結晶およびアフィン AII 型 $\imath$ 量子群を用いた反射方程式の解

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻前期博士課程 1 年　草野　浩虎
HIROTO KUSANO
MATHMATICS & PHYSICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA CITY UNIVERSITY

1. 概要

本稿は RIMS 共同研究「組合せ論的表現論および関連分野との連携」での筆者による講演内容をまとめたものである。対称テンソル表現における $A^{(1)}_{2n-1}$ 型 $\imath$ 量子群に付随する反射方程式の解を与える。さらにパラメータを適切に与えることで量子 K 行列が量子パラメータ q に依存せず決まり、[8] で与えられた $q=0$ における解と一致することを確かめる。

2. 導入

反射方程式は数理物理学に現れる方程式で、R 行列および K 行列と呼ばれる 2 つの線形写像により構成される。これらを量子群の表現論の枠で考えるとき、$\imath$ 量子群と呼ばれる量子群の部分代数を考える必要がある。$\imath$ 量子群は Dynkin 図形のある種の一般化である佐武図形で分類されることが知られていて、ここでは特にアフィン AII 型の時に対応する反射方程式の解を与える。

量子群の表現論に現れる量子パラメータ q について 0 に極限をとることで結晶基底の理論が考えられるが、R 行列、K 行列において同様の操作をすることで組合せ R、K を考えることができる。これらはヤングタブローなど様々な組合せ論的対象に操作を与えるため、様々な応用が期待される。実際、今回与える K 行列を $q=0$ で考えると [8] で与えられた操作と一致する。

最後に、今回は対称テンソル表現を考えるが、表現によらずに決まる普遍 K 行列を紹介する。これは帰納式で一意に決まるが具体型を求めることが困難である。この普遍 K 行列を求めることで様々な表現に応用可能になるため、$q=0$ の極限をとることで組合せ論への応用が期待される。

3. 結晶 B_l を用いた反射方程式の解

結晶 $B_l, B_l^\vee$ を、量子群 $U_q(A^{(1)}_{n-1})$ の l 階対称テンソル表現に対応する結晶とその双対とする。すなわち、$B_l, B_l^\vee$ は空でない集合

$$B_l = B_l^\vee = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid x_1 + \cdots + x_n = l\}$$

で、次の写像を共に考える。(B は B_l または $B_l^\vee$ を表す)

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \to B \cup \{0\},$$

$$\varepsilon_i, \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\},$$

$$wt : B \to \Lambda$$

ここで $i \in \mathbb{Z}_n$ であり、Λ はウェイト格子を表す。B_l (resp, $B_l^\vee$) の元は、文字が $1, \cdots, n$ で型が $1 \times l$ (resp, $(n-1) \times l$) の半標準盤と同一視できる。より詳しく、B_l の場合 x_i は i でラベルされた箱の数、$B_l^\vee$ の場合 x_i は i を含まない列の数を表す。

例 1. $l = 4$, $n = 4$ の場合 :

$$(2,0,1,1) \in B_4 \longleftrightarrow \boxed{1\,|\,1\,|\,3\,|\,4} \quad , \quad (1,0,2,1) \in B_4^\vee \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B_l \to B_l \cup \{0\}$ または $B_l^\vee \to B_l^\vee \cup \{0\}$ $(i \in \mathbb{Z}_n)$ は次のように与えられる :

$$(\tilde{e}_i x)_j = x_j + \delta_{j,i} - \delta_{j,i+1}, (\tilde{f}_i x)_j = x_j - \delta_{j,i} + \delta_{j,i+1} \quad \text{for } x \in B_l$$

$$(\tilde{e}_i x)_j = x_j - \delta_{j,i} + \delta_{j,i+1}, (\tilde{f}_i x)_j = x_j + \delta_{j,i} - \delta_{j,i+1} \quad \text{for } x \in B_l^\vee$$

これにより、$\varepsilon_i(x) := max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^k x \neq 0\}$ 、 $\varphi_i(x) := max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_i^k x \neq 0\}$ は次で与えられる :

$$\varepsilon_i(x) = x_{i+1}\ ,\ \varphi_i(x) = x_i \text{ for } x \in B_l$$

$$\varepsilon_i(x) = x_i\ ,\ \varphi_i(x) = x_{i+1} \text{ for } x \in B_l^\vee$$

スペクトルパラメータ $z \in \mathbb{Q}(q)$ を用いて、$B_l, B_l^\vee$ のアフィン化を次で定める：

$$Aff(B_l) = \{z^d x \mid x \in B_l, d \in \mathbb{Z}\}$$

$$Aff(B_l^\vee) = \{z^d x \mid x \in B_l^\vee, d \in \mathbb{Z}\}$$

$B_l, B_l^\vee$ と同様に $Aff(B_l)$、$Aff(B_l^\vee)$ にも以下で定まる結晶構造を持つ：

$$\tilde{e}_i(z^d x) = z^{d+\delta_{i,0}}(\tilde{e}_i x)\ ,\ \tilde{f}_i(z^d x) = z^{d-\delta_{i,0}}(\tilde{f}_i x) \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}_n\ , x \in B_l \text{ or } B_l^\vee.$$

$x \in B$, $y \in B'$ に対し、エネルギー関数 $H(x \otimes y)$ が次の式で加法帰納的に与えられる：

$$H(\tilde{e}_i(x \otimes y)) = \begin{cases} H(x \otimes y) + 1 & \text{if } i = 0,\ \varphi_0(x) \geq \varepsilon_0(y),\ \varphi_0(\tilde{y}) \geq \varepsilon_0(\tilde{x}) \\ H(x \otimes y) - 1 & \text{if } i = 0,\ \varphi_0(x) < \varepsilon_0(y),\ \varphi_0(\tilde{y}) < \varepsilon_0(\tilde{x}) \\ H(x \otimes y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、$x \otimes y \mapsto \tilde{y} \otimes \tilde{x}$ は古典組合せ R $\tilde{R}:\ B \otimes B' \to B' \otimes B$ による像とする。

組合せ $R:\ Aff(B) \otimes Aff(B') \to Aff(B') \otimes Aff(B)$ を、$z^d x \otimes z^e y \mapsto z^{e+H(x\otimes y)}\tilde{y} \otimes z^{d-H(x\otimes y)}\tilde{x}$ により定める。B_l または $B_l^\vee$ の元 x, y と $i \in I$ に対し、

$$P_i(x,y) = min\{x_{i+1}, y_{i+1}\}, \quad Q_i(x,y) = min\{\sum_{j=1}^{k-1} x_{i+j} + \sum_{j=k+1}^{n} y_{i+j} \mid 1 \leq k \leq n\}$$

とする。ここで、次の 3 つの組合せ R を考える：

$$\begin{cases} R : Aff(B_l) \otimes Aff(B_m) \to Aff(B_m) \otimes Aff(B_l), \\ H(x \otimes y) = -Q_0(x,y),\ \tilde{x}_i = x_i + Q_i(x,y) - Q_{i-1}(x,y),\ \tilde{y}_i = y_i + Q_{i-1}(x,y) - Q_i(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^\vee : Aff(B_l) \otimes Aff(B_m^\vee) \to Aff(B_m^\vee) \otimes Aff(B_l), \\ H(x \otimes y) = -P_0(x,y),\ \tilde{x}_i = x_i + P_i(x,y) - P_{i-1}(x,y),\ \tilde{y}_i = y_i + P_i(x,y) - P_{i-1}(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^{\vee\vee} : Aff(B_l^\vee) \otimes Aff(B_m^\vee) \to Aff(B_m^\vee) \otimes Aff(B_l^\vee), \\ H(x \otimes y) = -Q_0(y,x),\ \tilde{x}_i = x_i + Q_{i-1}(y,x) - Q_i(y,x),\ \tilde{y}_i = y_i + Q_i(y,x) - Q_{i-1}(y,x) \end{cases}$$

これらの組合せ R は Yang-Baxter 方程式を満たす：

$$(1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R) = (R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1)$$

$$(1 \otimes R)(R^\vee \otimes 1)(1 \otimes R^\vee) = (R^\vee \otimes 1)(1 \otimes R^\vee)(R \otimes 1)$$

$$(1 \otimes R^\vee)(R^\vee \otimes 1)(1 \otimes R^{\vee\vee}) = (R^{\vee\vee} \otimes 1)(1 \otimes R^\vee)(R^\vee \otimes 1)$$

$$(1 \otimes R^{\vee\vee})(R^{\vee\vee} \otimes 1)(1 \otimes R^{\vee\vee}) = (R^{\vee\vee} \otimes 1)(1 \otimes R^{\vee\vee})(R^{\vee\vee} \otimes 1)$$

組合せ K を、次で定める：

$$\begin{aligned} K : Aff(B_l) &\longrightarrow Aff(B_l^\vee) \\ z^d x &\longmapsto z^{-d+I(x)}\kappa(x), \\ K^\vee : Aff(B_l^\vee) &\longrightarrow Aff(B_l) \\ z^d x &\longmapsto z^{-d-I(x)}\kappa(x). \end{aligned}$$

ここで、(κ, I) のペアを次の 3 つで考える：

$$\begin{cases} \kappa(x) = Rotateleft(x) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, x_1) \\ I(x) = -x_1 \end{cases} \qquad \text{for any } n$$

$$\begin{cases} \kappa(x) = Switch_{1n}(x) = (x_n, x_3, x_2, x_5, x_4, \cdots, x_1) \\ I(x) = x_n - x_1 \end{cases} \qquad \text{for even } n$$

$$\begin{cases} \kappa(x) = Switch_{12}(x) = (x_2, x_1, x_4, x_3, \cdots, x_n, x_{n-1}) \\ I(x) = 0 \end{cases} \qquad \text{for even } n$$

さらに K_2 および $K_1^\vee$ を次で定める：

$$K_2(z^d x \otimes z^e y) = z^d x \otimes K(z^e y)$$

$$K_1^\vee(z^d x \otimes z^e y) = K^\vee(z^d x) \otimes z^e y$$

ここで、K_2 および $K_1^\vee$ が作用していない成分は $Aff(B)$ または $Aff(B^\vee)$ のどちらかとする。

定理 2. ([8]) 次の組合せ論的反射方程式が成り立つ。

$$K_2 R^\vee K_2 R = R^{\vee\vee} K_2 R^\vee K_2,$$

$$K_1^\vee R^\vee K_1^\vee R^{\vee\vee} = R K_1^\vee R^\vee K_1^\vee$$

4. $A^{(1)}_{2n-1}$ 型量子群

$n \geq 2$ とする。$\mathbf{U} = U_q(A^{(1)}_{2n-1})$ を Drinfeld-神保の意味での $A^{(1)}_{2n-1}$ 型量子群とする。 すなわち、$\mathbf{U}$ は生成元を $e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$ $(i \in \mathbb{Z}_{2n})$ とし、以下の関係式を満たす Hopf 代数とする。

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1,\ \ [k_i, k_j] = 0,\ \ k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j,\ \ k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j,\ \ [e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^\nu e_i^{(1-a_{ij}-\nu)} e_j e_i^{(\nu)} = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^\nu f_i^{(1-a_{ij}-\nu)} f_j f_i^{(\nu)} = 0 \ \ (i \neq j)$$

ただし、$e_i^{(\nu)} = e_i^\nu/[\nu]!, f_i^{(\nu)} = f_i^\nu/[\nu]!, [m]! = \prod_{j=1}^m [j], a_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$ とする。$\mathbf{U}$ は Hopf 代数なので余積 $\Delta : \mathbf{U} \to \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$ を考えることができる。ここでは以下で与えられる余積を用いる：

$$\Delta(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}\ ,\ \Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + k_i \otimes e_i\ ,\ \Delta(f_i) = f_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$

スペクトルパラメータ $x \in \mathbb{Q}(q)$ と正の整数 l に対し、2 つの $\mathbf{U}$ の既約表現

$$\pi_{l,x} :\ \mathbf{U} \to \mathrm{End}(V_{l,x}), \quad V_{l,x} = \bigoplus_{\alpha \in B_l} \mathbb{Q}(q) v_\alpha$$

$$\pi^*_{l,x} :\ \mathbf{U} \to \mathrm{End}(V^*_{l,x}), \quad V^*_{l,x} = \bigoplus_{\alpha \in B_l} \mathbb{Q}(q) v^*_\alpha$$

を考える。これらの表現における $\mathbf{U}$ の生成元の作用は次で与えられる：

$$\begin{array}{ll} e_i v_\alpha = x^{\delta_{i,0}} [\alpha_{i+1}] v_{\alpha+\epsilon_i-\epsilon_{i+1}} & e_i v^*_\alpha = x^{\delta_{i,0}} [\alpha_i] v^*_{\alpha-\epsilon_i+\epsilon_{i+1}} \\ f_i v_\alpha = x^{-\delta_{i,0}} [\alpha_i] v_{\alpha-\epsilon_i+\epsilon_{i+1}} & f_i v^*_\alpha = x^{-\delta_{i,0}} [\alpha_{i+1}] v^*_{\alpha+\epsilon_i-\epsilon_{i+1}} \\ k_i v_\alpha = q^{\alpha_i - \alpha_{i+1}} v_\alpha, & k_i v^*_\alpha = q^{-\alpha_i + \alpha_{i+1}} v^*_\alpha \end{array}$$

ここで、ϵ_i は i 番目の標準基底を表す。$V_{l,x}$ は l 階対称テンソル表現と呼ばれる。

3 つの量子 R 行列 R, R^*, R^{**} を次の intertwining 関係式で定める：

$$\begin{cases} R(x/y) :\ V_{l,x} \otimes V_{m,y} \to V_{m,y} \otimes V_{l,x}, \\ (\pi_{m,y} \otimes \pi_{l,x}) \Delta(u) R(x/y) = R(x/y)(\pi_{l,x} \otimes \pi_{m,y}) \Delta(u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^*(x/y) :\ V^*_{l,x} \otimes V_{m,y} \to V_{m,y} \otimes V^*_{l,x}, \\ (\pi_{m,y} \otimes \pi^*_{l,x}) \Delta(u) R^*(x/y) = R^*(x/y)(\pi^*_{l,x} \otimes \pi_{m,y}) \Delta(u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^{**}(x/y) :\ V^*_{l,x} \otimes V^*_{m,y} \to V^*_{m,y} \otimes V^*_{l,x}, \\ (\pi^*_{m,y} \otimes \pi^*_{l,x}) \Delta(u) R^{**}(x/y) = R^{**}(x/y)(\pi^*_{l,x} \otimes \pi^*_{m,y}) \Delta(u) \end{cases}$$

ここで、$u \in \mathbf{U}$. U' を $\mathbf{U}$ の右余イデアル部分代数とする、すなわち $\Delta(U') \subset U' \otimes \mathbf{U}$ を満たすとする。量子 K 行列を、線形写像 $K(x) : V_{l,x} \to V^*_{l,x^{-1}}$ で次を満たすものとする。

$$K(x) \pi_{l,x}(a) = \pi^*_{l,x^{-1}}(a) K(x) \quad \text{for any } a \in U'$$

我々の目的は、結晶化することで $Switch$ に対応する量子反射方程式の解を与える、すなわち $\mathbf{U}$ の適切な右余イデアル部分代数 U' を与えることである。ここで用いるのが $\imath$ 量子群である。

注意 3. $lotateleft$ に対応する量子 K 行列は [9] で与えられている。

5. $\imath$ 量子群

$\imath$ 量子群を定めるために以下セッティングを行う。$\mathfrak{g}$ を捻れのない A 型アフィンリー代数とし、$(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ を対称化可能一般化 Cartan 行列 $A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$ の最小実現とする。すなわち、$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数とし、$\alpha_j(h_i) = a_{i,j}$ を満たすとする。X を I の有限型部分集合とし、$2\rho_X^\vee$ を X に対応する正コルートたちの和とする。W_X をワイル群 W の X に対応する放物型部分群とし、w_X をその最長元とする。次の I の部分集合を定める：

$$Aut(A,X) = \{\tau : I \to I \mid \tau(X) = X, a_{i,j} = a_{\tau(i),\tau(j)} \text{ for all } i,j \in I\}$$

$\tau \in Aut(A,X)$ かつ以下の条件を満たすとき、(X,τ) を admissible ペアと呼ぶ：

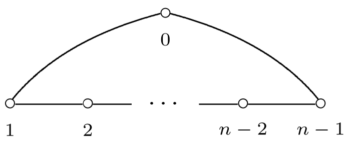
1: $\tau^2 = id_I$

2: τ と $-w_X$ の X への作用が一致する

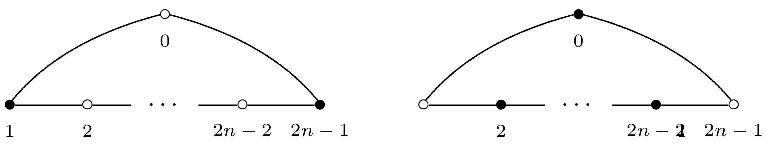
3: $j \in I \setminus X$ かつ $\tau(j) = j$ のとき、$\alpha_j(\rho_X^\vee) \in \mathbb{Z}$

admissible ペアは佐武図形と呼ばれる図形を用いて分類することが可能である。簡単な佐武図形の場合、元の Dynkin 図形に加え有限型集合 X に対応する頂点を黒色に識別する。

例 4. (1) AI 型：$(I,X,\tau) = (\{0,1,\cdots,n-1\}, \emptyset, id)$



(2) AII 型：$(I,X,\tau) = (\{0,1,\cdots,2n-1\}, \{1,3,\cdots,2n-1\}, id)$ または $(I,X,\tau) = (\{0,1,\cdots,2n-1\}, \{0,2,\cdots,2n-2\}, id)$



写像 $\Theta = -w_X \circ \tau : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ を $\tau(\alpha_i) = \alpha_{\tau(i)}$ により定める。Q を $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ で生成されるルート格子とし、Q^Θ を Θ で固定される Q の部分格子とする。さらに U_Θ^0 を全ての $k_\mu (\mu \in Q^\Theta)$ で生成される代数とし、$\mathcal{M}_X$ を $e_i, f_i, k_i^{\pm1} (i \in X)$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする。写像 $s : I \to \mathbb{Q}(q)^\times$ を以下を満たすものとする。

$$s(i) = 1 \qquad\qquad \text{if } i \in X \text{ or } \tau(i) = i$$

$$s(i) = (-1)^{\alpha_i(2\rho_X^\vee)} s(\tau(i)) \quad \text{if } i \notin X \text{ and } \tau(i) \neq i$$

$T_i (= T''_{i,1}$ ([12])) を量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ と可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群上の Lusztig 自己同型とし、任意の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k} \in W$ に対し well-defined な元 $T_w := T_{i_1} \cdots T_{i_k}$ を定める。さらに以下の 3 つの集合を定める：

$$I' = \{i \in I \setminus X \mid \tau(i) = i \text{ and } a_{i,j} = 0 \text{ for all } j \in X\}$$

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{Q}(q)^\times)^{I\setminus X} \mid c_i = c_{\tau(i)} \text{ if } \tau(i) \neq i \text{ and } (\alpha_i, \Theta(\alpha_i)) = 0\}$$

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{s} \in (\mathbb{Q}(q))^{I\setminus X} \mid s_j \neq 0 \Longrightarrow (\ j \in I' \text{ and } a_{i,j} \in -2\mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in I' \setminus \{j\}\ )\ \}$$

定義 5. (X,τ) を admissible ペアとし、$\mathbf{c} \in \mathcal{C}$、$\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ とする。$\imath$ 量子群 $U^\imath$ は、$\mathcal{M}_X$, U_Θ^0,

$$b_i = f_i - c_i s(\tau(i)) T_{w_X}(e_{\tau(i)}) k_i^{-1} + s_i k_i^{-1} \text{ for all } i \in I \setminus X$$

で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数である。

定理 6. $\imath$ 量子群 $U^\imath$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の右余イデアル部分代数である。すなわち、$\Delta(U^\imath) \subset U^\imath \otimes U_q(\mathfrak{g})$ が成り立つ。

具体的に AII 型 $\imath$ 量子群 $U_\varepsilon^\imath$ について見ていく。$\varepsilon = 0, 1$、$X := \{1+\varepsilon, 3+\varepsilon, \cdots, 2n-1+\varepsilon\}$ とするとき、$U_\varepsilon^\imath$ は $e_i, f_i, k_i^{\pm1}$ $(i \in X)$, $b_i = f_i - \gamma_i T_{i-1} T_{i+1}(e_i) k_i^{-1}$ $(i \in I \setminus X)$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数である。ここで、$\gamma_i := c_i s(i)$ とした。$\sigma^{(\varepsilon)}$ を $\alpha \in B_l$ の置換で、$i \equiv \varepsilon$ $(mod\ 2)$ のとき α_{i-1} と α_i を入れ替えるものとする。

定理 7. ([10]) $U^\imath_\varepsilon$ に対応する量子 K 行列が $\prod_{j\in I_\circ}\gamma_j = (-q)^n$ の時に限りスカラー倍を除き一意に決まり、次で与えられる：

$$K(x)v_\alpha = x^{\varepsilon(\alpha_1-\alpha_0)} \prod_{j=\varepsilon,2+\varepsilon,\cdots,2n-2+\varepsilon} (-q^{-1}\gamma_j)^{-\sum_{i=1+\varepsilon}^{j}\alpha_i} v^*_{\sigma^\varepsilon(\alpha)}$$

定理 8. ([10]) 量子反射方程式

$$\begin{aligned}K_1(x)R^*((xy)^{-1})K_1(y)R(xy^{-1})\\ = R^{**}(xy^{-1})K_1(y)R^*((xy)^{-1})K_1(x)\end{aligned}$$

が線形写像 $V_{l,x}\otimes V_{m,y}\to V^*_{l,x^{-1}}\otimes V^*_{m,y^{-1}}$ として成り立つ。

$\gamma_j = -q$ $(j\in I_\circ)$ とすることで $K(x)v_\alpha = x^{\varepsilon(\alpha_1-\alpha_0)}v^*_{\sigma^\varepsilon(\alpha)}$ となる。この式により、$\varepsilon = 0,1$ のとき、量子 K 行列はそれぞれ $I(\alpha)=0, \kappa(\alpha)=Switch_{12}(\alpha)$ と $I(\alpha)=\alpha_0-\alpha_1, \kappa(\alpha)=Switch_{1n}(\alpha)$ を用いた組合わせ K に対応する。理論上量子 K 行列から組合せ K を得るには結晶化 $(q\to 0)$ が必要だが、今の場合は必要ない。

6. 普遍 K 行列

普遍 K 行列は表現によらず定まり、具体的に求めることは重要な問題の 1 つである。普遍 K 行列を構成する要素の最も重要な 1 つに quasi K 行列がある。ここでは quasi K 行列の構成法を述べていく。バー対合 $^-: U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{Q}$ 代数自己同型であり次で定まる：

$$\bar{e_i} = e_i\ ,\ \bar{f_i} = f_i\ ,\ \bar{k_i} = k_i^{-1}\ ,\ \overline{q^{\frac{1}{d}}} = q^{-\frac{1}{d}} \quad \text{for all } i\in I \text{ and some } d\in\mathbb{Z}$$

$2\rho_X$ を X に対応する正ルートの和とし、パラメータ $(c_i)_{i\in I\setminus X}\in\mathcal{C}$ に次の条件を課す：

$$c_{\tau(i)} = q^{(\alpha_i,\Theta(\alpha_i)-2\rho_X)}\bar{c_i} \quad \text{for all } i\in I\setminus X$$

このとき、以下で定まる $\mathbb{Q}$ 代数自己同型 $^{-\imath}: U^\imath \longrightarrow U^\imath$ が存在する：

$$\bar{x}^\imath = \bar{x} \text{ for all } x\in\mathcal{M}_X U^0_\Theta, \quad \bar{b_i}^\imath = b_i \text{ for all } i\in I\setminus X$$

定理 9. パラメータ $(s_i)_{i\in I\setminus X}\in\mathcal{S}$ に次の条件を課す：

$$\bar{s_i} = s_i \textit{ for all } i\in I\setminus X$$

このとき、一意に定まる元 $\mathfrak{X} = \sum_{\mu\in Q^+}\mathfrak{X}_\mu \in \prod_{\mu\in Q^+}U^+_\mu, \mathfrak{X}_0 = 1, \mathfrak{X}_\mu\in U^+_\mu$ であり、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の完備化において次を満たすものが存在する：

$$\bar{x}^\imath\ \mathfrak{X} = \mathfrak{X}\ \bar{x} \textit{ for all } x\in U^\imath$$

このとき $\mathfrak{X}$ を *quasi* K 行列と呼ぶ。

任意の $i\in I$ に対し、一意に定まる線形写像 ${}_ir, r_i : U^+\longrightarrow U^+$ で次を満たすものが存在する：

$$r_i(e_j) = \delta_{i,j},\ r_i(xy) = q^{(\alpha_i,\nu)}r_i(x)\ y + x\ r_i(y), \quad {}_ir(e_j) = \delta_{i,j},\ {}_ir(xy) = {}_ir(x)y + q^{(\alpha_i,\mu)}\ x\ {}_ir(y)$$

$$\text{for any } x\in U^+_\mu \text{ and } y\in U^+_\nu$$

互いに素な整数 $d_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し、$D = \mathrm{diag}(d_i \mid i\in I)$ を対称化可能一般化 Cartan 行列の対角行列とし、$q_i := q^{d_i}$ とおく。

命題 10. *quasi* K 行列の定義式 $\bar{x}^\imath\ \mathfrak{X} = \mathfrak{X}\ \bar{x}$ は次の帰納式と同値である：

$$r_i(\mathfrak{X}_\mu) = (q_i - q_i^{-1})(\mathfrak{X}_{\mu+\Theta(\alpha_i)-\alpha_i}\overline{c_i s(\tau(i)) T_{w_X}(e_{\tau(i)})} - \bar{s_i}\mathfrak{X}_{\mu-\alpha_i}),$$

$${}_ir(\mathfrak{X}_\mu) = (q_i - q_i^{-1})(q^{-(\Theta(\alpha_i),\ \alpha_i)}c_i s(\tau(i)) T_{w_X}(e_{\tau(i)})\mathfrak{X}_{\mu+\Theta(\alpha_i)-\alpha_i} - s_i\mathfrak{X}_{\mu-\alpha_i})$$

for all $\mu\in U^+$ *and all* $i\in I\setminus X$.

この帰納式を解くことで理論上 quasi K 行列を具体的に求めることができるが、困難な問題でありまだあまり求められていない。

定理 11. ([5]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ または $X=\emptyset$ のとき、*quasi* K 行列の明示式が得られる。

References

[1] A. Appel, B. Vlaar, Universal k-matrices for quantum Kac-Moody algebras, arXiv:2007.09218.

[2] M. Balagović, S. Kolb, Universal K-matrix for quantum symmetric pairs, J. Reine Angew. Math. **747** (2019), 299-353.

[3] H. Bao, W. Wang, A new approach to Kazhdan-Lusztig theory of type B via quantum symmetric pairs, Astérisque 2018, no. 402, vii+134 pp.

[4] H. Bao, W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs of Kac-Moody type, arXiv:1811.09848.

[5] L. Dobson, S. Kolb, Factorisation of quasi K-matrices for quantum symmetric pairs, arXiv:1804.02912

[6] M. Kashiwara, On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J. **63** (1991), 465-516.

[7] S. Kolb, Quantum symmetric Kac-Moody pairs, Adv. Math. **267** (2014), 395-469.

[8] A. Kuniba, M. Okado, Y. Yamada, Box-ball system with reflecting end, J. of Nonlinear Math. Phys. **12** (2005), 475-507.

[9] A. Kuniba, M. Okado, A. Yoneyama, Matrix product solution to the reflection equation associated with a coideal subalgebra of $U_q(A^{(1)}_{n-1})$, Lett. in Math. Phys. **109** (2019), 2049-2067.

[10] H. Kusano, M. Okado, Solution to the reflection equation related to the ι quantum group of type AII, arXiv:2012.00967, to appear in Commun. Algebra.

[11] G. Letzter, Symmetric pairs for quantized enveloping algebras, J. Algebra **220** (1999), no. 2, 729-767.

[12] G. Lusztig, Introduction to quantum groups, Birkhäuser, Boston, 1994.

[13] V. Regelskis, B. Vlaar, Reflection matrices, coideal subalgebras and generalized Satake diagrams of affine type, arXiv:1602.08471.

[14] H. Watanabe, Classical weight modules over ιquantum groups, arXiv:1912.11157.

Hiroto Kusano, Mathmatics & Physics, Graduate School of Science, Osaka City University