3D reflection maps from tetrahedron maps

東京大学　米山 瑛仁
Akihito Yoneyama
The University of Tokyo

1　導入

RIMS 研究集会「組合せ論的表現論および関連分野との連携」において，四面体方程式の集合論的解を用いて 3 次元反射方程式の集合論的解を得る方法，およびその応用に関する結果 [1] について講演させていただいた．ここで，四面体方程式ならびに 3 次元反射方程式とは，2+1 次元における弦の運動を考えた際，その散乱振幅が衝突の順序に依らないことを要請して得られる方程式であり，それぞれ Yang-Baxter 方程式と反射方程式の 3 次元における類似物である．[1] や講演においては図を用いた視覚的な説明を強調したが，本稿はその補遺として，主定理のほぼ self-contained な detailed (minimum) proof を紹介する．

2　準備

主定理を述べるための準備として，いくつか定義を行う．以下では X を任意の集合とする．

定義 2.1. $\mathbf{R} : X^3 \to X^3$ が X^6 上の四面体方程式

$$\mathbf{R}_{245}\mathbf{R}_{135}\mathbf{R}_{126}\mathbf{R}_{346} = \mathbf{R}_{346}\mathbf{R}_{126}\mathbf{R}_{135}\mathbf{R}_{245}, \tag{1}$$

を満たすとき，$\mathbf{R}$ を *tetrahedron map* と呼ぶ．ここで，添字は非自明に作用する集合のラベルを表す．

定義 2.2. $\mathbf{R} : X^3 \to X^3$ を *tetrahedron map* とする．$\mathbf{T} : X^6 \to X^6$ を

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_{245}\mathbf{R}_{135}\mathbf{R}_{126}\mathbf{R}_{346}, \tag{2}$$

により定義するとき，$\mathbf{T}$ を *tetrahedral composite* と呼ぶ．

定義 2.3. $\mathbf{R} : X^3 \to X^3$ を *tetrahedron map* とする．$\mathbf{J} : X^4 \to X^4$ が X^9 上の *3* 次元反射方程式

$$\mathbf{R}_{489}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{R}_{269}\mathbf{R}_{258}\mathbf{J}_{1678}\mathbf{J}_{1234}\mathbf{R}_{456} = \mathbf{R}_{456}\mathbf{J}_{1234}\mathbf{J}_{1678}\mathbf{R}_{258}\mathbf{R}_{269}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{R}_{489}, \tag{3}$$

を満たすとき，$\mathbf{J}$ を *3D reflection map* と呼ぶ．

$Y \subset X^6$ を $Y = \{(x_1, \cdots, x_6) \mid x_2 = x_3,\ x_5 = x_6\}$ により定める．また，X^4 から Y への埋め込み $\phi : X^4 \to Y$, および Y から X^4 への射影 $\varphi : Y \to X^4$ を，それぞれ $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, x_4)$, $\varphi(x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ とする．

定義 2.4. $\mathbf{R}:X^3\to X^3$ を *tetrahedron map*，$\mathbf{T}$ を対応する *tetrahedral composite* とする．$\mathbf{T}$ が

$$\boldsymbol{x}\in Y \implies \mathbf{T}(\boldsymbol{x})\in Y, \tag{4}$$

を満たすとき，$\mathbf{R}$ を *boundarizable* と呼ぶ．$\mathbf{R}$ が *boundarizable* のとき，$\mathbf{J}:X^4\to X^4$ を

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{x})=\varphi(\mathbf{T}(\phi(\boldsymbol{x}))), \tag{5}$$

により定義し，$\mathbf{J}$ を $\mathbf{R}$ の *boundarization* と呼ぶ．

3 定理

以上の準備の下で，以下が成り立つ．

定理 3.1. $\mathbf{R}:X^3\to X^3$ を $\mathbf{R}^2=\mathrm{id}$, $\mathbf{R}_{123}=\mathbf{R}_{321}$ を満たす *boundarizable* な *tetrahedron map* とする．また，$\mathbf{J}:X^4\to X^4$ を対応する *boundarization* とする．このとき，$\mathbf{R},\mathbf{J}$ は *3* 次元反射方程式 *(3)* を満たす．

すなわち，一般に定理 3.1 の条件を満たす tetrahedron map に対して (5) を計算することで，3D reflection map を得ることができる．ここで，$\mathbf{R}^2=\mathrm{id}$, $\mathbf{R}_{123}=\mathbf{R}_{321}$ という条件は証明で用いられる以下の補題に由来するものである．

補題 3.2. $\mathbf{R}:X^3\to X^3$ を $\mathbf{R}^2=\mathrm{id}$, $\mathbf{R}_{123}=\mathbf{R}_{321}$ を満たす *tetrahedron map* とする．このとき，X^{15} 上で以下の方程式

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar4\bar8\bar9})(\mathbf{R}_{579}\mathbf{R}_{3\bar5 9}\mathbf{R}_{35\bar9}\mathbf{R}_{\bar57\bar9})(\mathbf{R}_{26\bar9}\mathbf{R}_{\bar2\bar69})(\mathbf{R}_{2\bar58}\mathbf{R}_{\bar25\bar8})\\
&\qquad\times(\mathbf{R}_{\bar67\bar8}\mathbf{R}_{16\bar8}\mathbf{R}_{1\bar68}\mathbf{R}_{678})(\mathbf{R}_{234}\mathbf{R}_{1\bar24}\mathbf{R}_{12\bar4}\mathbf{R}_{\bar23\bar4})(\mathbf{R}_{\bar45\bar6}\mathbf{R}_{456})\\
&=(\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar45\bar6})(\mathbf{R}_{234}\mathbf{R}_{1\bar24}\mathbf{R}_{12\bar4}\mathbf{R}_{\bar23\bar4})(\mathbf{R}_{\bar67\bar8}\mathbf{R}_{16\bar8}\mathbf{R}_{1\bar68}\mathbf{R}_{678})\\
&\qquad\times(\mathbf{R}_{\bar25\bar8}\mathbf{R}_{2\bar58})(\mathbf{R}_{\bar2\bar69}\mathbf{R}_{26\bar9})(\mathbf{R}_{579}\mathbf{R}_{3\bar59}\mathbf{R}_{35\bar9}\mathbf{R}_{\bar57\bar9})(\mathbf{R}_{\bar4\bar8\bar9}\mathbf{R}_{489}),
\end{aligned}\tag{6}$$

が成り立つ．

補題 3.2 は四面体方程式および $\mathbf{R}^2=\mathrm{id}$, $\mathbf{R}_{123}=\mathbf{R}_{321}$ を繰り返し用いることで得られる．詳細な式変形については [1, Appendix A] を参照．(6) において，集合のラベルは $1,\cdots,9$ と $\bar2,\bar4,\bar5,\bar6,\bar8,\bar9$ で与えられており，$\bar1,\bar3,\bar7$ が存在しないことに注意する．

4 証明

定理 3.1 の証明を行う．まず，$\mathbf{R}$ に対応する tetrahedral composite $\mathbf{T}$ を用いて (6) を

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar4\bar8\bar9})\mathbf{T}_{35\bar579\bar9}(\mathbf{R}_{26\bar9}\mathbf{R}_{\bar2\bar69})(\mathbf{R}_{2\bar58}\mathbf{R}_{\bar25\bar8})\mathbf{T}_{16\bar678\bar8}\mathbf{T}_{12\bar234\bar4}(\mathbf{R}_{\bar45\bar6}\mathbf{R}_{456})\\
&=(\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar45\bar6})\mathbf{T}_{12\bar234\bar4}\mathbf{T}_{16\bar678\bar8}(\mathbf{R}_{\bar25\bar8}\mathbf{R}_{2\bar58})(\mathbf{R}_{\bar2\bar69}\mathbf{R}_{26\bar9})\mathbf{T}_{35\bar579\bar9}(\mathbf{R}_{\bar4\bar8\bar9}\mathbf{R}_{489}),
\end{aligned}\tag{7}$$

と書けることに注目し，作用させる空間を制限することを考える．(7) の集合の順序を

$$1\prec\cdots\prec9\prec\bar2\prec\bar4\prec\bar5\prec\bar6\prec\bar8\prec\bar9, \tag{8}$$

とする．また，X^9 から X^{18} への埋め込みを $\alpha: X^9 \to X^{18}$, $\alpha(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in X^9)$ とし，X^9 の 1,3,7 番目を取り除く射影を $\beta: X^9 \to X^6$, $\beta(x_1, \cdots, x_9) = (x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9)$ とする．このとき，(7) の両辺に右から $(\mathrm{id} \times \beta)\alpha$ を掛けることで

$$\begin{aligned}&(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}})\mathbf{T}_{35\bar{5}79\bar{9}}(\mathbf{R}_{26\bar{9}}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9})(\mathbf{R}_{2\bar{5}8}\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}})\mathbf{T}_{16\bar{6}78\bar{8}}\mathbf{T}_{12\bar{2}34\bar{4}}(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}}\mathbf{R}_{456})(\mathrm{id} \times \beta)\alpha \\ &= (\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}})\mathbf{T}_{12\bar{2}34\bar{4}}\mathbf{T}_{16\bar{6}78\bar{8}}(\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}\mathbf{R}_{2\bar{5}8})(\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9}\mathbf{R}_{26\bar{9}})\mathbf{T}_{35\bar{5}79\bar{9}}(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}}\mathbf{R}_{489})(\mathrm{id} \times \beta)\alpha,\end{aligned} \tag{9}$$

が成り立つが，$\mathbf{R}$ が boundarizable で (4) が成り立つことから，(9) における $\mathbf{T}$ は (5) を用いて

$$\begin{aligned}&(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}})(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{35\bar{5}79\bar{9}}(\mathbf{R}_{26\bar{9}}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9})(\mathbf{R}_{2\bar{5}8}\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}) \\ &\qquad \times (\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{16\bar{6}78\bar{8}}(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{12\bar{2}34\bar{4}}(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}}\mathbf{R}_{456})(\mathrm{id} \times \beta)\alpha \\ &= (\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}})(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{12\bar{2}34\bar{4}}(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{16\bar{6}78\bar{8}} \\ &\qquad \times (\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}\mathbf{R}_{2\bar{5}8})(\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9}\mathbf{R}_{26\bar{9}})(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{35\bar{5}79\bar{9}}(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}}\mathbf{R}_{489})(\mathrm{id} \times \beta)\alpha,\end{aligned} \tag{10}$$

と書き直すことができる．

次に，作用した後の像を拡大することを考える．$(\mathrm{id} \times \beta)\alpha$ による X^9 の像を $Z \subset X^{15}$ として，$\gamma: Z \to X^{18}$ を $\gamma(\mathrm{id} \times \beta)\alpha = \alpha$ により定める．すなわち，γ は β によって取り除かれた成分を復元する写像である．このとき，(10) の両辺の像が Z に属することに注意して，左から γ を掛けることで

$$\begin{aligned}&\gamma(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}})(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{35\bar{5}79\bar{9}}(\mathbf{R}_{26\bar{9}}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9})(\mathbf{R}_{2\bar{5}8}\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}) \\ &\qquad \times (\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{16\bar{6}78\bar{8}}(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{12\bar{2}34\bar{4}}(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}}\mathbf{R}_{456})(\mathrm{id} \times \beta)\alpha \\ &= \gamma(\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}})(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{12\bar{2}34\bar{4}}(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{16\bar{6}78\bar{8}} \\ &\qquad \times (\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}\mathbf{R}_{2\bar{5}8})(\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9}\mathbf{R}_{26\bar{9}})(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{35\bar{5}79\bar{9}}(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}}\mathbf{R}_{489})(\mathrm{id} \times \beta)\alpha,\end{aligned} \tag{11}$$

が成り立つ．ここで，(11) の像は $1 \prec \cdots \prec 9 \prec \bar{1} \prec \cdots \prec \bar{9}$ の順序の $1, \cdots, 9, \bar{1}, \cdots, \bar{9}$ によりラベル付けされているとする．$P_{i\bar{i}}: X^{18} \to X^{18}$ を $i, \bar{i}$ 成分の互換とする．このとき $Z \to X^{18}$ 上において，$\gamma(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}}) = (\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}})\gamma$ および $\gamma(\phi \circ \mathbf{J} \circ \varphi)_{12\bar{2}34\bar{4}} = \mathbf{J}_{3579}\mathbf{J}_{\bar{3}\bar{5}\bar{7}\bar{9}}\gamma = P_{5\bar{5}}P_{9\bar{9}}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{J}_{\bar{3}\bar{5}\bar{7}\bar{9}}\gamma$ などが成り立つことに注意すれば，(11) は

$$\begin{aligned}&(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}})(P_{5\bar{5}}P_{9\bar{9}}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{J}_{\bar{3}\bar{5}\bar{7}\bar{9}})(\mathbf{R}_{26\bar{9}}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9})(\mathbf{R}_{2\bar{5}8}\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}) \\ &\qquad \times (P_{6\bar{6}}P_{8\bar{8}}\mathbf{J}_{1678}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{6}\bar{7}\bar{8}})(P_{2\bar{2}}P_{4\bar{4}}\mathbf{J}_{1234}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}})(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}}\mathbf{R}_{456})\gamma(\mathrm{id} \times \beta)\alpha \\ &= (\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}})(P_{2\bar{2}}P_{4\bar{4}}\mathbf{J}_{1234}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}})(P_{6\bar{6}}P_{8\bar{8}}\mathbf{J}_{1678}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{6}\bar{7}\bar{8}}) \\ &\qquad \times (\mathbf{R}_{\bar{2}5\bar{8}}\mathbf{R}_{2\bar{5}8})(\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}9}\mathbf{R}_{26\bar{9}})(P_{5\bar{5}}P_{9\bar{9}}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{J}_{\bar{3}\bar{5}\bar{7}\bar{9}})(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}}\mathbf{R}_{489})\gamma(\mathrm{id} \times \beta)\alpha,\end{aligned} \tag{12}$$

と書き直せることがわかる．両辺の $P_{i\bar{i}}$ を打ち消し合い，$\gamma(\mathrm{id} \times \beta)\alpha = \alpha$ であることを用いれば

$$\begin{aligned}&(\mathbf{R}_{489}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}})(\mathbf{J}_{3579}\mathbf{J}_{\bar{3}\bar{5}\bar{7}\bar{9}})(\mathbf{R}_{269}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}\bar{9}})(\mathbf{R}_{258}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{5}\bar{8}})(\mathbf{J}_{1678}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{6}\bar{7}\bar{8}})(\mathbf{J}_{1234}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}})(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}}\mathbf{R}_{456})\alpha \\ &= (\mathbf{R}_{456}\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{5}\bar{6}})(\mathbf{J}_{1234}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}})(\mathbf{J}_{1678}\mathbf{J}_{\bar{1}\bar{6}\bar{7}\bar{8}})(\mathbf{R}_{258}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{5}\bar{8}})(\mathbf{R}_{269}\mathbf{R}_{\bar{2}\bar{6}\bar{9}})(\mathbf{J}_{3579}\mathbf{J}_{\bar{3}\bar{5}\bar{7}\bar{9}})(\mathbf{R}_{\bar{4}\bar{8}\bar{9}}\mathbf{R}_{489})\alpha,\end{aligned} \tag{13}$$

が得られる．(13) は求める 3 次元反射方程式の直積であるため，以上で定理が示された． □

参考文献

[1] A. Yoneyama, *Boundary from bulk integrability in three dimensions: 3D reflection maps from tetrahedron maps*, Math. Phys. Anal. Geom. **24** 21 (2021).