$

g に関する仮定 (5.1) を考えると $\alpha \rightarrow \infty$ において $\alpha^{-p}g(\alpha\tilde{v}) \rightarrow 0$ と予想される。従って極限方程式は次のようになる

$$\begin{cases} w'' + \frac{N-1}{t}w' + w^p = 0 & \text{for } t > 0, \\ w(0) = 1, w'(0) = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

すなわち,

$$\tilde{v} \rightarrow w \text{ in } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N) \text{ as } \alpha \rightarrow \infty.$$

一方, 抽象的な方法で構成した特異解の漸近展開 u^* は (3.3) で与えられる. スケール変換 $v^*(s) = u^*(r)$ $s = \sqrt{\lambda}r$ を適用し, さらにスケール変換 (7.1) を適用すると,

$$\tilde{v}^*(t) = \left\{ \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right\}^{1/(p-1)} t^{-\frac{2}{p-1}} (1 + o(1)).$$

極限 $\alpha \rightarrow \infty$ をとると,

$$\tilde{v}^* \rightarrow w^* \text{ in } C_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{O\}) \text{ as } \alpha \rightarrow \infty.$$

ここで,

$$w^*(t) := \left\{ \frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right\}^{1/(p-1)} t^{-\frac{2}{p-1}}. \quad (7.3)$$

この関数は全領域上の Emden 方程式 (7.2) の厳密な正值特異解である. 従って, u と u^* は変数変換によって \tilde{v} と \tilde{v}^* になり, $\alpha \rightarrow \infty$ で w と w^* に収束するので w と w^* の解の形状が重要となる. ここでは w と w^* の交点数を考えたいが, 次の定理が知られている:

定理 7.1. $N > 2$, $p > p_S$ とする. $w_1(t)$ を $w_2(t)$ ($w_1 \neq w_2$) を $\Delta w + w^p = 0$ の正值球対称古典解とし w^* を特異解 (7.3) とするとき, 次が成立する.

(i) $p < p_{JL}$ のとき, $\mathcal{Z}[w_1 - w_2] = \infty$, $\mathcal{Z}[w_1 - w^*] = \infty$.

(ii) $p \geq p_{JL}$ のとき, $\mathcal{Z}[w_1 - w_2] = 0$, $\mathcal{Z}[w_1 - w^*] = 0$.

ここで, $\mathcal{Z}[w_1 - w_2]$ は $t \geq 0$ において $w_1(t) = w_2(t)$ となる集合の濃度 (w_1 と w_2 の交点数) とする.

定理 5.1 (i) の証明. 定理 7.1 より $p_S < p < p_{JL}$ ならばスケール変換する前の関数 v と v^* についても, $0 \leq r < \sqrt{\lambda}$ における交点数が $\alpha \rightarrow \infty$ のときに無限大となることが示される. α を大きくするとき, v と v^* の各交点は陰関数定理から α に連続的に依存し, 交点が消滅したり出現したり合体や分裂することはないので (それが起きた α で陰関数定理と矛盾する), 任意の固定された s の区間の端で交点の出入りがなければ交点数は保存される. 一方, $v(\sqrt{\lambda(\alpha)}, \alpha) = 0$ なので, もし常に $v^*(\sqrt{\lambda(\alpha)}) > 0$ か $v^*(\sqrt{\lambda(\alpha)}) < 0$ ならば α を大きくしても交点数が保存されるので, $\alpha \rightarrow \infty$ のときに交点数が無限大に発散することに矛盾する. 従って, α が大きくなるにつれて $v^*(\sqrt{\lambda(\alpha)}) > 0$ と $v^*(\sqrt{\lambda(\alpha)}) < 0$ が交互に繰り返され, それは $\sqrt{\lambda(\alpha)}$ が v^* の最初の零点 $\sqrt{\lambda^*}$ の周りを振動することを意味している. 従って, 折り返し点は無限個存在する (定理 5.1 (i)). \square

上記の証明をさらに簡潔に述べれば, スケール変換によって標準的な方程式である $\Delta u + u^p = 0$ に変換し, この方程式の特異解と古典界の交点数が無限であることが無限個の折り返し点に対応している. 従って, スケール変換と交点数が鍵となっている.

指数増大する非線形項の場合 (条件 (6.1) を満たす場合) は, (7.1) の代わりに次のスケール変換を用いる:

$$t = e^{\alpha/2} s, \quad \tilde{v}(t) = v(s) - \alpha.$$

すると, 同様の議論で極限方程式が次のようになる:

$$\begin{cases} w'' + \frac{N-1}{t} w' + e^w = 0 & \text{for } t > 0, \\ w(0) = 0, w'(0) = 0. \end{cases}$$

従って, 交点数に関する次の定理が重要となる.

定理 7.2. $N > 2$ とする. $w_1(t)$ と $w_2(t)$ ($w_1 \neq w_2$) を $\Delta w + e^w = 0$ の球対称古典解とし $w^*(t) = -2 \log t + \log 2(N-2)$ を特異解とするととき, 次が成立する.

(i) $N < 10$ のとき, $\mathcal{Z}[w_1 - w_2] = \infty$, $\mathcal{Z}[w_1 - w^*] = \infty$.

(ii) $N \geq 10$ のとき, $\mathcal{Z}[w_1 - w_2] = 0$, $\mathcal{Z}[w_1 - w^*] = 0$.

以降の議論は代数的増大の場合と同じである. 結論は $2 < N < 10$ のとき折り返し点の数は無限大となる (定理 6.1 (i))

8 q 指数, 擬スケールとその極限方程式

この節では [37, 40] に沿って, q 指数, 擬スケールとその極限方程式について解説する. f は次の仮定 (f1) と (f2) を満たすとする:

$f \in C^2$, ある $u_0 \geq 0$ が存在し, $f(u) > 0$ と $F(u) < \infty$ が $u \geq u_0$ で成り立つ, (f1)

極限 $q = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f'(u)^2}{f(u)f''(u)}$ が存在して有限値. (f2)

ここで, $F(u) = \int_u^\infty ds/f(s)$, もし (f2) が成り立つとき $q \geq 1$ が示される. また q 指数はロピタルの定理から次の極限でも与えられる

$$q = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u)f'(u). \quad (8.1)$$

f の増大度を $p = \lim_{u \rightarrow \infty} uf'(u)/f(u)$ と定義すると, ロピタルの定理を適用し,

$$\frac{1}{p} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)/f'(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{f(u)f''(u)}{f'(u)^2} \right) = 1 - \frac{1}{q}.$$

従って, $1/p + 1/q = 1$. q 指数は増大度の共役指数となることが分かる. p 指数では指数的増大は $p = \infty$ となってしまうが q 指数では $q = 1$ となり代数的増大 ($q > 1$) の場合と統一的に扱うことができる. (f2) の q 指数の定義は [13], (8.1) は [16] で導入された.

以下, $v(s)$ は (1.3) の解とし, $w(t)$ は次で定義する:

$$w(t) = F^{-1}[\lambda^{-2}F(v(s))], \quad t = \frac{s}{\lambda}. \quad (8.2)$$

ここで, $\lambda > 0$ はパラメータ. (8.2) は藤嶋陽平氏 (静岡大学) [15] によって導入された. $w(t)$ が満たす方程式は,

$$w'' + \frac{N-1}{t}w' + f(w) + \frac{F(v)f'(v) - F(w)f'(w)}{F(w)f(w)}w'^2 = 0.$$

もし, v が大きい場合, $F(v)f'(v) \rightarrow q$ から極限方程式が適切な仮定の下で次のようになることが示される

$$w'' + \frac{N-1}{t}w' + f(w) + \frac{q - F(w)f'(w)}{F(w)f(w)}w'^2 = 0. \quad (8.3)$$

直接計算によって, $w(t)$ が (8.3) の解のとき $F^{-1}[\lambda^{-2}F(w(\lambda t))]$ も解となり ((8.3) は (8.2) で不変), $q < N/2$ のとき次の特異解を持つことが確かめられる:

$$w^*(t) = F^{-1} \left[\frac{t^2}{2N - 4q} \right].$$

$$\begin{array}{ccc}
\Delta w + f(w) + \frac{q-F(w)f'(w)}{F(w)f(w)} |\nabla w|^2 = 0 & \xleftrightarrow[\text{equivalent}]{F[w(y)]=F_q[\bar{w}(y)]} & \Delta \bar{w} + f_q(\bar{w}) = 0 \\
\uparrow \text{scaling limit as } \lambda \downarrow 0 & & \uparrow \text{scale invariant (self-similar)} \\
(\lambda^2 F[\bar{w}(y)]=F[v(x)], \lambda y=x) & & (\lambda^2 F_q[\bar{w}(y)]=F_q[v(x)], \lambda y=x) \\
\Delta v + f(v) = 0 \text{ with } 1 \leq q < q_S := p_S^* & & \Delta v + f_q(v) = 0
\end{array}$$

表 1: (元の) v の方程式, 擬スケールによる極限方程式 (w), 同値な方程式 (\bar{w}) の関係.

ここでは, 変換 (8.2) を擬スケールと呼ぶことにする. (8.3) は擬スケールによる極限方程式となり, それは擬スケール不変ということになる. (8.3) は一見すると複雑だが, 技巧的な変数変換

$$\bar{w}(t) = F_q^{-1}[F(w(t))], \quad (8.4)$$

$$\text{ここで, } F_q(w) = \int_w^\infty \frac{ds}{f_q(s)}, \quad f_q(w) = \begin{cases} w^p, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ if } q > 1, \\ e^w & \text{if } q = 1 \end{cases}$$

によって, (驚くべきことに) 次のように変換される:

$$q > 1 \text{ の場合は } \Delta \bar{w} + \bar{w}^p = 0, \quad q = 1 \text{ の場合は } \Delta \bar{w} + e^{\bar{w}} = 0$$

(上記の2つの \bar{w} の方程式は通常のスケール変換で不変となる!). 従って, (f1) と (f2) を満たす任意の増大する非線形項を持つ方程式 $\Delta v + f(v) = 0$ は, 標準的な2つの方程式 $\Delta \bar{w} + \bar{w}^p = 0$ と $\Delta \bar{w} + e^{\bar{w}} = 0$ と何らかの意味で近いことが示唆される (8節内の変数変換は球対称ではない場合にも有効である). v, w, \bar{w} の関係は表1のようになる. (f1) と (f2) が成り立つ例として, $\Delta u + u^p (\log(u+e))^\gamma = 0$ (このとき $q = p/(p-1)$), $\Delta u + \exp(u^p) = 0$ (このとき $q = 1$), $\Delta u + \exp(\dots \exp(u) \dots) = 0$ (n 回合成した関数で, このとき $q = 1$) などが挙げられ, 広範な非線形項がこのクラスに含まれる. この変数変換は [16] で導入されたが, [16] では一般的な増大度を持つ放物型方程式の時間局所解の存在と非存在について考察されている.

(1.1) を解析する上で重要となる (1.3) の特異解について次が成り立つ:

定理 8.1. $N > 2$ とし, $q_S = (N+2)/4$ を p_S の共役指数とする. f は (f1) と (f2) を満たすとする. もし, $q < q_S$ ならば, 方程式 $v'' + \frac{N-1}{s}v' + f(v) = 0$ は $0 < r < r_0$ において一意的な特異解 $v^*(s)$ を持ち, 次を満たす:

$$v^*(s) = F^{-1} \left[\frac{s^2}{2N-4q} (1 + o(1)) \right] \quad \text{as } s \rightarrow 0.$$

さらに, 古典解 $v(s, \alpha)$ は次を満たす:

$$v(s, \alpha) \rightarrow v^*(s) \text{ in } C_{loc}^2(0, s_1] \text{ as } \alpha \rightarrow \infty. \quad (8.5)$$

この定理から, 簡単なスケール変換の議論によって (1.1) も一意的な特異解 $(\lambda^*, u^*(r))$ を持つことが分かる.

$f(u) = \exp(u^p)$ のとき [28] のとき特異解の存在と漸近展開, (1.1) の分岐図式について研究されている. 特に, $2 < N < 10$ のとき次節の定理 9.1 (i) が示されている. そこでは, (擬スケールの代わりに) [9] で用いられている変換が鍵となっている. [9] は任意領域上で $f(u) = \exp(u^p)$ の場合に (1.1) の分岐図式が関数解析の抽象的理論を用いて研究されてい

る。また, $f(u) = \exp(\cdots \exp(u) \cdots)$ のとき [19] において漸近展開などの特異解の性質が詳しく研究されている。それらによると, 例えば $\Delta v + \exp(v^p) = 0$ の球対称特異解は

$$v^*(s) = \left(-2 \log s - \frac{p-1}{p} \log(-2 \log s) + \log \frac{2N-4}{p} + o(1) \right)^{1/p} \text{ as } s \rightarrow 0,$$

$\Delta v + \exp(\cdots \exp(v) \cdots) = 0$ の球対称特異解は

$$v^*(s) = \log^n \left(-2 \log s + \log(2N-4) - \sum_{k=1}^n \log^k(-2 \log s) \right) + o(1) \text{ as } s \rightarrow 0$$

($\log^n s$ は $\log s$ を n 回合成した関数を表すものとする) と漸近展開できるが, 定理 8.1 を用いると, これらを統一的な方法で得ることができる。

9 一般の増大度を持つ場合の分岐図式

(f1) と (f2) 満たす f に対して分岐問題 (1.2) を考える。さらに, q 指数は $q < q_S$ (優臨界) を満たすとする。定理 8.1 から一意的な特異解 $(\lambda^*, u^*(r))$ が存在する。 $f(0) > 0$ なので $\lambda(0) = 0$, (8.5) から $\lambda(\alpha) \rightarrow \lambda^*$ を満たす。

$q_{JL} = (N - 2\sqrt{N-1})/4$ を p_{JL} の共役指数とする。まず, $q_{JL} < q < q_S$ の場合を考える。 $q > 1$ ならば極限方程式は (8.4) によって $\Delta \bar{w} + \bar{w}^p = 0$ ($p = q/(q-1)$) に変換される。 $q_{JL} < q < q_S$ より $p_S < p < p_{JL}$ であるので, 定理 7.1 (i) が成り立つ。一方, $q = 1$ ならば極限方程式は $\Delta \bar{w} + e^{\bar{w}} = 0$ に変換される。 $q_{JL} < q = 1 < q_S$ より $2 < N < 10$ であるので, 定理 7.2 (i) が成り立つ。両者を合わせると, $q_{JL} < q < q_S$ のときは, 古典解 $\bar{w}(t, \alpha)$ と特異解 $\bar{w}^*(t)$ の交点数は無有限大となる。従って, 擬スケールによって変換される前の問題 (1.3) の古典解 $v(s, \alpha)$ と特異解 $v^*(s)$ の原点近くの区間 $(0, s_2]$ における交点数も $\alpha \rightarrow \infty$ において発散することが示される。従って定理 7.1 (i) と定理 7.2 (i) と同様に無有限個の折り返し点の存在が示される。

次に, $q \leq q_{JL}$ の場合を考える。この場合は, $p \geq p_{JL}$ となるので定理 2.1 (ii) や 2.2 (ii) のように折り返し点がない (もしくは予想 5.2 のように折り返し点が有限個の) 場合に相当する。現状では折り返し点の数が 1 以上の有限個の場合を解析する有効な手法が知られていないので, 定理 4.1 を用いて折り返し点の数が 0 となるような f の十分条件を求めたい。定理 4.1 は $\lambda^* f'(u^*)$ を計算するために特異解 (λ^*, u^*) の具体的な表示が必要となる。しかし, 一般の f では (λ^*, u^*) の表示を得ることは現実的には不可能である。そこで, [40] において f のみから判定できる十分条件を得た (定理 9.1 (iii)):

定理 9.1. $N > 2$ とする。 $f(u)$ は $u \geq 0$ において正值で (f1) と (f2) を満たし $q < q_S$ とする。 (1.1) は一意的な正值の特異解 (λ^*, u^*) を持つ。また, 分岐曲線は $\lambda(0) = 0$ で $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha) = \lambda^*$ を満たす。

(i) $q_{JL} < q$ ならば, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $\lambda(\alpha)$ は λ^* の周りを振動する。特異解 (λ^*, u^*) のモース指数は無有限大である。

(ii) $q < q_{JL}$ ならば特異解の指数は有限である。

(iii) $q \leq q_{JL}$ かつ, $f(u) > 0, f''(u) > 0$ for $u \geq 0$ とする。 $q_0 \leq F(u)f'(u) \leq q_1$ for $u \geq 0$ となる q_0, q_1 が,

$$q_1(2N - 4q_0) \leq \frac{(N-2)^2}{4}$$

を満たすならば, $\lambda(\alpha)$ は狭義単調増加である。従って, 折り返し点を持たない。

定理 6.1 と 5.1 は両方とも定理 9.1 に含まれることになった。

定理 9.1 を用いると $f(u) = \exp(\cdots \exp(u) \cdots)$ (n 回合成) のとき, $2 < N < 10$ で定理 9.1 (i) が成り立つので (1.1) の分岐図式は図 1 の左のようになり, $N \geq 11$ のとき定理 9.1 (ii) と (iii) が成り立つので図 1 の右のようになることが示される. 従って, $N = 10$ の場合を除いて Gel'fand 問題の (1.1) の分岐図式と定性的には同じ特徴を持つ. $f(u) = \exp((u+1)^p)$, $p > 1$ の場合も $N = 10$ の場合を除いて分岐図式は定性的に Gel'fand 問題と同じになる. $N = 10$ は臨界の次元であり現状では解析が難しい.

定理 9.1 (i) の証明の概略はこの節の初めで述べたが, 擬スケールとその極限方程式, さらに 2 つの解 (古典解と特異解) の交点数が鍵となっている.

10 他のトピックス

(1) 球領域における Neumann 問題の解は必ずしも球対称とは限らないが, 球対称解に限定した分岐構造の研究が試みられている. 優臨界スカラーフィールド方程式 $\varepsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$ では [2, 35], Keller-Segel 系の球対称な定常解は [3] で研究されている.

(2) \mathbb{S}^N の球冠領域 (spherical cap) における優臨界 Emden-Fowler 方程式 $\Delta u + u^p = 0$ の Dirichlet 問題は \mathbb{R}^N 上の球領域における Dirichlet 問題と異なり正值解が存在するなど興味深い現象が報告されている [30]. 球冠領域上の $\Delta u + \lambda e^u = 0$ の Dirichlet 問題の正值解に関しては [27].

(3) 一方, 双曲空間 \mathbb{H}^N 上の優臨界 Emden-Fowler 方程式 $\Delta u + u^p = 0$ の球対称解の構造は \mathbb{R}^N 上のそれと近いことが知られている [1, 22]. \mathbb{H}^N 上のスカラーフィールド方程式については [44].

(4) $p > p_s$ でも p_s に近い場合 (近臨界) では, 変分法的な手法によって球対称とは限らない解も構成ができることが知られている. この概説では触れられなかったが大きな分野に発展している. $\Delta u + u^{p_s+\varepsilon} = 0$ の Dirichlet 問題で $\varepsilon > 0$ が小さい場合の正值解の存在については [11] を参照.

(5) p -ラプラシアンや k -ヘシアンなどの退化楕円型作用素を持つ優臨界楕円型方程式の球対称解については [25, 36, 41, 42] が挙げられる.

(6) 全領域 \mathbb{R}^N 上の完全な分岐図式は未解決の問題であると思われる. 現状では B 上の場合と同じような交点数の議論が機能しない. 部分的な結果が [23, 24, 39] で得られているが, B 上の問題とは異なり未知の部分が大きい.

(7) 4 階方程式 $\Delta^2 u = |u|^{p-1}u$ などについては [10, 17] を参照.

参考文献

- [1] M. Bonforte, F. Gazzola, G. Grillo and J. Vázquez, *Classification of radial solutions to the Emden-Fowler equation on the hyperbolic space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **46** (2013) 375–401.
- [2] D. Bonheure, C. Grumiau and C. Troestler, *Multiple radial positive solutions of semi-linear elliptic problems with Neumann boundary conditions*, Nonlinear Anal. **147** (2016) 236–273.
- [3] D. Bonheure, J. Casteras and J. Foldes, *Singular radial solutions for the Keller-Segel equation in high dimension*, J. Math. Pures Appl. **134** (2020) 204–254.

- [4] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983) 437–477.
- [5] H. Brezis and J. Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997) 443–469.
- [6] C. Budd, *Applications of Shil’nikov’s theory to semilinear elliptic equations*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989) 1069–1080.
- [7] C. Budd and J. Norbury, *Semilinear elliptic equations and supercritical growth*, J. Differential Equations **68** (1987) 169–197.
- [8] J. Chern, Z. Chen, J. Chen and Y. Tang, *On the classification of standing wave solutions for the Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010) 275–301.
- [9] E. Dancer, *Some bifurcation results for rapidly growing nonlinearities*, Discrete Contin. Dynam. Syst. **33** (2013) 153–161.
- [10] J. Dávila, I. Flores and I. Guerra, *Multiplicity of solutions for a fourth order equation with power-type nonlinearity*, Math. Ann. **348** (2010) 143–193.
- [11] M. del Pino, P. Felmer and M. Musso, *Two-bubble solutions in the super-critical Bahri-Coron’s problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (2003) 113–145.
- [12] J. Dolbeault and I. Flores, *Geometry of phase space and solutions of semilinear elliptic equations in a ball*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 4073–4087.
- [13] L. Dupaigne and A. Farina, *Stable solutions of $-\Delta u = f(u)$ in \mathbb{R}^N* , J. Eur. Math. Soc. **12** (2010) 855–882.
- [14] R. Emden, Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf Kosmologische und meteorologische Probleme, Leipzig; Berlin: B. G. Teubner, (1907).
- [15] Y. Fujishima, *Blow-up set for a superlinear heat equation and pointedness of the initial data*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014) 4617–4645.
- [16] Y. Fujishima and N. Ioku, *Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term*, J. Math. Pures Appl. **118** (2018) 128–158.
- [17] F. Gazzola and H. Grunau, *Radial entire solutions for supercritical biharmonic equations*, Math. Ann. **334** (2006) 905–936.
- [18] I. Gel’fand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. **29** (1963) 295–381.
- [19] M. Ghergu and O. Goubet, *Singular solutions of elliptic equations with iterated exponentials*, J. Geom. Anal. **30** (2020) 1755–1773.
- [20] B. Gidas, W. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979) 209–243.
- [21] Z. Guo and J. Wei, *Global solution branch and Morse index estimates of a semilinear elliptic equation with super-critical exponent*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011) 4777–4799.
- [22] S. Hasegawa, *A critical exponent for Hénon type equation on the hyperbolic space*, Nonlinear Anal. **129** (2015) 343–370.
- [23] F. Hadj Selem and H. Kikuchi *Existence and non-existence of solution for semilinear elliptic equation with harmonic potential and Sobolev critical/supercritical nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **387** (2012) 746–754.
- [24] F. Hadj Selem, H. Kikuchi and J. Wei, *Existence and uniqueness of singular solution to stationary Schrödinger equation with supercritical nonlinearity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013) 4613–4626.

- [25] J. Jacobsen and K. Schmitt, *The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators*, J. Differential Equations **184** (2002) 283–298.
- [26] D. Joseph and T. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. **49** (1972/73) 241–269.
- [27] Y. Kabeya and V. Moroz, *Gelfand problem on a large spherical cap*, J. Elliptic Parabol. Equ. **7** (2021) 1–23.
- [28] H. Kikuchi and J. Wei, *A bifurcation diagram of solutions to an elliptic equation with exponential nonlinearity in higher dimensions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **148** (2018) 101–122.
- [29] P. Korman, *Solution curves for semilinear equations on a ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997) 1997–2005.
- [30] A. Kosaka and Y. Miyamoto, *The Emden-Fowler equation on a spherical cap of \mathbb{S}^N* , Nonlinear Anal. **178** (2019) 110–132.
- [31] F. Merle and L. Peletier, *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **118** (1991) 49–62.
- [32] F. Mignot and J. Puel, *Solution radiale singulière de $-\Delta u = \lambda e^u$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988) 379–382.
- [33] Y. Miyamoto, *Structure of the positive solutions for supercritical elliptic equations in a ball*, J. Math. Pures Appl. **102** (2014) 672–701.
- [34] Y. Miyamoto, *Classification of bifurcation diagrams for elliptic equations with exponential growth in a ball*, Ann. Mat. Pura Appl. **194** (2015) 931–952.
- [35] Y. Miyamoto, *Structure of the positive radial solutions for the supercritical Neumann problem $\varepsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$ in a ball*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015) 685–739.
- [36] Y. Miyamoto, *Intersection properties of radial solutions and global bifurcation diagrams for supercritical quasilinear elliptic equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **23** (2016) Article 16, 24 pages.
- [37] Y. Miyamoto, *A limit equation and bifurcation diagrams of semilinear elliptic equations with general supercritical growth*, J. Differential Equations **264** (2018) 2684–2707.
- [38] Y. Miyamoto and Y. Naito, *Singular extremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball*, J. Differential Equations **265** (2018) 2842–2885.
- [39] Y. Miyamoto and Y. Naito, *Fundamental properties and asymptotic shapes of the singular and classical radial solutions for supercritical semilinear elliptic equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **27** (2020) Article 52, 25 pages.
- [40] Y. Miyamoto and Y. Naito, *Singular solution and separation property for semilinear elliptic equations with general supercritical growth*, submitted (2021).
- [41] Y. Miyamoto, J. Sanchez and V. Vergara, *Multiplicity of bounded solutions to the k -Hessian equation with a Matukuma-type source*, Rev. Mat. Iberoam. **35** (2019) 1559–1582.
- [42] Y. Miyamoto and K. Takahashi, *Generalized Joseph-Lundgren exponent and intersection properties for supercritical quasilinear elliptic equations*, Arch. Math. (Basel) **108** (2017) 71–83.
- [43] J. Serrin and H. Zou, *Classification of positive solutions of quasilinear elliptic equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **3** (1994) 1–25.
- [44] Y. Wu, Z. Chen, J. Chern and Y. Kabeya, *Existence and uniqueness of singular solutions for elliptic equation on the hyperbolic space*, Commun. Pure Appl. Anal. **13** (2014) 949–960.