Caristi の不動点定理と Bourbaki-Kneser の不動点定理 II

Caristi fixed point theorem and Bourbaki-Kneser fixed point theorem II

豊田 昌史

Masashi Toyoda

東邦大学理学部, 274-8510 千葉県船橋市三山 2-2-1
Faculty of Science, Toho University Miyama 2-2-1, Funabashi, Chiba 274-8510, Japan

1　はじめに

本論文は [7] の続きである．[7] と同様に, 次の不動点定理を用いる．[8] の定理 11.C である．

定理 1. *順序集合 X の任意の空でない鎖は上限をもつとする．f を X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq f(x)$ とする．このとき f は不動点をもつ．*

2 節では, 定理 1 を用いて Nadler の不動点定理 (定理 2) を証明する．Nadler の不動点定理は, 集合値縮小写像の不動点定理である．3 節では, 定理 1 よりある不動点定理 (定理 3) を導く．この不動点定理は Zorn の補題と同値であることを示す．4 節では, 最近に発表した論文 [3] の解説をする．[3] では, ボール空間におけるある不動点定理 (定理 4) を紹介した．この定理と [2] で紹介されている完備性 (spherical completeness) との関係を示す．いずれの不動点定理も, その証明に定理 1 を用いるところが共通している．

2　Nadler の不動点定理

[7] では, 定理 1 を用いて, Caristi の不動点定理や Ekeland の変分不等式定理, 高橋の最小値定理を導いた．本節では, 定理 1 を用いて, 集合値縮小写像の不動点定理である Nadler の不動点定理を導く．

X を距離空間とし, A を X の空でない部分集合とする．$x \in X$ とする．点 x から集合 A までの距離を $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ で定める．$CB(X)$ を X の空でない有界閉集合の全体とする．$A, B \in CB(X)$ に対して

$$H(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$$

で定義すると, H は $CB(X)$ の距離となる ([6])．ここで $\delta(A,B) = \sup\{d(x,B) \mid x \in A\}$ である．X から $CB(X)$ への集合値写像 T が縮小であるとは, $0 \le r < 1$ をみたす r が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$H(Tx,Ty) \le rd(x,y)$$

が成り立つときをいう．このとき, T を集合値縮小写像（multi-valued contraction mapping）という．

任意の $x \in X$ と $A, B \in CB(X)$ に対して $|d(x,A) - d(x,B)| \le H(A,B)$ が成り立つ．実際, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $d(x,y) < d(x,B) + \epsilon$ となる $y \in B$ が存在する．よって, 任意の $z \in A$ に対して

$$d(x,A) - d(x,B) \le d(x,z) - d(x,y) + \epsilon \le d(z,y) + \epsilon$$

が成り立つ．したがって

$$d(x,A) - d(x,B) \le d(y,A) + \epsilon \le \delta(B,A) + \epsilon \le H(B,A) + \epsilon$$

を得る．ϵ は任意であるから $d(x,A) - d(x,B) \le H(B,A)$ である．同様に $d(x,B) - d(x,A) \le H(A,B)$ である．以上より $|d(x,A) - d(x,B)| \le H(A,B)$ を得る．

次の Nadler の不動点定理を, 定理 1 を用いて証明する．

定理 2 (Theorem 5 [5])**.** *X を完備距離空間とする．T を X から $CB(X)$ への集合値縮小写像とする．このとき, ある $v \in X$ が存在して $v \in Tv$ をみたす．*

証明. $\varphi(x) = d(x,Tx)$ と定義する．このとき, φ は X から $[0,\infty)$ への連続関数であ

る．実際, $x, y \in X$ とすると

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)| &\leq |d(x,Tx)-d(y,Tx)|+|d(y,Tx)-d(y,Ty)| \\ &\leq d(x,y)+H(Tx,Ty) \\ &\leq d(x,y)+rd(x,y)=(1+r)d(x,y)\end{aligned}$$

より, φ は連続である．$0<\epsilon<1-r$ とする．任意の $v \in X$ に対して, v と異なるある $w \in X$ が存在して

$$\varphi(w)<\varphi(v)-\epsilon d(v,w)$$

をみたすとする．選択公理を用いて v に対して w を対応させる写像 f を定義する．また, X の要素 v, w に対して, 順序を

$$v \leq w \Longleftrightarrow \epsilon d(v,w) \leq \varphi(v)-\varphi(w)$$

で定める．このとき X は順序集合である．このとき, f のみたす仮定より $f(v) \neq v$ で $v \leq f(v)$ である．順序集合 $(X, \leq)$ の鎖 を C とおく．$C=\{x_\alpha\}$ とおくと, ネット C は極限 x をもち, x は上界であることが [7] の補助定理 6 よりわかる．しかも x は C の上限である．実際, x' を C の上界とするとき, $x_\alpha \leq x'$, すなわち

$$\epsilon d(x_\alpha, x') \leq \varphi(x_\alpha)-\varphi(x')$$

であるが, φ は連続であるので

$$\epsilon d(x, x') \leq \varphi(x)-\varphi(x'),$$

すなわち $x \leq x'$ を得る．これより x は C の最小上界である．

定理 1 より, f の不動点が存在するが, これは矛盾である．したがって, ある $v \in X$ が存在して, 任意の $w \in X$ に対して,

$$\varphi(w) \geq \varphi(v)-\epsilon d(v,w)$$

をみたす．$w \in Tv$ とする．このとき

$$\begin{aligned}d(v,Tv) &\leq d(w,Tw)+\epsilon d(v,w) \\ &\leq \delta(Tv,Tw)+\epsilon d(v,w) \\ &\leq H(Tv,Tw)+\epsilon d(v,w) \\ &\leq rd(v,w)+\epsilon d(v,w)=(r+\epsilon)d(v,w)\end{aligned}$$

である．したがって

$$d(v,Tv) \leq (r+\epsilon)d(v,Tv)$$

である．これより $(1-r-\epsilon)d(v,Tv) \leq 0$ であるから $d(v,Tv)=0$ を得る．これより $v \in Tv$ である． □

3 Zorn の補題と同値な不動点定理

[7] では, 定理 1 を用いて Zorn の補題を導いた. 本節では, 定理 1 を用いてある不動点定理を導き, これが Zorn の補題と同値であることをみる.

定理 3. 順序集合 X の任意の鎖は上界をもつとする. f を X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq f(x)$ とする. このとき f は不動点をもつ.

証明. $\mathcal{C} = \{C \mid C \subset X,\ C$ は空でない鎖 $\}$ とする. $\mathcal{C}$ は包含関係による順序

$$C_1 \leq C_2 \Longleftrightarrow C_1 \subset C_2$$

により順序集合となり, また任意の空でない鎖は上限をもつ (補助定理 4 [7]). 選択公理より, $\mathcal{C}$ の要素 C に対して C の上界 z_C を対応させる写像が存在する. したがって $\mathcal{C}$ 上の写像 T を

$$T(C) = C \cup \{f(z_C)\}$$

で定める. 任意の $x \in C$ に対して

$$x \leq z_C \leq f(z_C)$$

であるから $C \cup \{f(z_C)\}$ も鎖である. よって T は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への写像である. また, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して $C \leq T(C)$ である. 定理 1 より, ある $C_0 \in \mathcal{C}$ が存在して

$$C_0 = T(C_0) = C_0 \cup \{f(z_{C_0})\}$$

である. これより $f(z_{C_0}) \in C_0$ である. z_{C_0} は C_0 の上界であるから $f(z_{C_0}) \leq z_{C_0}$ である. また $z_{C_0} \leq f(z_{C_0})$ であるから

$$z_{C_0} = f(z_{C_0})$$

を得る. 以上より f は不動点をもつ. □

定理 3 は Zorn の補題と同値である. 実際, Zorn の補題から定理 3 を得るのは容易である. Zorn の補題が成り立つとするとき, X の極大元 z_0 が存在する. $z_0 \leq f(z_0)$ が成り立つが z_0 は X の極大元であるので

$$z_0 = f(z_0)$$

を得る. 以上より f は不動点をもつ.

定理 3 から Zorn の補題も得られる．実際, X は極大元をもたないとする．集合 Y を $Y = X \times \omega$ で定義する．ここで ω は自然数全体の集合である．Y には辞書式の順序を定める．すなわち $(x_1, n_1), (x_2, n_2) \in Y$ に対して

$$(x_1, n_1) \leq (x_2, n_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ または } x_1 = x_2,\ n_1 \leq n_2$$

で定める．Y から Y への写像 f を

$$f(x, n) = (x, n+1)$$

で定義する．このとき $(x, n) \leq f(x, n)$ が常に成り立つ．また Y の任意の鎖は上界をもつ．実際, 鎖の第 1 成分を C とする．仮定より C は上界 z をもつ．$z \notin C$ と一般にしてよい．実際 z は C の上界なので, 任意の $x \in C$ に対して $x \leq z$ である．z は極大元ではないから, ある z' が存在して

$$x \leq z < z'$$

である．これより $z' \notin C$ である．したがって, C の上界 z は $z \notin C$ をみたすとする．このとき $(z, 0)$ が Y の鎖の上界である．以上より, 定理 3 の仮定をみたしているので f の不動点が存在するはずであるが, これは f の定義から矛盾である．以上より X は極大元をもつ．

[7] では, Caristi の不動点定理を Zorn の補題を用いて証明した (p.102 [7])．上記でみたように, 定理 3 は Zorn の補題と同値な命題であるので, 定理 3 を用いても証明できる．実際, X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める．このとき, T のみたす条件から, 任意の $x \in X$ に対して $x \leq Tx$ である．また, X の任意の鎖は上界をもつ (補助定理 6 [7])．定理 3 より T の不動点が存在する．

4　ボール空間における不動点定理

本節では, [3] で紹介した不動点定理の完備性について検討する．この不動点定理の証明に定理 1 を用いた．[3] の出版にあたって, ある研究者から [2] の文献を紹介して頂いた．その際, [2] で紹介されている完備性 (spherical completeness) と [3] で紹介した定理の仮定との関係についての質問を頂いた．その質問に対する回答を本節で行う．

X を空でない集合とする．$\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ とする．ここで B_x は X の空でない部分集合である．集合族 $\mathcal{B}$ は

$$B_1 \leq B_2 \Longleftrightarrow B_1 \supset B_2$$

により順序を定める．このとき $(X,\mathcal{B})$ をボール空間 (ball space) とよぶ．$\mathcal{B}$ の各要素 B_x を単に球と呼ぶ．

[3] で, 次の不動点定理を紹介した．

定理 4 (Theorem 4 [3])**.** $(X,\mathcal{B})$ をボール空間とし, 任意の $x \in X$ に対して $x \in B_x$ が成り立つとする．X から X への写像 T を, $x \neq Tx$ をみたす任意の $x \in X$ に対して

$$B_{Tx} \subsetneq B_x$$

をみたす写像とする．$\Gamma = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B},\ \mathcal{C} \text{ は鎖 }\}$ とする．Γ から X への写像 p を, 任意の $\mathcal{C} \in \Gamma$ に対して

$$B_{p(\mathcal{C})} \subset \bigcap \mathcal{C}$$

をみたす写像とする．このとき T は不動点をもつ．

定理 4 の証明の概略は次である: ある $z_0 \in X$ が存在し

$$B_{z_0} = B_{Tz_0}$$

をみたすとする．このとき $z_0 = Tz_0$ である．実際 $z_0 \neq Tz_0$ とすると T の仮定から

$$B_{Tz_0} \subsetneq B_{z_0}$$

となり矛盾を得る．この z_0 をみつける際に定理 1 を用いる．さらなる詳細は [3] を参照されたい．

$\mathcal{B}$ の任意の鎖が共通部分をもつとき, ボール空間を完備 (spherically complete) という ([4])．[2] では, この完備性に関してある階層を紹介している．

S_1:　ボール空間の任意の鎖の共通部分は空ではない．
S_2:　ボール空間の任意の鎖の共通部分はある球を含む．
S_3:　ボール空間の任意の鎖の共通部分はある極大な球を含む．
S_4:　ボール空間の任意の鎖の共通部分はある最大な球を含む．
S_5:　ボール空間の任意の鎖の共通部分はある球である．

これらの階層の間には, 次の導出関係が成り立つ:

$$S_5 \Longrightarrow S_4 \Longrightarrow S_3 \Longrightarrow S_2 \Longrightarrow S_1.$$

さて, ここで問を提示する:

上記完備性と定理 4 の仮定はどのような関係があるのか？

この問の回答のため, まずは定理 4 を [2] で紹介されている用語で書き換え, さらに完備性に新たな階層を導入する.

X を空でない集合とする. $\mathcal{B}$ を X の非空な部分集合族とする. 組 $(X, \mathcal{B})$ をボール空間という ([2]). また, [2] によれば, $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ とするときを B_x-ボール空間 (B_x-ball space) と呼んでいる. したがって, [2] における B_x-ボール空間を, [3] では単にボール空間と呼んでいる. ボール空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の写像 T が contracting on orbits である ([2]) とは, ある写像

$$X \ni x \mapsto B_x \in \mathcal{B}$$

が存在して

$$x \in B_x$$

および

$$B_{Tx} \subsetneq B_x$$

が $x \neq Tx$ をみたす任意の $x \in X$ に対して成り立つときをいう.

以上の用語によれば, 定理 4 は B_x-ボール空間 $(X, \mathcal{B})$ における contracting on orbits 写像 T に関する不動点定理といえる.

さらに, 定理 4 の仮定する完備性を明確にするため, 次を導入する.

S_3': ボール空間の任意の鎖の共通部分はある球を含み, かつ, 選出できる.

このとき, 次の導出関係が成り立つ:

$$S_5 \Longrightarrow S_4 \Longrightarrow S_3' \Longrightarrow S_2 \Longrightarrow S_1.$$

以上, [2] で紹介されている用語と, 本論文で導入した新たな完備性 (S_3') を用いると, 定理 4 は次のように書き換えられる.

定理 5. $(X, \mathcal{B})$ を S_3' をみたす B_x-ボール空間とする. X から X への写像 T を contracting on orbits 写像とする. このとき T は不動点をもつ.

したがって, [3] で紹介した定理 4 は, S_3' という完備性を仮定した定理である. これが先の問に対する回答である.

参考文献

[1] A. Abian, *Fixed point theorems of the mappings of partially ordered sets*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 20 (1971), 139–142.

[2] H. Ćmiel, F.-V. Kuhlmann and K. Kuhlmann, *A basic framework for fixed point theorems: ball spaces and spherical completeness*, 2020; avalilable at: https://arxiv.org/pdf/1905.09930.pdf].

[3] Y. Kimura and M. Toyoda, *Fixed point theorem in ball spaces and Caristi's fixed point theorem*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis. An International Journal, 23 (2022), 185–189.

[4] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann and M. Paulsen, *The Caristi-Kirk fixed point theorem from the point of view of ball spaces*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20 (2018), Art. 107.

[5] S. B. Nadler, Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math.,30 (1969), 415–487.

[6] 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[7] 豊田昌史, Caristi の不動点定理と Bourbaki-Kneser の不動点定理, 京都大学数理解析研究所講究録, 2194 (2021), 97–107.

[8] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems, Springer, 1986.