

Polyhedral realizations and extended Young diagrams, Young walls of several classical affine types

金久保 有輝 (筑波大学 数理物質系)

Yuki Kanakubo (Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1 イントロダクション

結晶基底は, 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ やその表現の構造を組み合わせ論的に調べることを可能にするものであり, 本稿で主に扱う結晶基底 $B(\infty)$ は, 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の骨格構造を明らかにするものである [9, 10, 15]. ここに, \mathfrak{g} は対称化可能な \mathbb{C} 上のカツツ・ムーディリー環である. 結晶基底は様々な組み合わせ論的対象で書き表されるが, [17] では $B(\infty)$ を $\mathbb{Z}^\infty = \{\mathbf{a} = (\dots, a_3, a_2, a_1) \mid a_k \in \mathbb{Z}, a_l = 0, l \gg 0\}$ の元で表示する多面体表示が導入された. \mathfrak{g} の添え字の無限列 $\iota = (\dots, i_3, i_2, i_1)$ を一つ固定することで柏原埋め込み $\Psi_\iota : B(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}_\iota^\infty$ が定義され, 多面体表示はその像として定義される. ここに, \mathbb{Z}_ι^∞ は, 集合 \mathbb{Z}^∞ に, ι に付随した結晶構造が定められたものである. 特に \mathfrak{g} が有限次元半単純リー環で, $\iota = (\dots, i_N, \dots, i_2, i_1)$ ((i_N, \dots, i_2, i_1) はワイル群 W の最長元の最短表示) である場合, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ は string cone と呼ばれる多面錐の整数点の集合と同一視することができる [14]. $\text{Im}(\Psi_\iota)$ の具体形を求めるといのは自然な問題であり, [2, 3, 13, 17] 等では, $\iota = (\dots, n, \dots, 2, 1, n, \dots, 2, 1)$ で, \mathfrak{g} が有限次元単純リー環の場合, あるいはいくつかのアフィンリー環の場合に, その具体形が求められている.

[5] では, \mathfrak{g} が古典型有限次元単純リー環で, ι が adapted という特別な条件を満たす場合を考え, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ の具体形を表す線形不等式を 1 列タブローの言葉で表した. 1 列タブローは, 古典型有限次元単純リー環の基本表現に対する結晶基底 $B(\Lambda_r)$ を表示するのに用いられる [12]. このことから, 他のリー環 \mathfrak{g} に対する $\text{Im}(\Psi_\iota)$ の具体形も, \mathfrak{g} の基本表現に関連する組み合わせ論的対象を用いて書き表されるのではないかと, という予測が立つ.

本稿では, \mathfrak{g} が $A_{n-1}^{(1)}$ 型, $C_{n-1}^{(1)}$ 型, $A_{2n-2}^{(2)}$ 型, $D_n^{(2)}$ 型のアフィンリー環の場合を考え, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ の具体形を, [1, 7, 8, 16] 等で扱われている拡大ヤング図形, ヤング壁といった組み合わせ論的対象を用いて与える. これらの対象は, アフィン量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の基本表現を組み合わせ論的に実現する際に用いられるものである.

2 多面体表示

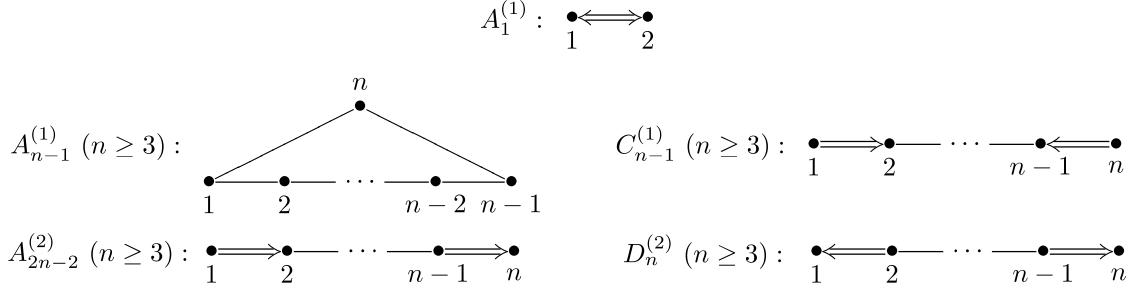
この節では, 結晶基底の多面体表示について紹介する.

2.1 記号

本稿では, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を, 一般化カルタン行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ に付随する \mathbb{C} 上の対称化可能なカツツ・ムーディリー環とする. ここに, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ である. \mathfrak{h} を \mathfrak{g} のカルタン部分代数, $\{h_i\}_{i \in I}$ を単純コルート, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を単純ルートの集合とし, \langle, \rangle を, $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*$ のペアリングとする. P を, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を含むウエイト格子, $P_+ := \{\lambda \in P \mid \text{任意の } i \text{ に対し, } \langle h_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, $P^* = \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle h, P \rangle \subset \mathbb{Z}\}$ とする. 各 $i \in I$ に対し, Λ_i を基本ウエイトとする (つまり, $\Lambda_i(h_j) = \delta_{i,j}$).

$U_q(\mathfrak{g})$ を \mathfrak{g} に付随する量子群, e_i, f_i ($i \in I$), q^h ($h \in P^*$) をその生成元とする. 各 $\lambda \in P_+$ に対し, $(L(\lambda), B(\lambda))$ を, 最高ウエイト λ を持つ可積分既約最高ウエイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底とする. また, f_i

($i \in I$) で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底を, $(L(\infty), B(\infty))$ とする. 二つの整数 m, l ($m \leq l$) に対し, $[m, l] := \{m, m+1, \dots, l-1, l\}$ とする. なお, $A_{n-1}^{(1)}$ 型, $C_{n-1}^{(1)}$ 型, $A_{2n-2}^{(2)}$ 型, $D_n^{(2)}$ 型のダイキン図形に対する頂点の番号付けは, 以下の通りとする:



2.2 結晶基底 $B(\infty)$ の多面体表示

多面体表示は, 結晶基底の各元を,

$$\mathbb{Z}^\infty = \{(\dots, a_3, a_2, a_1) \mid a_i \in \mathbb{Z}, a_k = 0 (k \gg 0)\}$$

の元で表す表示方法である [17]. 多面体表示を構成するには, I の添え字の無限列 $\iota = (\dots, i_3, i_2, i_1)$ で,

- $i_k \neq i_{k+1} (k \in \mathbb{Z}_{>0})$,
- $\#\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid i_k = j\} = \infty (\forall j \in I)$

を満たすものを一つ固定する必要がある. 例えば, \mathfrak{g} のランクが 3 なら,

$$\iota = (\dots, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$$

と, 3, 2, 1 というワードを無限に繰り返すような無限列や,

$$\iota = (\dots, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 1)$$

と, 3, 1, 2, 3, 2, 1 というワードを無限に繰り返すような無限列など, 無数に考えることができる.

この ι に付随した写像 $\Psi_\iota : B(\infty) \rightarrow \mathbb{Z}^\infty$ を以下のように構成する. まず, 各 $i \in I$ に対し,

$$B_i := \{(m)_i \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

とおく. この集合上の写像 $\varepsilon, \varphi, \text{wt}$ を

- $\varepsilon_j((m)_i) = \varphi_j((m)_i) = -\infty (j \neq i)$,
- $\text{wt}((m)_i) = m\alpha_i, \varepsilon_i((m)_i) = -m, \varphi_i((m)_i) = m$

で定める. また, 柏原作用素を $\tilde{e}_j((m)_i) = \tilde{f}_j((m)_i) = 0 (j \neq i)$,

$$\begin{aligned} \dots (-2)_i \xrightarrow{\tilde{e}_i} (-1)_i \xrightarrow{\tilde{e}_i} (0)_i \xrightarrow{\tilde{e}_i} (1)_i \xrightarrow{\tilde{e}_i} (2)_i \xrightarrow{\tilde{e}_i} \dots \\ \dots (-2)_i \xleftarrow{\tilde{f}_i} (-1)_i \xleftarrow{\tilde{f}_i} (0)_i \xleftarrow{\tilde{f}_i} (1)_i \xleftarrow{\tilde{f}_i} (2)_i \xleftarrow{\tilde{f}_i} \dots \end{aligned}$$

で定めると, B_i は結晶となる.

定理 2.1. [11] 各 $i \in I$ に対し, 結晶の strict な埋め込み

$$\Psi_i : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_i$$

で, $u_\infty \mapsto u_\infty \otimes (0)_i$ となるものがただ一つ存在する. ここに, u_∞ は $B(\infty)$ の最高ウェイトベクトルである.

この定理を繰り返し使うことで, $\iota = (\dots, i_2, i_1)$ の最初の l 個の添え字 $i_l, \dots, i_2, i_1 \in I$ に対し, 結晶の strict な埋め込み

$$\Psi_{i_l, \dots, i_1} := (\Psi_{i_l} \otimes \text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}) \circ \dots \circ (\Psi_{i_2} \otimes \text{id}) \circ \Psi_{i_1} : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_l} \otimes \dots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1}$$

を定義できる. 各 $b \in B(\infty)$ に対し, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を十分大きくとると, ある $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して,

$$\Psi_{i_l, \dots, i_1}(b) = u_\infty \otimes (-a_l)_{i_l} \otimes (-a_{l-1})_{i_{l-1}} \otimes \dots \otimes (-a_1)_{i_1}$$

という形になる. つまり, テンソル積の $B(\infty)$ の成分が最高ウェイトベクトルになる. この事実を利用して, 写像 $\Psi_\iota : B(\infty) \rightarrow \mathbb{Z}^\infty$ を,

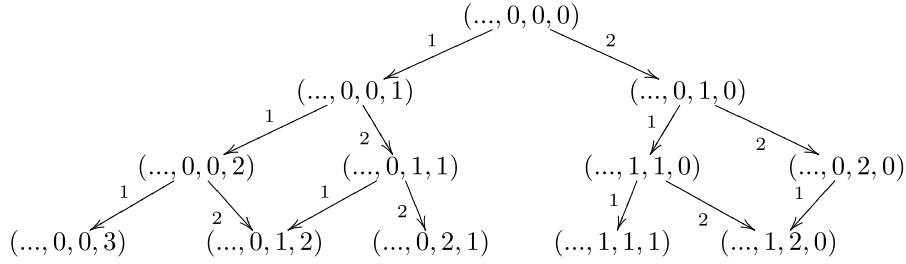
$$\Psi_\iota(b) = (\dots, 0, 0, a_l, \dots, a_1)$$

で定める. ここで, \mathbb{Z}_ι^∞ は, 集合としては \mathbb{Z}^∞ と同じもので, ι に付随した結晶構造が適当に定められたものである [17].

定理 2.2. [17] $\Psi_\iota : B(\infty) \rightarrow \mathbb{Z}_\iota^\infty$ は, 結晶の strict な埋め込みで, $\Psi_\iota(u_\infty) = (\dots, 0, 0, 0)$ を満たすただ一つのものである.

[17] では, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ の具体形を計算するアルゴリズムを与えており, その具体形のことを多面体表示と呼んでいる.

例 2.3. $\mathfrak{g} : A_2$ 型, $\iota = (\dots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ とする. このとき, $(B(\infty) \cong) \text{Im}(\Psi_\iota) \subset \mathbb{Z}^\infty$ の結晶グラフの一部分は, 以下ようになる:



$\text{Im}(\Psi_\iota)$ は, \mathbb{Z}^∞ の真部分集合であり, 以下のようにいくつかの線形不等式で特徴づけられる:

$$\text{Im}(\Psi_\iota) = \{(\dots, a_3, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}^\infty \mid a_1 \geq 0, a_2 \geq a_3 \geq 0, a_k = 0 (k > 3)\}.$$

本稿の目的は, \mathfrak{g} が $A_{n-1}^{(1)}$ 型, $D_n^{(2)}$ 型, $A_{2n-2}^{(2)}$ 型, $C_{n-1}^{(1)}$ 型の場合を考え, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ を特徴づける線形不等式を, 拡大ヤング図形やヤング壁といった組み合わせ論的対象で表すことである. 次節では, これらの組み合わせ論的対象について紹介する.

注意 2.4. 以下, 記号の簡略化のため, $A_{n-1}^{(1)}$ 等のランクを省略して, $A^{(1)}$ のように書くこともある.

3 組み合わせ論的対象

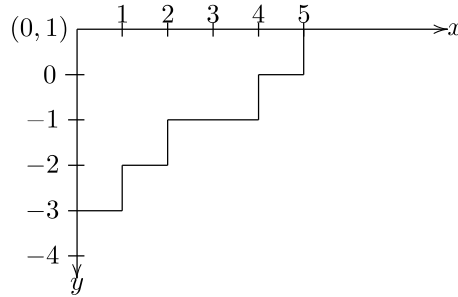
3.1 拡大ヤング図形

定義 3.1. [1, 4] 拡大ヤング図形 T とは, 数列 $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ であって, 次の条件を満たすものをいう :

- 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $y_k \in \mathbb{Z}$, $y_k \leq y_{k+1}$ となっている,
- ある $y_\infty \in \mathbb{Z}$ が存在し, k が十分大きければ, $y_k = y_\infty$ となっている.

拡大ヤング図形 $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は, 点 (k, y_k) と点 $(k+1, y_k)$ を線で結び, $y_k < y_{k+1}$ のときは点 $(k+1, y_k)$ と点 $(k+1, y_{k+1})$ を線で結ぶことで, $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\leq y_\infty}$ 内のヤング図形として表される.

例) $y_0 = -3, y_1 = -2, y_2 = y_3 = -1, y_4 = 0, y_5 = 1, \dots, y_\infty = 1$ は, 拡大ヤング図形である. これは, 次のようにヤング図形で表される :



$y_k < y_{k+1}$ のとき, 点 $(k+1, y_k)$ と $(k+1, y_{k+1})$ は角になる.

定義 3.2. [4] 拡大ヤング図形 $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対し, $y_k < y_{k+1}$ とするとき, 点 $(k+1, y_k)$ を *convex corner*, 点 $(k+1, y_{k+1})$ を *concave corner* という. 点 $(0, y_0)$ も, *concave corner* という.

上の例では, $(1, -3), (2, -2), (4, -1), (5, 0)$ は *convex corners*, $(0, -3), (1, -2), (2, -1), (4, 0), (5, 1)$ は *concave corners* である.

定義 3.3. [4, 8]

(i) 写像 $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} = I$ を

$$1, 2, \dots, n \mapsto 1, 2, \dots, n$$

で定め, これを周期 n の写像 $\pi_{A(1)} : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} = I$ に拡張する.

(ii) 写像 $\{1, 2, \dots, 2n-2\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を

$$1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n-2 \mapsto 1, 2, \dots, n, n-1, \dots, 2$$

で定め, これを周期 $2n-2$ の写像 $\pi_{C(1)} : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} = I$ に拡張する.

(iii) 写像 $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を

$$1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n-1 \mapsto 1, 2, \dots, n, n-1, \dots, 2, 1$$

で定め, これを周期 $2n-1$ の写像 $\pi_{A(2)} : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ に拡張する.

(iv) 写像 $\{1, 2, 3, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を

$$1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, 2n \mapsto 1, 2, \dots, n, n, n-1, \dots, 2, 1$$

で定め, これを周期 $2n$ の写像 $\pi_{D(2)} : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ に拡張する.

3.2 修正された拡大ヤング図形

$A_{2n-2}^{(2)}$ 型, $C_{n-1}^{(1)}$ 型の不等式を組み合わせ論的に表示するためには, 拡大ヤング図形の定義を修正した概念を導入する必要がある.

定義 3.4. [6] $k \in I \setminus \{1\}$ に対し, $\text{REYD}_{A^{(2)},k}$ を, 数列 $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ で, 以下の条件を満たすものの集合とする:

- $t \in \mathbb{Z}$ に対し, $y_t \in \mathbb{Z}$,
- 十分大きな $t > 0$ に対し, $y_t = k$ であり, 十分小さな $t < 0$ に対し, $y_t = k + t$,
- $t \in \mathbb{Z}$ で $k + t \not\equiv 0 \pmod{2n-1}$ となるものに対し, $y_{t+1} = y_t$ または $y_{t+1} = y_t + 1$ となる,
- $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $k + t \equiv 0 \pmod{2n-1}$ となるものに対し, $y_{t+1} \geq y_t$ となる,
- $t \in \mathbb{Z}_{<0}$ で $k + t \equiv 0 \pmod{2n-1}$ となるものに対し, $y_{t+1} \leq y_t + 1$ となる.

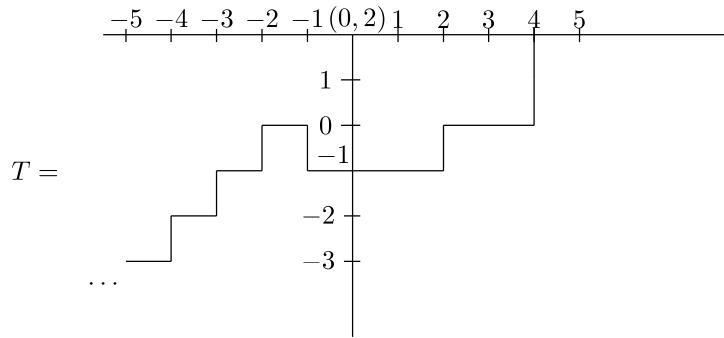
定義 3.5. [6] $k \in I \setminus \{1, n\}$ に対し, $\text{REYD}_{D^{(2)},k}$ を, 数列 $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ で, 以下の条件を満たすものの集合とする:

- $t \in \mathbb{Z}$ に対し, $y_t \in \mathbb{Z}$,
- 十分大きな $t > 0$ に対し, $y_t = k$ であり, 十分小さな $t < 0$ に対し, $y_t = k + t$,
- $t \in \mathbb{Z}$ で $k + t \not\equiv 0, n \pmod{2n}$ となるものに対し, $y_{t+1} = y_t$ または $y_{t+1} = y_t + 1$ となる,
- $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $k + t \equiv 0 \text{ or } n \pmod{2n}$ となるものに対し, $y_{t+1} \geq y_t$ となる,
- $t \in \mathbb{Z}_{<0}$ で $k + t \equiv 0 \text{ or } n \pmod{2n}$ となるものに対し, $y_{t+1} \leq y_t + 1$ となる.

例 3.6. $n = 3$ とするとき, $T = (y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ を次で定義すると, T は $\text{REYD}_{A^{(2)},2}$ の元である:

$$y_l = l + 2 \ (l \leq -2), \ y_{-1} = y_0 = y_1 = -1, \ y_2 = y_3 = 0, \ y_t = 2 \ (t \geq 4).$$

$\text{REYD}_{A^{(2)},k}$ や $\text{REYD}_{D^{(2)},k}$ の元は, 拡大ヤング図形の場合と似た方法で, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\leq k}$ の中に描かれる図形として表される. 例えば T は,



と表される.

拡大ヤング図形には, concave corner, convex corner という概念が定義されたが, $\text{REYD}_{A^{(2)},k}$, $\text{REYD}_{D^{(2)},k}$ の元にも, それに対応した概念を定義することができる:

定義 3.7. $X = A^{(2)}$, または $X = D^{(2)}$ とする. $T = (y_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in \text{REYD}_{X,k}$, $i \in \mathbb{Z}$ とする.

- (i) $T' = (y'_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ を, $y'_i = y_i - 1$, $y'_t = y_t$ ($t \neq i$) を満たす数列とする. $T' \in \text{REYD}_{X,k}$ であるとき, 点 (i, y_i) を T の admissible point と呼ぶ.
- (ii) $T'' = (y''_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ を, $y''_{i-1} = y_{i-1} + 1$, $y''_t = y_t$ ($t \neq i-1$) を満たす数列とする. $T'' \in \text{REYD}_{X,k}$ であるとき, 点 (i, y_{i-1}) を T の removable point と呼ぶ.

定義 3.8. $T = (y_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in \text{REYD}_{A^{(2)},k}$, $i \in \mathbb{Z}$ とする.

- (i) $y_{i-1} < y_i = y_{i+1}$ であり, 次の二条件のうちの一つが成り立つとき, 点 (i, y_i) は double 1-admissible point であるという :
- $i + k \equiv 1$ かつ $i < 0$,
 - $i + k \equiv 0$ かつ $i > 0$.
- (ii) $y_{i-2} = y_{i-1} < y_i$ であり, 次の二条件のうちの一つが成り立つとき, 点 (i, y_{i-1}) は double 1-removable point であるという :
- $i + k - 1 \equiv 1$ かつ $i > 1$,
 - $i + k - 1 \equiv 0$ かつ $i < 1$.
- (iii) 他の admissible (resp. removable) points は, single $\pi_{A^{(2)}}(i+k)$ -admissible (resp. $\pi_{A^{(2)}}(i+k-1)$ -removable) points という.

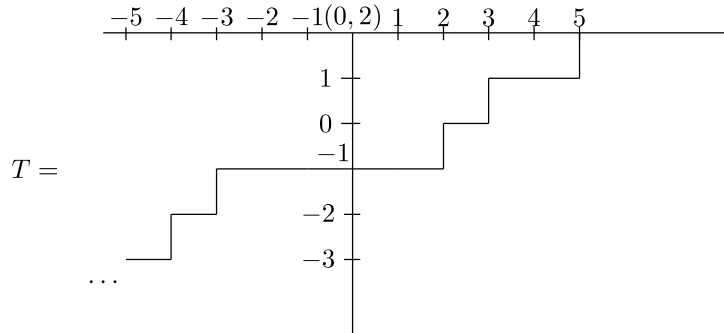
ここで, (i), (ii) において, $a \equiv b$ は, $a \equiv b \pmod{2n-1}$ を意味するものとする.

定義 3.9. $T = (y_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in \text{REYD}_{D^{(2)},k}$, $i \in \mathbb{Z}$ とし, $l \in \{0, n\}$ とする.

- (i) $y_{i-1} < y_i = y_{i+1}$ であり, 次の二条件のうちの一つが成り立つとき, 点 (i, y_i) は double $\pi_{D^{(2)}}(l)$ -admissible point であるという :
- $i + k \equiv l + 1$ かつ $i < 0$,
 - $i + k \equiv l$ かつ $i > 0$.
- (ii) $y_{i-2} = y_{i-1} < y_i$ であり, 次の二条件のうちの一つが成り立つとき, 点 (i, y_{i-1}) は double $\pi_{D^{(2)}}(l)$ -removable point であるという :
- $i + k - 1 \equiv l + 1$ かつ $i > 1$,
 - $i + k - 1 \equiv l$ かつ $i < 1$.
- (iii) 他の admissible (resp. removable) points は, single $\pi_{D^{(2)}}(i+k)$ -admissible (resp. $\pi_{D^{(2)}}(i+k-1)$ -removable) points という.

ここで, (i), (ii) において, $a \equiv b$ は, $a \equiv b \pmod{2n}$ を意味するものとする.

例 3.10. $n = 3, k = 2$ とし, 次のような $\text{REYD}_{A^{(2)},2}$ の元 $T = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を考える:



つまり, $y_l = l + 2$ ($l \in \mathbb{Z}_{\leq -3}$), $y_{-2} = y_{-1} = y_0 = y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = y_4 = 1$, $y_l = 2$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 5}$) である. このとき, 点 $(5, 1)$ は double 1-removable point, 点 $(3, 1)$ は double 1-admissible point, 点 $(5, 2)$ と点 $(-3, -1)$ は single 2-admissible points, 点 $(2, -1)$ は single 3-removable point である. 点 $(-1, -1)$ は single 1-admissible point であり, かつ single 1-removable point でもある.

3.3 ヤング壁

[7] に従って, ヤング壁を復習する. 壁とは, 以下の二種類のブロックで, I の添え字 j で色づけられたものを積み重ねたものである:

- (1) 横幅, 高さ, 奥行きが全て 1:



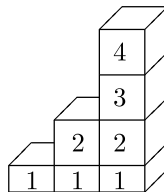
- (2) 横幅, 奥行きが 1 で, 高さが $\frac{1}{2}$:



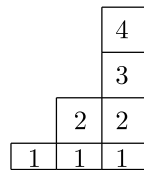
(1), (2) のブロックは, 簡単に次のように表される:

$$(1): \boxed{j} \quad (2): \boxed{j}$$

[7] では, もう一種類ブロックを考えているが, 本稿では扱わない. 以下は, 壁の例である:



これは簡単に



とも表記される. 本稿では, $X = A_{2n-2}^{(2)}$ 型, $X = D_n^{(2)}$ 型のヤング壁を紹介する. $X = A_{2n-2}^{(2)}$ のときは $k = 1$, $X = D_n^{(2)}$ のときは $k \in \{1, n\}$ とする. 基底状態の壁 Y_{Λ_k} とは, 以下のような高さ $\frac{1}{2}$ のブロックが無限に並べられた壁である:

$$Y_{\Lambda_k} = \cdots \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k}$$

定義 3.11. [7] ある壁 Y が次の条件を満たすとき, Y は, X 型の基底状態 Λ_k の proper なヤング壁と呼ばれる:

- (i) Y は, 基底状態の壁 Y_{Λ_k} の上に有限個のブロックを積むことで得られる,
- (ii) 各ブロックは, 図 1 のパターンに従って積み重ねられる,

(iii) h_j を、右から数えて j 番目の列の高さとするとき、

$$h_j \geq h_{j+1}$$

が成り立つ。さらに、 $h_j = h_{j+1}$ が成り立つのは、 $h_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ のときのみである。

各場合 ($X = A_{2n-2}^{(2)}, k = 1$), ($X = D_n^{(2)}, k = 1$), ($X = D_n^{(2)}, k = n$) における (ii) のパターンは、以下のとおりである:

$A_{2n-2}^{(2)}$,	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	⋮	⋮	⋮	⋮	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n	n	n	n	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	⋮	⋮	⋮	⋮	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	$D_n^{(2)}$,	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	⋮	⋮	⋮	⋮	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n	n	n	n	n	n	n	n	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	⋮	⋮	⋮	⋮	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	$D_n^{(2)}$,	<table style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px; text-align: center;"> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr> <tr><td>$n-2$</td><td>$n-2$</td><td>$n-2$</td><td>$n-2$</td></tr> <tr><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td><td>$n-1$</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>n</td><td>n</td></tr> </table>	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n	n	n	n	n	n	n	n	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	⋮	⋮	⋮	⋮	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	⋮	⋮	⋮	⋮	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	n	n	n	n	n	n	n	n
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
⋮	⋮	⋮	⋮																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
⋮	⋮	⋮	⋮																																																																																																																																																																						
3	3	3	3																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
⋮	⋮	⋮	⋮																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
⋮	⋮	⋮	⋮																																																																																																																																																																						
3	3	3	3																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
⋮	⋮	⋮	⋮																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
1	1	1	1																																																																																																																																																																						
2	2	2	2																																																																																																																																																																						
⋮	⋮	⋮	⋮																																																																																																																																																																						
$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$																																																																																																																																																																						
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						
n	n	n	n																																																																																																																																																																						

図 1

例 3.12. 次の壁は、 $A_4^{(2)}$ 型の基底状態 Λ_1 の proper なヤング壁である:

			2
			3
		2	2
	1	1	1
⋯	1	1	1

しかし、次の壁は $h_3 = h_4 \in \mathbb{Z}$ となっているため、proper なヤング壁ではない:

			2
			3
		2	2
	1	1	1
⋯	1	1	1

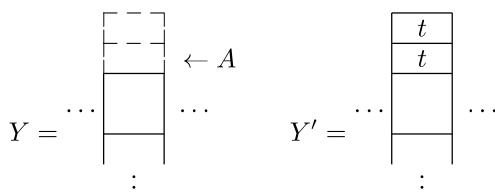
定義 3.13. [7] Y を proper なヤング壁とする。

- (i) Y において、 $i \in I$ で色づけられたブロックは、そのブロックを取り除いて得られる壁も proper なヤング壁であった場合、removable i -block と呼ばれる。

- (ii) Y のある場所に $i \in I$ で色づけられたブロックを加えて得られる壁も proper なヤング壁であった場合, その場所のことを i -admissible slot と呼ぶ.

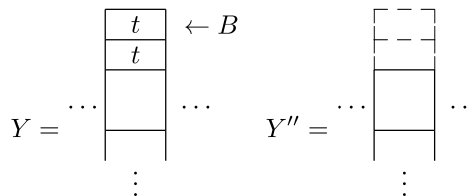
定義 3.14. [6] Y を $A_{2n-2}^{(2)}$ 型, または $D_n^{(2)}$ 型の proper なヤング壁とする. $t = 1$ または $t = n$ とする.

- (i) Y' を, Y のある列の一番上に, t で色づけられた高さ $\frac{1}{2}$ のブロックを二つ置いて得られる壁とする.



Y において, 一つ目のブロックを付け加える場所を上図のように A と名づける. Y' が proper なヤング壁となると, A を, Y の $double\ t$ -admissible slot と呼ぶ.

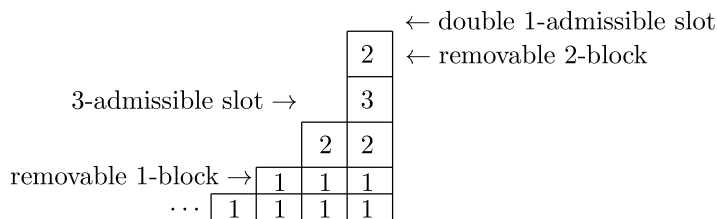
- (ii) Y'' を, Y のある列の一番上から, t で色づけられた高さ $\frac{1}{2}$ のブロックを二つ取り除いて得られる壁とする:



Y において, 最初に取り除かれるブロックを, 上図のように B と名づける. Y'' が proper なヤング壁となると, B を Y の $double\ t$ -removable block と呼ぶ.

- (iii) 他の admissible slot (resp. removable block) は, single admissible (resp. single removable) であるという.

例 3.15. 例 3.12 の $A_4^{(2)}$ 型の proper なヤング壁を考える. Admissible slots と removable blocks は以下のとおりである:



省略しているが, ただ一つの double 1-admissible slot を除いて, 他の全ての admissible slots と removable blocks は single である.

4 主結果

$A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ を \mathfrak{g} の一般化カルタン行列とする.

定義 4.1. ι が次の条件を満たすとき, ι は A に adapted であるという: $i, j \in I$ で $a_{i,j} < 0$ を満たすものについて, i, j で構成される ι の部分列が

$$(\cdots, i, j, i, j, i, j, i, j) \text{ または } (\cdots, j, i, j, i, j, i, j, i)$$

である.

なお, $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ が固定されている場合は, 単に ι は adapted である, という言い方もする.

例 4.2. $\mathfrak{g} : A_3^{(1)}$ 型, $\iota = (\dots, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3)$ とする.

- 1, 2 で構成される ι の部分列: $(\dots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$
- 2, 3 で構成される ι の部分列: $(\dots, 2, 3, 2, 3, 2, 3)$
- 1, 3 で構成される ι の部分列: $(\dots, 1, 3, 1, 3, 1, 3)$

以上により, ι は A に adapted である.

以下, A に adapted な列

$$\iota = (\dots, i_k, \dots, i_3, i_2, i_1)$$

を一つ固定する. $x_k \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^\infty, \mathbb{Z})$ を, $x_k(\dots, a_3, a_2, a_1) = a_k$ で定める. 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, $i_k = j$ で, かつ j が i_k, i_{k-1}, \dots, i_1 の中に s 回現れるとき,

$$x_k = x_{s,j}$$

と書き直す. ただし, $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ と $j \in I$ に対し, $x_{s,j} = 0$ とする. 例として, $\iota = (\dots, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3)$ のとき,

$$(\dots, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = (\dots, x_{3,3}, x_{2,2}, x_{2,1}, x_{2,3}, x_{1,2}, x_{1,1}, x_{1,3})$$

と書き直される. $i, j \in I$ で $a_{i,j} < 0$ となるものに対し,

$$p_{i,j} := \begin{cases} 1 & i, j \text{ で構成される } \iota \text{ の部分列が } (\dots, j, i, j, i), \\ 0 & i, j \text{ で構成される } \iota \text{ の部分列が } (\dots, i, j, i, j) \end{cases}$$

と定義する.

4.1 $A_{n-1}^{(1)}$ 型, $D_n^{(2)}$ 型について

副節 3.1 の記号・用語を用いる. まず, 各拡大ヤング図形に, パラメータ $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ の入った \mathbb{Z}^∞ から \mathbb{Z} への準同型写像を割り当てる. $X = A^{(1)}$, または $X = C^{(1)}$ に対し, 各 $k \in I$ について, $P^k(k) := 0$ とおき, 帰納的に

$$P^k(t) := P^k(t-1) + p_{\pi_X(t), \pi_X(t-1)} \quad t > k \text{ のとき,}$$

$$P^k(t) := P^k(t+1) + p_{\pi_X(t), \pi_X(t+1)} \quad t < k \text{ のとき}$$

と, 非負整数 $P^k(t)$ ($t \in \mathbb{Z}$) を定める. 整数点 (i, j) と $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$L_{s,k}^X(i, j) := x_{s+P^k(i+j)+\min(k-j,i), \pi_X(i+j)} \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^\infty, \mathbb{Z})$$

とおく. 拡大ヤング図形 T で, $y_\infty = k$ となるものに対し,

$$L_{s,k,\iota}^X(T) := \sum_{P:\text{concave corner of } T} L_{s,k}^X(P) - \sum_{P:\text{convex corner of } T} L_{s,k}^X(P) \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^\infty, \mathbb{Z}) \quad (4.1)$$

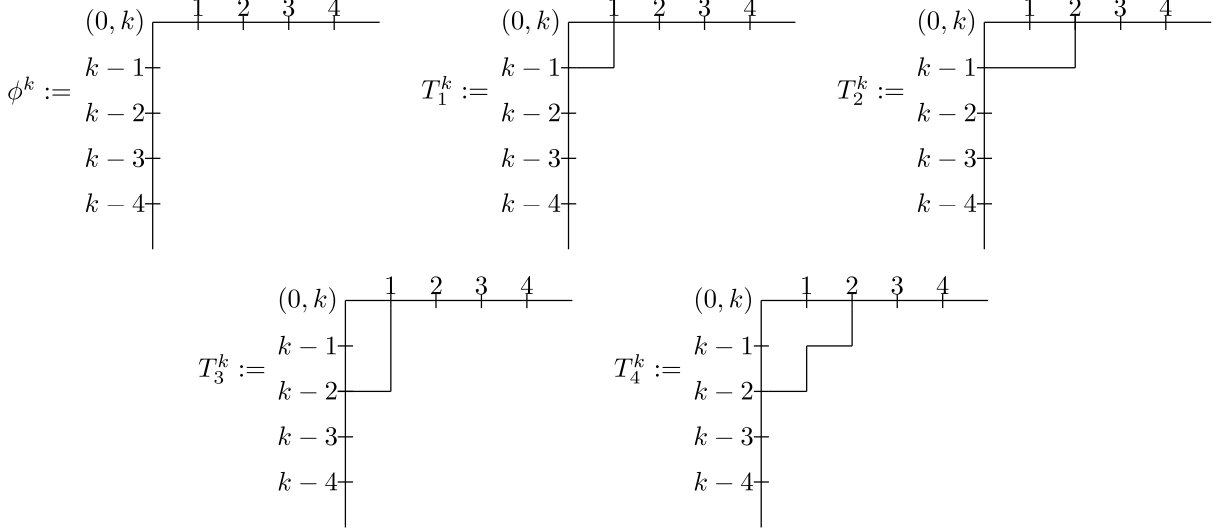
と定める. 次の定理が, 一つ目の主結果である.

定理 4.3. [6] 各 $k \in I$ に対し, EYD_k を, $y_\infty = k$ となる拡大ヤング図形全体の集合とする. \mathfrak{g} を $X = A_{n-1}^{(1)}$ 型, または $X = D_n^{(2)}$ 型とし, ι は adapted であると仮定する. このとき,

$$\text{Im}(\Psi_\iota) = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \mid \begin{array}{l} \text{任意の } s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \in I, \\ \text{と } T \in \text{EYD}_k, \text{ に対し, } L_{s,k,\iota}^X(T)(\mathbf{a}) \geq 0 \end{array} \right\}$$

が成り立つ. ここに, $L A_{n-1}^{(1)} = A^{(1)}$, $L D_n^{(2)} = C^{(1)}$ とする.

例 4.4. \mathfrak{g} を $A_2^{(1)}$ 型, $\iota = (\dots, 3, 1, 2, 3, 1, 2)$ とする. ι は adapted である. 上の定理を利用して, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式を, いくつか計算してみよう. $k \in I = \{1, 2, 3\}$ に対し, 以下は EYD_k の元である.



ϕ^k は, ただ一つの concave corner $(0, k)$ を持ち, convex corner を持たない. よって, (4.1) により, $L_{s,k,\iota}^{A^{(1)}}(\phi^k) = x_{s,k}$ となる. T_1^k は, $(1, k)$, $(0, k-1)$ が concave corners で, $(1, k-1)$ が convex corner である. よって,

$$L_{s,k,\iota}^{A^{(1)}}(T_1^k) = x_{s+P^k(k+1), \pi_{A^{(1)}}(k+1)} + x_{s+P^k(k-1), \pi_{A^{(1)}}(k-1)} - x_{s+1,k}$$

となる. 同様に計算を行うことで

$$L_{s,k,\iota}^{A^{(1)}}(T_2^k) = x_{s+P^k(k+2), \pi_{A^{(1)}}(k+2)} + x_{s+P^k(k-1), \pi_{A^{(1)}}(k-1)} - x_{s+P^k(k+1)+1, \pi_{A^{(1)}}(k+1)},$$

$$L_{s,k,\iota}^{A^{(1)}}(T_3^k) = x_{s+P^k(k+1), \pi_{A^{(1)}}(k+1)} + x_{s+P^k(k-2), \pi_{A^{(1)}}(k-2)} - x_{s+P^k(k-1)+1, \pi_{A^{(1)}}(k-1)},$$

$$\begin{aligned} L_{s,k,\iota}^{A^{(1)}}(T_4^k) &= x_{s+P^k(k-2), \pi_{A^{(1)}}(k-2)} + x_{s+1,k} + x_{s+P^k(k+2), \pi_{A^{(1)}}(k+2)} \\ &\quad - x_{s+P^k(k-1)+1, \pi_{A^{(1)}}(k-1)} - x_{s+P^k(k+1)+1, \pi_{A^{(1)}}(k+1)} \end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned} \dots, P^1(-1) &= 1, P^1(0) = 0, P^1(1) = 0, P^1(2) = 1, P^1(3) = 1, \dots, \\ \dots, P^2(0) &= 0, P^2(1) = 0, P^2(2) = 0, P^2(3) = 0, P^2(4) = 1, \dots, \\ \dots, P^3(1) &= 1, P^3(2) = 1, P^3(3) = 0, P^3(4) = 1, P^3(5) = 2, \dots \end{aligned}$$

であることから,

$$L_{s,1,\iota}^{A^{(1)}}(\phi^1) = x_{s,1}, \quad L_{s,1,\iota}^{A^{(1)}}(T_1^1) = x_{s+1,2} + x_{s,3} - x_{s+1,1}, \quad L_{s,1,\iota}^{A^{(1)}}(T_2^1) = x_{s+1,3} + x_{s,3} - x_{s+2,2},$$

$$L_{s,1,\iota}^{A^{(1)}}(T_3^1) = 2x_{s+1,2} - x_{s+1,3}, \quad L_{s,1,\iota}^{A^{(1)}}(T_4^1) = x_{s+1,2} + x_{s+1,1} - x_{s+2,2},$$

$$L_{s,2,\iota}^{A^{(1)}}(\phi^2) = x_{s,2}, \quad L_{s,2,\iota}^{A^{(1)}}(T_1^2) = x_{s,1} + x_{s,3} - x_{s+1,2}, \quad L_{s,2,\iota}^{A^{(1)}}(T_2^2) = x_{s,1} + x_{s+1,1} - x_{s+1,3},$$

$$L_{s,2,\iota}^{A^{(1)}}(T_3^2) = 2x_{s,3} - x_{s+1,1}, \quad L_{s,2,\iota}^{A^{(1)}}(T_4^2) = x_{s,3} + x_{s+1,2} - x_{s+1,3},$$

$$L_{s,3,\iota}^{A^{(1)}}(\phi^3) = x_{s,3}, \quad L_{s,3,\iota}^{A^{(1)}}(T_1^3) = x_{s+1,1} + x_{s+1,2} - x_{s+1,3}, \quad L_{s,3,\iota}^{A^{(1)}}(T_2^3) = x_{s+2,2} + x_{s+1,2} - x_{s+2,1},$$

$$L_{s,3,\iota}^{A^{(1)}}(T_3^3) = 2x_{s+1,1} - x_{s+2,2}, \quad L_{s,3,\iota}^{A^{(1)}}(T_4^3) = x_{s+1,1} + x_{s+1,3} - x_{s+2,1}$$

と計算される. 定理 4.3 より, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式の一部が計算された:

$$\text{Im}(\Psi_\iota) = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \left| \begin{array}{l} s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, a_{s,1} \geq 0, a_{s+1,2} + a_{s,3} - a_{s+1,1} \geq 0, a_{s+1,3} + a_{s,3} - a_{s+2,2} \geq 0, \\ 2a_{s+1,2} - a_{s+1,3} \geq 0, a_{s+1,2} + a_{s+1,1} - a_{s+2,2} \geq 0, \dots \\ a_{s,2} \geq 0, a_{s,1} + a_{s,3} - a_{s+1,2} \geq 0, a_{s,1} + a_{s+1,1} - a_{s+1,3} \geq 0, \\ 2a_{s,3} - a_{s+1,1} \geq 0, a_{s,3} + a_{s+1,2} - a_{s+1,3} \geq 0, \dots \\ a_{s,3} \geq 0, a_{s+1,1} + a_{s+1,2} - a_{s+1,3} \geq 0, a_{s+2,2} + a_{s+1,2} - a_{s+2,1} \geq 0, \\ 2a_{s+1,1} - a_{s+2,2} \geq 0, a_{s+1,1} + a_{s+1,3} - a_{s+2,1} \geq 0, \dots \end{array} \right. \right\}.$$

この例では, EYD_k の一部の元のみを扱ったが, 他のすべての元も考えることで, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ を定義するすべての不等式が得られる.

4.2 $A_{2n-2}^{(2)}$ 型, $C_{n-1}^{(1)}$ 型について

$s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 副節 3.2 の記号・用語を用いる. 各整数点 $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ と, $k \in I \setminus \{1\}$ ($X = A^{(2)}$ のとき), $k \in I \setminus \{1, n\}$ ($X = D^{(2)}$ のとき) に対し,

$$L_{s,k,\text{ad}}^X(i, j) = x_{s+P^k(i+k)+[i]_-+k-j, \pi_X(i+k)},$$

$$L_{s,k,\text{re}}^X(i, j) = x_{s+P^k(i+k-1)+[i-1]_-+k-j, \pi_X(i+k-1)}$$

とおく. ここに, $[i]_- = \min(i, 0)$ で, $P^k(l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は, $P^k(k) := 0$,

$$P^k(t) := P^k(t-1) + p_{\pi_X(t), \pi_X(t-1)} \quad t > k \text{ のとき},$$

$$P^k(t) := P^k(t+1) + p_{\pi_X(t), \pi_X(t+1)} \quad t < k \text{ のとき}$$

と, 帰納的に定められる非負整数である. 各 $T \in \text{REYD}_{X,k}$ に対し, $L_{s,k,\iota}^X(T) \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^\infty, \mathbb{Z})$ を

$$\begin{aligned} L_{s,k,\iota}^X(T) &:= \sum_{P:\text{single admissible point of } T} L_{s,k,\text{ad}}^X(P) - \sum_{P:\text{single removable point of } T} L_{s,k,\text{re}}^X(P) \\ &+ \sum_{P:\text{double admissible point of } T} 2L_{s,k,\text{ad}}^X(P) - \sum_{P:\text{double removable point of } T} 2L_{s,k,\text{re}}^X(P) \end{aligned}$$

で定める.

続いて, 副節 3.3 の記号・用語を用いる. $k = 1$ ($X = A^{(2)}$ のとき), $k \in \{1, n\}$ ($X = D^{(2)}$ のとき) とする. 写像 $\{1, 2, \dots, 2n-2\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を

$$l \mapsto l, \quad 2n-l \mapsto l \quad (2 \leq l \leq n-1),$$

$$1 \mapsto 1, \quad n \mapsto n$$

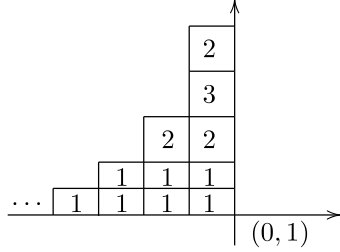
で定義し, これを周期 $2n-2$ で写像

$$\pi' : \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

に拡張する. 非負整数 $P^k(l)$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq k}$) を

$$P^k(k) := 0, \quad P^k(l) = P^k(l-1) + p_{\pi'(l), \pi'(l-1)} \quad (l > k)$$

と, 帰納的に定義する. 以下, proper なヤング壁を, $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq k}$ 内に描く. 例えば, $A_4^{(2)}$ 型 ($k=1$) のヤング壁は, 以下のように描かれる:



これにより, 各ブロック (長方形, または正方形) の頂点に, 座標が与えられることになる. S を以下のような $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq k}$ 内のブロック, またはスロットとする:

$$S = \begin{array}{ccc} & (-i-1, l+1) & (-i, l+1) \\ & \square & \\ (-i-1, l) & & (-i, l) \end{array}$$

S が $t \in I$ で色づけられているとすると,

$$L_{s,k,\text{ad}}^X(S) := x_{s+P^k(l)+i,t}, \quad L_{s,k,\text{re}}^X(S) := x_{s+P^k(l)+i+1,t}$$

とおく. $l \in \mathbb{Z}$ とし, S' を以下のような $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq k}$ 内の長方形型のブロック, またはスロットとする:

$$S' = \begin{array}{ccc} (-i-1, l+\frac{1}{2}) & (-i, l+\frac{1}{2}) & (-i-1, l+1) & (-i, l+1) \\ \square & & \square & \\ (-i-1, l) & (-i, l) & (-i-1, l+\frac{1}{2}) & (-i, l+\frac{1}{2}) \end{array} \quad \text{or}$$

S' は, $t=1$ または $t=n$ で色づけられる. このとき,

$$L_{s,k,\text{ad}}^X(S') := x_{s+P^k(l)+i,t}, \quad L_{s,k,\text{re}}^X(S') := x_{s+P^k(l)+i+1,t}$$

とおく. Proper なヤング壁 Y に対し,

$$L_{s,k,\iota}^X(Y) := \sum_{P:\text{single admissible slot}} L_{s,k,\text{ad}}^X(P) - \sum_{P:\text{single removable block}} L_{s,k,\text{re}}^X(P) + \sum_{P:\text{double admissible slot}} 2L_{s,k,\text{ad}}^X(P) - \sum_{P:\text{double removable block}} 2L_{s,k,\text{re}}^X(P)$$

と定義する. $YW_{X,k}$ を X 型の基底状態 Λ_k の proper なヤング壁全体の集合とする.

定理 4.5. [6] \mathfrak{g} を $X = A_{2n-2}^{(2)}$ 型, または $X = C_{n-1}^{(1)}$ 型とする ($n \geq 3$). ι は adapted であるとする. $J := \{1\}$ ($X = A_{2n-2}^{(2)}$ のとき), $J := \{1, n\}$ ($X = C_{n-1}^{(1)}$ のとき) とおく. このとき

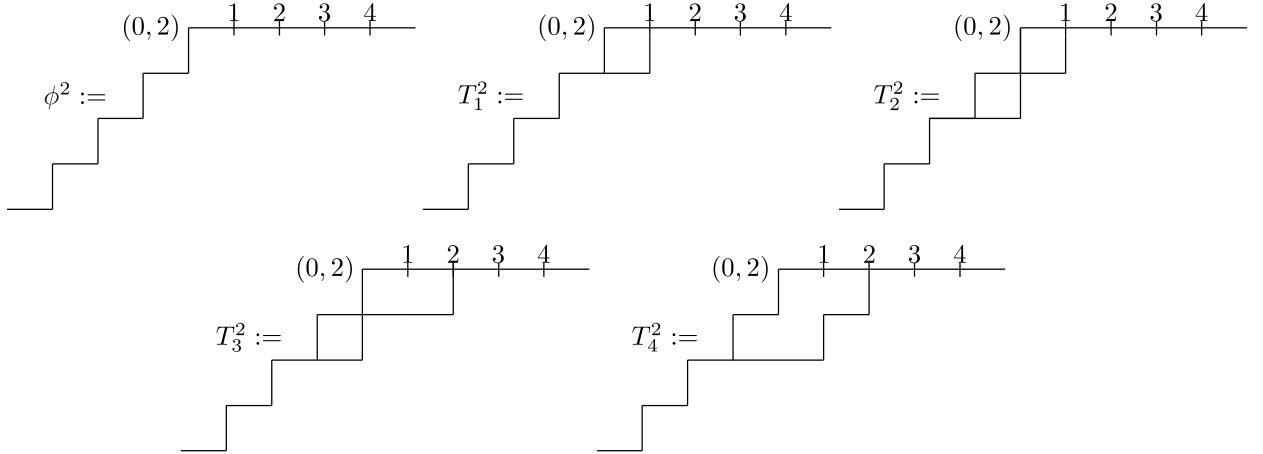
$$\text{Im}(\Psi_\iota) = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \left| \begin{array}{l} \text{任意の } s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \in I \setminus J \text{ と} \\ T \in \text{REYD}_{L_{X,k}} \text{ に対し, } L_{s,k,\iota}^X(T)(\mathbf{a}) \geq 0 \\ \text{かつ, 任意の } k \in J \text{ と } Y \in YW_{L_{X,k}} \\ \text{に対し, } L_{s,k,\iota}^X(Y)(\mathbf{a}) \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

が成り立つ. ここに, $L_{A_{2n-2}^{(2)}} = A^{(2)}$, $L_{C_{n-1}^{(1)}} = D^{(2)}$ である.

例 4.6. \mathfrak{g} が $A_4^{(2)}$ 型で, $\iota = (\dots, 3, 1, 2, 3, 1, 2)$ の場合を考え, $\text{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式の一部を計算しよう. ι は adapted であることに注意する. 定義により

$$\begin{aligned} P^1(1) &= 0, P^1(2) = 1, P^1(3) = 1, P^1(4) = 2, \dots, \\ \dots, P^2(0) &= 0, P^2(1) = 0, P^2(2) = 0, P^2(3) = 0, P^2(4) = 1, \dots, \\ \dots, P^3(1) &= 1, P^3(2) = 1, P^3(3) = 0, P^3(4) = 1, P^3(5) = 1, \dots \end{aligned}$$

となる. $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を取る. 次の五つは, $\text{REYD}_{A^{(2)}, 2}$ に属する元である:



点 $(0, 2)$ は, ϕ^2 の single 2-admissible point で, 他の点は admissible でも removable でもない. よって, $L_{s, 2, \iota}^{A^{(2)}}(\phi^2) = x_{s, 2}$ となる. また, T_1^2 において, 点 $(-1, 1)$ は double 1-admissible point, 点 $(1, 2)$ は single 3-admissible point, 点 $(1, 1)$ は single 2-removable point である. よって,

$$L_{s, 2, \iota}^{A^{(2)}}(T_1^2) = 2x_{s+P^2(1), 1} + x_{s+P^2(3), 3} - x_{s+1, 2} = 2x_{s, 1} + x_{s, 3} - x_{s+1, 2}$$

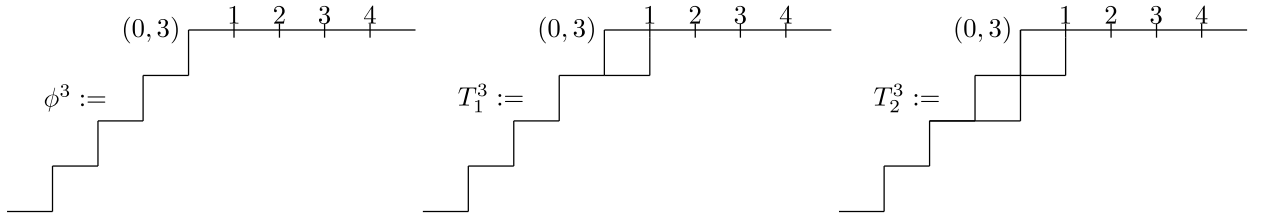
を得る. 同様に考えることで,

$$L_{s, 2, \iota}^{A^{(2)}}(T_2^2) = x_{s+P^2(0), 1} + x_{s+P^2(3), 3} - x_{s+P^2(1)+1, 1} = x_{s, 1} + x_{s, 3} - x_{s+1, 1},$$

$$L_{s, 2, \iota}^{A^{(2)}}(T_3^2) = x_{s+P^2(0), 1} + 2x_{s+1, 2} - x_{s+P^2(3)+1, 3} - x_{s+P^2(1)+1, 1} = x_{s, 1} + 2x_{s+1, 2} - x_{s+1, 3} - x_{s+1, 1},$$

$$L_{s, 2, \iota}^{A^{(2)}}(T_4^2) = x_{s+P^2(1)+1, 1} + x_{s+1, 2} + x_{s+P^2(0), 1} - x_{s+2, 2} = x_{s+1, 1} + x_{s+1, 2} + x_{s, 1} - x_{s+2, 2}$$

となる. 次に, $\text{REYD}_{A^{(2)}, 3}$ に属するいくつかの元を考える:

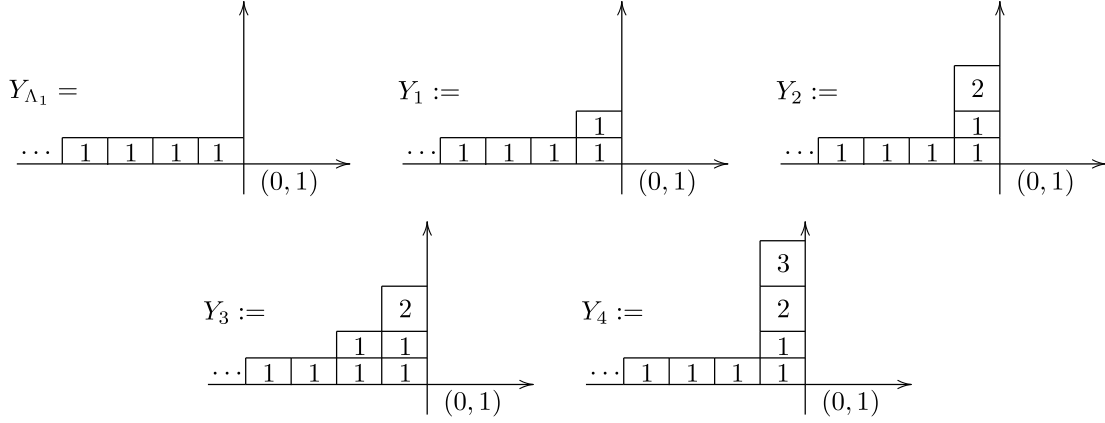


定義に従って計算することで,

$$L_{s, 3, \iota}^{A^{(2)}}(\phi^3) = x_{s, 3}, \quad L_{s, 3, \iota}^{A^{(2)}}(T_1^3) = 2x_{s+P^3(2), 2} - x_{s+1, 3} = 2x_{s+1, 2} - x_{s+1, 3},$$

$$L_{s,3,\ell}^{A^{(2)}}(T_2^3) = 2x_{s+P^3(1),1} + x_{s+P^3(2),2} - x_{s+P^3(2)+1,2} = 2x_{s+1,1} + x_{s+1,2} - x_{s+2,2}$$

となる. 続いて, $YW_{A^{(2)},1}$ に属する以下の五つのヤング壁を考える:



Y_{Λ_1} はただ一つの single 1-admissible slot を持つため, $L_{s,1,\ell}^{A^{(2)}}(Y_{\Lambda_1}) = x_{s,1}$ となる. Y_1 は single 2-admissible slot と single removable 1-block を一つずつ持つため, $L_{s,1,\ell}^{A^{(2)}}(Y_1) = x_{s+P^1(2),2} - x_{s+1,1} = x_{s+1,2} - x_{s+1,1}$ となる. 同様に,

$$L_{s,1,\ell}^{A^{(2)}}(Y_2) = x_{s+P^1(3),3} + x_{s+1,1} - x_{s+P^1(2)+1,2} = x_{s+1,3} + x_{s+1,1} - x_{s+2,2},$$

$$L_{s,1,\ell}^{A^{(2)}}(Y_3) = x_{s+P^1(3),3} - x_{s+2,1} = x_{s+1,3} - x_{s+2,1},$$

$$L_{s,1,\ell}^{A^{(2)}}(Y_4) = x_{s+P^1(4),2} + x_{s+1,1} - x_{s+P^1(3)+1,3} = x_{s+2,2} + x_{s+1,1} - x_{s+2,3}.$$

以上により, $\text{Im}(\Psi_\ell)$ を定義する不等式の一部が計算された:

$$\text{Im}(\Psi_\ell) = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \left| \begin{array}{l} s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, a_{s,2} \geq 0, 2a_{s,1} + a_{s,3} - a_{s+1,2} \geq 0, a_{s,1} + a_{s,3} - a_{s+1,1} \geq 0, \\ a_{s,1} + 2a_{s+1,2} - a_{s+1,3} - a_{s+1,1} \geq 0, \\ a_{s,1} + a_{s+1,2} + a_{s+1,1} - a_{s+2,2} \geq 0, \dots \\ a_{s,3} \geq 0, 2a_{s+1,2} - a_{s+1,3} \geq 0, 2a_{s+1,1} + a_{s+1,2} - a_{s+2,2} \geq 0, \dots \\ a_{s,1} \geq 0, a_{s+1,2} - a_{s+1,1} \geq 0, a_{s+1,3} + a_{s+1,1} - a_{s+2,2} \geq 0, \\ a_{s+1,3} - a_{s+2,1} \geq 0, a_{s+2,2} + a_{s+1,1} - a_{s+2,3} \geq 0, \dots \end{array} \right. \right\}.$$

References

- [1] T.Hayashi, Q -analogues of Clifford and Weyl algebras—spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras, Comm. Math. Phys. 127, no. 1, 129–144 (1990).
- [2] A.Hoshino, Polyhedral realizations of crystal bases for quantum algebras of finite types, J. Math. Phys. 46, no. 11, 113514, 31 pp, (2005).
- [3] A.Hoshino, Polyhedral realizations of crystal bases for quantum algebras of classical affine types, J. Math. Phys. 54, no. 5, 053511, 28 pp, (2013).
- [4] M.Jimbo, K. C. Misra, T.Miwa, M.Okado, Combinatorics of representations of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ at $q = 0$, Comm. Math. Phys. 136, no. 3, 543–566 (1991).
- [5] Y.Kanakubo, T.Nakashima, Adapted sequence for polyhedral realization of crystal bases, Communications in Algebra, Volume 48, Issue 11, pp4732–4766. (2020)

- [6] Y.Kanakubo, Polyhedral realizations for $B(\infty)$ and extended Young diagrams, Young walls of type $A_{n-1}^{(1)}$, $C_{n-1}^{(1)}$, $A_{2n-2}^{(2)}$, $D_n^{(2)}$, arXiv:2110.14140, pp1–48.
- [7] S.-J. Kang, Crystal bases for quantum affine algebras and combinatorics of Young walls, Proc. London Math. Soc. (3) 86, no. 1, 29-69 (2003).
- [8] S.-J. Kang, K. C. Misra, T.Miwa, Fock space representations of the quantized universal enveloping algebras $U_q(C_l^{(1)})$, $U_q(A_{2l}^{(2)})$, and $U_q(D_{l+1}^{(2)})$, J. Algebra 155, no. 1, 238-251 (1993).
- [9] M.Kashiwara, Crystalling the q -analogue of universal enveloping algebras, Comm. Math. Phys., 133, 249–260 (1990).
- [10] M.Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J., 63 (2), 465–516 (1991).
- [11] M.Kashiwara, The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula, Duke Math. J., 71, no 3, 839–858 (1993).
- [12] M.Kashiwara, T.Nakashima, Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras, J. Algebra 165, no. 2, 295–345 (1994).
- [13] Kim, J.-A., Shin, D.-U., Monomial realization of crystal bases $B(\infty)$ for the quantum finite algebras, Algebr. Represent. Theory 11, no. 1, 93–105 (2008).
- [14] P.Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups 3, no. 2, 145–179 (1998).
- [15] G.Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. 3, no. 2, 447–498 (1990).
- [16] K. C. Misra, T.Miwa, Crystal base for the basic representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$, Comm. Math. Phys. 134, no. 1, 79–88 (1990).
- [17] T.Nakashima, A.Zelevinsky, Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras, Adv. Math. **131**, no. 1, 253–278, (1997).