# 非ゼロ和警備ゲームの現実適用性の拡張

筑波学院大学・経営情報学部　宝崎　隆祐
Ryusuke Hohzaki
Faculty of Business Design and Informatics,
Tsukuba Gakuin University

## 1　はじめに

これまで我々は，施設内で警備側と侵入者側が対立する警備問題において具体的な警備員の配備計画を立案できる様々な警備ゲームのモデルを提案してきた．まず [1] において，閉路のない有向グラフで表現した警備空間上でゼロ和の非協力ゲームを提案し，施設への被害を共通の評価尺度（支払）として侵入者の侵入阻止を目的とした基本モデルを考えた．次に [2] では，基本モデルに次の現実的要素を加味し，警備側と侵入者側が敵対しつつも両者の評価尺度（支払）が異なる非ゼロ和ゲームを提案した．

(i) アークだけでなく，ノードでも被害があり，かつ警備が可能である．

(ii) プレイヤーのアーク等での移動時間を考慮し，時間経過による警備の可能性・不可能性を組み込むことができる．

(iii) 警備の待機場所を設定し，侵入者の侵入情報と待機要員の現場への派遣時間を考慮して，時間軸上での警備員配備が計画できる．

(iv) 支払を非ゼロ和とし，警備側と侵入者側の評価尺度を個別に設定することで，モデルの分析力が高い．

この報告では，さらに次の点で従来モデルの現実適用性を拡張したモデルを提案する．

(1) 警備側は，防犯カメラ等による侵入者情報を得て，待機させた警備員を現場に派出できる．

(2) 警備側による拿捕に対する侵入者の性格を考慮できる．また，警備の省力化も組み込んでいる．

(3) 侵入者が同じ場所に戻らず，また一方向にしか通過しないとの従来の想定を緩和し，侵入経路の閉路も考慮した無向グラフで警備空間を取り扱っている．この拡張は，閉路のない有向グラフも従来通り扱うことが可能である．

## 2　警備ゲームの基本モデル

ここでは１章での特徴 (2)，(3) による拡張の詳細は後述することとして，特徴 (1) を取り入れた警備ゲームをモデル化する．

ネットワークで表現された施設内へ侵入しようとする侵入者には，空港における密輸者やテロリスト等様々なタイプが存在する．ここでは，複数タイプの侵入者は警備情報の一部を予め収集でき，警備体制の弱点を突こうとする次のようなシュタッケルベルグ型の警備ゲームを考える．

(A1) ノード集合 $\boldsymbol{N}$ と有向アークの集合 $\boldsymbol{A}$ から成る閉路の無いネットワーク $G(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{A})$ を警備空間とする．このゲームのプレイヤーは侵入者及び警備側である．

(A2) 侵入者には幾つかのタイプがあり，そのタイプ集合を $\boldsymbol{H}$ とする．タイプ $h \in \boldsymbol{H}$ の侵入者は，初期人数 $R_0^h$ で侵入し，その目的ノードへ至る経路をたどる．その移動途中のノード $i$ に到着した侵入者は，施設に対し１人あたり $d_i^h$ の物的あるいは人的被害を与える．また同時に１人あたり $p_i^h$ の利益を得る．

タイプ $h$ の侵入者は，目的地到達までの利益の和（総利益）を最大にすべく，侵入ノードから目的ノードに至る侵入路全体 $\Omega_h$ から１本のパスを選択し移動する．

(A3) ネットワーク上にある警備員の待機場所ノードを集合 $\boldsymbol{W}$ で表す．警備側は，空港における通常警備体制やテロ対策体制等の複数の警備体制の集合 $\boldsymbol{S}$ の中から１つの体制を選択する．警備体制 $s$ は $B_0^s$ 人の警備員をもち，警備計画ではこれをノード，アーク及び待機場所に配備して，侵入者を阻止する．ただし，人目に立つノード，アークへの配備人数は $M^s$ 人を上限とし，余りは待機場所で待機する．また，警備側が警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ をとる頻度（確率）$g(s)$ も警備計画の一部であるが，警備コスト面での負担に対応させるため，$g(s)$ には上限 $U(s)$ がある．

警備側は最初にノード，アークに配備した人員を再配備できないが，待機場所に待機させた人員は，侵入者の侵入情報を得て，ノードやアークに随時派遣できる．

警備側は，これまでの発生事案データから，侵入者がタイプ $h$ である確率 $f(h)$ の発生確率分布 $\{f(h), h \in \boldsymbol{H}\}$ を知っている．

(A4) タイプ $h$ の侵入者がパス $l$ をとった場合のノード $i$ からノード $j$ までの移動時間を $t_{hl}^A(i,j)$ で，アーク $e$ までの移動時間を $t_{hl}^A(i,e)$ で表す．一方のタイプ $s$ の警備人の待機場所ノード $r \in \boldsymbol{W}$ からノード $j$ までの移動時間を $t_s^D(r,j)$ で，アーク $e$ までの移動時間を $t_s^D(r,e)$ で表す．

(A5) ノード $i$ 上での $x$ 人の侵入者と $y$ 人の警備員との対峙の結果生じる両者の人的損耗は線形モデルに従い，どちらかが全滅するまで戦われるものとする．この線形モデルによる侵入者の残存人数 $f_i^{hs}(x,y)$ は侵入者のタイプ $h$ 及び警備体制 $s$ に依存し，次式で与えられる．

$$f_i^{hs}(x,y) = \max\{0,\ x - \gamma_i^{hs} y\} \tag{1}$$

同じ状況におけるアーク $e \in \boldsymbol{A}$ 上での衝突による侵入者の残存人数 $f_e^{hs}(x,y)$ も，同様な次式で与えられる．

$$f_e^{hs}(x,y) = \max\{0,\ x - \gamma_e^{hs} y\} \tag{2}$$

係数 $\gamma_i^{hs}, \gamma_e^{hs}$ は，ノード $i$，アーク $e$ における侵入者に対する警備側の相対的な強さを表し，これを戦力交換比と呼ぶ．

(A6) 侵入者側は，事前の調査から，警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ におけるノード，アークへの警備員配置とそれをとる確率 $g(s)$ が分かるものとするが，現に侵入を実行する時点における警備体制については確信を持てないとする．

一方の警備側は，防犯カメラを含む侵入者感知機器をノード群 $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{N}$ に設置しており，ここを侵入者が通過した際に侵入者のタイプ $h$ とその経路の情報を入手でき，これを用いて待機場所に配備した警備員を急派できる．

(A7) 警備側は侵入者による被害を最小化する警備計画を立て，侵入者は各タイプごとに自らの総利益を最大化するように侵入経路を決定する．

前提 (A2) における侵入者による時系列的な被害や利益の設定により，様々なタイプの侵入者に応じた被害や利益獲得のシナリオを考慮できる．また，前提 (A3) により複数タイプの警備体制を想定できる．前提 (A6) は警備側の侵入者情報獲得で始動する警備員派遣のシナリオである．

## 3　プレイヤーの戦略と利得関数

ここでは，各プレイヤーの戦略を定義し，それぞれの利得関数を導く．ただし，パス $\boldsymbol{l}$ 上のノード集合とアーク集合をそれぞれ $\boldsymbol{V}_l$，$\boldsymbol{E}_l$ で，パス $l$ 上での出発ノードからノード $i$ に到るまでに通過する $i$ 自身を含むノード集合を $\boldsymbol{V}_l^i$，パス $l$ 上での出発ノードからノード $i$ に到るまでに通過するアーク集合を $\boldsymbol{E}_l^i$ で表す．

タイプ $h \in \boldsymbol{H}$ の侵入者の純粋戦略は全パス $\Omega_h$ から 1 つのパスを選択することであり，その混合戦略をパス $l$ の選択確率 $\pi_h(l)$ で表す．その実行可能性条件は次式で与えられる．

$$\sum_{l \in \Omega_h} \pi_h(\boldsymbol{l}) = 1, \quad \pi_h(\boldsymbol{l}) \geq 0,\ \boldsymbol{l} \in \Omega_h. \tag{3}$$

タイプ $h$ 侵入者のこの混合戦略を $\pi_h = \{\pi_h(\boldsymbol{l}),\ \boldsymbol{l} \in \Omega_h\}$ で，全タイプの混合戦略を $\pi = \{\pi_h,\ h \in \boldsymbol{H}\}$ で表す．

警備側の戦略を以下で表す．警備体制 $s \in \boldsymbol{S}$ をとる確率を $g(s)$，その総員数 $B_0^s$ の配備計画を $\boldsymbol{y}^s = \{\{y_i^s, i \in \boldsymbol{N}\}, \{y_e^s, e \in \boldsymbol{A}\}, \{y_r^s, r \in \boldsymbol{W}\}\}$（$y_i^s$，$y_e^s$，$y_r^s$ は，それぞれノード $i$，アーク $e$ 及び待機ノード $r$ への配備人員数）で表す．さらに，防犯カメラ等からの侵入者のタイプ $h$ とそのパス $l$ の情報を得て，各待機場所 $r$ から各ノード $i$，各アーク $e$ への派遣人員数を $\boldsymbol{z}_l^{hs} = \{\{z_l^{hs}(r,i), r \in \boldsymbol{W}, i \in \boldsymbol{N}\}, \{z_l^{hs}(r,e), r \in \boldsymbol{W}, e \in \boldsymbol{A}\}\}$ により表す．警備員の現場への派遣は，その派遣時間が次式で定義される余裕時間より小さい場合のみ可能である．

- $t_{hl}^A(j)$: パス $l$ 移動中のタイプ $h$ 侵入者が警備側に初めて認識されてから，パス上のノード $i$ に到着するまでの移動時間; $=\max_{i\in C\cap V_l} t_{hl}^A(i,j)$. $\boldsymbol{C}\cap V_l=\emptyset$ ならば $\infty$ とする.
- $t_{hl}^A(e)$: パス $l$ 移動中のタイプ $h$ 侵入者が警備側に初めて認識されて以降，パス上のアーク $e$ に到着するまでの移動時間; $=\max_{i\in C\cap V_l} t_{hl}^A(i,e)$. $\boldsymbol{C}\cap V_l=\emptyset$ ならば $\infty$ とする.

警備計画に関するその他の集合として，$g=\{g(s),s\in\boldsymbol{S}\}$, $\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{y}^s,s\in\boldsymbol{S}\}$, $\boldsymbol{z}^s=\{\boldsymbol{z}_l^{hs},l\in\Omega_h,h\in\boldsymbol{H}\}$, $\boldsymbol{z}=\{\boldsymbol{z}^s,s\in\boldsymbol{S}\}$ を用いる．モデルの前提から，警備側戦略に関する実行可能性条件は次のように表される.

$$\sum_{s\in S} g(s)=1, \qquad 0\le g(s)\le U(s),\ s\in\boldsymbol{S}, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in N} y_i^s+\sum_{e\in A} y_e^s+\sum_{r\in W} y_r^s\le B_0^s, \tag{5}$$

$$\sum_{i\in N} y_i^s+\sum_{e\in A} y_e^s\le M^s,\ s\in\boldsymbol{S}, \tag{6}$$

$$\sum_{i\in N} z_l^{hs}(r,i)+\sum_{e\in A} z_l^{hs}(r,e)=y_r^s,\ r\in\boldsymbol{W},s\in\boldsymbol{S},l\in\Omega_h,h\in\boldsymbol{H}, \tag{7}$$

$$y_i^s,\ y_e^s,\ y_r^s,\ z_l^{hs}(r,i),\ z_l^{hs}(r,e)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{N},e\in\boldsymbol{A},r\in\boldsymbol{W},s\in\boldsymbol{S},l\in\Omega_h,h\in\boldsymbol{H}. \tag{8}$$

以下では各プレイヤーの支払関数を導出する．タイプ $h$ の侵入者がパス $\boldsymbol{l}$ をとり，警備体制 $s$ が配備計画 $\boldsymbol{y}^s$, $\boldsymbol{z}^{hs}$ をとることにより，パス $\boldsymbol{l}$ 上のノード $i\in\boldsymbol{V}_l$ での侵入者残存数は次式で書ける.

$$\begin{aligned} N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) \equiv\ & R_0^h-\sum_{j\in V_l^i}\gamma_j^{hs}\left(y_j^s+\sum_{r\in W|t_{hl}^A(j)\ge t_s^D(r,j)} z_l^{hs}(r,j)\right)\\ & -\sum_{e\in E_l^i}\gamma_e^{hs}\left(y_e^s+\sum_{r\in W|t_{hl}^A(e)\ge t_s^D(r,e)} z_l^{hs}(r,e)\right) \end{aligned} \tag{9}$$

この残存侵入者によるノード $i$ での被害量と利益が次式で表される.

$$D_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) = d_i^h N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) \tag{10}$$

$$R_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) = p_i^h N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) \tag{11}$$

これをすべてのノード $i\in\boldsymbol{V}_l$ で総和をとった次の $D_{hs}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s))$ 及び $R_{hs}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s))$ が，侵入パス $\boldsymbol{l}$ をとるタイプ $h$ 侵入者と警備体制 $s$ の警備配備計画 $(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)$ による施設被害量及び侵入者利得である.

$$\begin{aligned} D_{hs}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) &= \sum_{i\in V_l} d_i^h N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s))\\ R_{hs}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) &= \sum_{i\in V_l} p_i^h N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) \end{aligned}$$

侵入者側は確実な警備配置は知らないから，上式を警備体制のランダム化戦略 $g(s)$ により期待値をとる.

$$D_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))=\sum_{s\in S} g(s)D_{hs}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s))=\sum_{s\in S} g(s)\sum_{i\in V_l} d_i^h N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) \tag{12}$$

$$R_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))=\sum_{s\in S} g(s)R_{hs}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s))=\sum_{s\in S} g(s)\sum_{i\in V_l} p_i^h N_{hsi}(\boldsymbol{l},(\boldsymbol{y}^s,\boldsymbol{z}^s)) \tag{13}$$

さらに，タイプ $h$ 侵入者の混合戦略 $\pi_h$ による期待被害量，期待利得は次式となる．

$$\begin{aligned} D_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &= \sum_{l\in\Omega_h}\pi_h(l)D_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \\ R_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &= \sum_{l\in\Omega_h}\pi_h(l)R_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \end{aligned}$$

タイプ $h$ 侵入者は，警備計画 $(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を知った後，$R_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$ を最大にする次の問題による最適混合戦略 $\pi_h^*$ を求める．

$$(P_I)\quad \max_{\pi_h} R_h(\pi_h,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = \max_{l\in\Omega_h} R_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \tag{14}$$

この最適混合戦略 $\pi_h^*$，あるいは右辺の最大化を実現する最適パス $\boldsymbol{l}^*$ を推測することで，警備側は，侵入者の出現確率 $f(h)$ を加味した期待被害量を最小化する次の問題を解くことで，最適な警備計画を立案できる．

$$(P_S)\quad \min_{(g,y,z)}\sum_{h\in H}f(h)\sum_{l\in\Omega_h}\pi_h^*(l)D_h(\boldsymbol{l},(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) = \min_{(g,y,z)}\sum_{h\in H}f(h)D_h(\boldsymbol{l}^*,(g,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) \tag{15}$$

以上が両プレイヤーがその最適戦略を求める思考手順であるが，実際の意思決定順序は，警備側が先手で警備計画 $(g,y,z)$ を立て，次に各々のタイプ $h$ の侵入者が $(g,y,z)$ を知って問題 $(P_I)$ の最適パスをとろうとする．

# 4　侵入者及び警備側の性格の特徴付け

3 章の (9) 式により与えられる侵入者の残存量は正にも負にもなり得るが，この正負に応じて被害率及び利益率のパラメータを変化させることで，侵入者や警備側の性格を特徴付けることができる．

実際のテロ犯の中には，自らの残存数に関する理論上の値が負となる（完全に侵入が阻止される）にしても小さな突破の可能性に賭け，文字通り死に物狂いで侵入計画を実行しようとするものがいる．逆に，理論的残存量が負になるような警備側に捕まることを避けつつ，目的を達成したいと企図するものもいる．前者の性格を「負値無関心」と呼び，後者を「負値嫌い」と呼ぼう．密輸者や窃盗犯のタイプの侵入者は「負値嫌い」であると推定できる．

「負値無関心」と「負値嫌い」の性格は利益率 $p_i^h$ を使って定式化の中に組み込むことができる．すなわち，「負値無関心な」のタイプ $h$ には，残存量が負であるノード $i$ での利益率を正の場合より小さく設定することで，残存量が負であっても利益の減少が大きくないものと感じさせることができる．他方の「負値嫌い」のタイプ $h$ では，逆の大小関係の利益率を与えることで，利益の大きな減少をまねく負の残存量を避ける性格を与えることが可能である．

(i) 負値無関心なタイプ（$IT_h = 1$ で示す）

残存量が負の場合の利益率 $\underline{p_i^h}$ を，正の場合より小さく設定する： $\underline{p_i^h} < p_i^h$.

(ii) 負値嫌いなタイプ（$IT_h = 2$ で示す）

残存量が負の場合の利益率 $\underline{p_i^h}$ を，正の場合より大きく設定する： $\underline{p_i^h} > p_i^h$.

一方の警備側にも性格が存在する．それは，事案が生じない時には無駄となる警備のコストはできるだけ省力化するという経営上の要請である．侵入者の性格と同じように，この要請は，侵入者の残存数が負である地域ではその被害率 $d_i^h$ を正の場合よりも小さく設定することで対応できる．

(i) 警備の省力化

残存量が負の場合の被害率 $\underline{d_i^h}$ を，正の場合より小さく設定する： $\underline{d_i^h} < d_i^h$.

## 5 ナッシュ均衡解の導出

最適化問題 (14) と (15) を解く手順は，次の 2 次計画問題により定式化できる．

$$
\begin{aligned}
(P_D^3) \qquad & \min_{g,x,v,\pi,\eta,a,\zeta,\xi} \sum_{h\in\boldsymbol{H}} f(h) \sum_{l\in\Omega_h} \pi_h(l) \sum_{i\in V_l} \eta_{li}^h && (16)\\
s.t. \qquad & d_i^h N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) \le \eta_{li}^h,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (17)\\
& \underline{d_i^h} N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) \le \eta_{li}^h,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (18)\\
& \sum_{l\in\Omega_h} \pi_h(l) = 1,\ h\in\boldsymbol{H}, \quad \pi_h(l)\in\{0,1\},\ l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, &&\\
& 0 \le a_h - \sum_{i\in V_l} \zeta_{li}^h \le (1-\pi_h(l))M,\ l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (19)\\
& IT_h = 1 \text{ なら},\ 0 \le \zeta_{li}^h - p_i^h N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) \le (1-\xi_{li}^h(1))M,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (20)\\
& \qquad\qquad\qquad 0 \le \zeta_{li}^h - \underline{p_i^h} N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) \le (1-\xi_{li}^h(2))M,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (21)\\
& IT_h = 2 \text{ なら},\ 0 \le p_i^h N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) - \zeta_{li}^h \le (1-\xi_{li}^h(1))M,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (22)\\
& \qquad\qquad\qquad 0 \le \underline{p_i^h} N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) - \zeta_{li}^h \le (1-\xi_{li}^h(2))M,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (23)\\
& \xi_{li}^h(1) + \xi_{li}^h(2) = 1,\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (24)\\
& \xi_{li}^h(1) \le \xi_{lj}^h(1),\ j\in V_l^i, i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (25)\\
& \xi_{li}^h(2) \le \xi_{lj}^h(2),\ j\notin V_l^i, j\in V_l, i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (26)\\
& \xi_{li}^h(1),\ \xi_{li}^h(2) \in\{0,1\},\ i\in V_l, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (27)\\
& \sum_{s\in S} g(s) = 1, && (28)\\
& 0 \le g(s) \le U(s),\ s\in\boldsymbol{S}, && (29)\\
& \sum_{i\in N} x_i^s + \sum_{e\in A} x_e^s + \sum_{r\in W} x_r^s \le g(s)B_0^s,\ s\in\boldsymbol{S}, && (30)\\
& \sum_{i\in N} x_i^s + \sum_{e\in A} x_e^s \le g(s)M^s,\ s\in\boldsymbol{S}, && (31)\\
& \sum_{i\in N} v_l^{hs}(r,i) + \sum_{e\in A} v_l^{hs}(r,e) = x_r^s,\ r\in\boldsymbol{W}, s\in\boldsymbol{S}, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}, && (32)\\
& x_i^s,\ x_e^s,\ x_r^s,\ v_l^{hs}(r,i),\ v_l^{hs}(r,e) \ge 0,\ i\in\boldsymbol{N}, e\in\boldsymbol{A}, r\in\boldsymbol{W}, s\in\boldsymbol{S}, l\in\Omega_h, h\in\boldsymbol{H}. && (33)
\end{aligned}
$$

ただし，$N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$ は次式で与えられる．また，$M$ はビック M と呼ばれる十分大きな値である．

$$
N_{hi}(l,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) = R_0^h - \sum_{s\in S} \sum_{j\in V_l^i} \gamma_j^{hs} \left( x_j^s + \sum_{r\in W | t_{hl}^A(j) \ge t_s^D(r,j)} v_l^{hs}(r,j) \right)
$$

$$-\sum_{s\in S}\sum_{e\in E_l^i}\gamma_e^{hs}\left(x_e^s+\sum_{r\in W|t_{hl}^A(e)\geq t_s^D(r,e)}v_l^{hs}(r,e)\right)$$

定式化に至る式変形の過程では変数 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ は常に $g(s)$ と掛けられて使用されるため，$\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ の代わりに次の変数 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ を用いて簡素化している．

$$x_i^s\equiv g(s)y_i^s,\ x_e^s\equiv g(s)y_e^s,\ x_r^s\equiv g(s)y_r^s,\ v_l^{hs}(r,i)\equiv g(s)z_l^{hs}(r,i),\ v_l^{hs}(r,e)\equiv g(s)z_l^{hs}(r,e) \quad (34)$$

定式化の詳細な説明は省略するが，例えば制約条件 (28)～(33) が実行可能性条件 (4)～(8) に対応する．

# 6　現実的要素への対処法

ここでは 1 章での特徴 (2) 及び (3) の改善を行うため，5 章での定式化における修正点について考察する．

## 6.1　侵入経路は閉路をもたないとした場合の無向アークへの対応策

このケースでは，有向アークだけから成るネットワークと異なり，次の考慮が必要である．一方向のアークへの警備員配備量は逆方向アークへの配備量でもあり，侵入者の両方向の通過に対し同じ阻止効果をもつ．このことを実現するため，5 章の定式化 $(P_D^3)$ において，各アーク $(i,j)$ への配備量 $y_{(i,j)}^s$ と逆向きアークへの配備量 $y_{(j,i)}^s$ を同じ $y_{(i,j)}^s=y_{(j,i)}^s$ とする．ただし，警備人数 $B_0^s$ にカウントするのは一方向の配備量のみとする．

## 6.2　無向グラフ上で侵入経路が閉路をもつ場合への対応策

侵入者が経路を逆にたどろうとする等，無向グラフ上で侵入経路が閉路をもつ場合，次の事態に対する対処が必要となる．

(1) 一方向のアークへの配備量は逆方向アークへの配備量でもあり，侵入者の両方向の通過に対し同じ阻止効果をもつ．

(2) 事前にノード $i$ やアーク $e$ の警備員配備 $y_i^s$, $y_e^s$ は，侵入者がそこを最初に通過した時点での阻止資源として役立つが，２回目以降での通過では役立たない．

(3) 侵入者の同じノード，アークの通過であっても通過回数によって通行時間が異なるから，待機場所からそこへの派遣計画 $\{z_l^{hs}(r,i)\}$, $\{z_l^{hs}(r,e)\}$ では，同じ場所への派遣を何度でも計画できる．ただし，一度派遣した要員は次の派遣では使用できない．

上記 (1) 項は 6.1 節と同じであり，有向グラフ上での定式化である 5 章の問題 $(P_D^3)$ に同様の修正を施せばよい．

(2) 項及び (3) 項に対処するためには，侵入者のパス $l$ をその構成ノードや構成アークにより表現していたこれまでの方式を，通過順序番号とそれに紐づけしたノード，アークにより表現すればよい．これにより，第１回目通過の認識が重要である (2) 項の修正が可能となり，また (3) 項における通過回数ごとの時間経過が認識できる．

## 7　おわりに

ここでは，警備ゲームに関する我々の研究の新たな伸展について報告した．他の研究に比較して，侵入者の性格や警備の省力化といった特徴を加味し，また警備空間を閉路有りの無向グラフでも表現できるなど，現実的な要素を取り入れやすくすることができた．また，警備計画も複数種の警備体制や警備員の配備計画に加え，侵入事案発生時の警備員派遣計画も立案できるなど，繊細な警備計画をアウトプットとして得ることができ，このモデルを利用して使い勝手のよい警備システムが構築できる．

**謝辞**

本報告が数理解析研究所の国際共同利用・共同研究拠点事業の支援を受けておりますことに，深く謝意を表します.

## 参考文献

[1] R. Hohzaki and G. Sakai, Security games taking account of invasion routes and attrition, Journal of the Operations Research Society of Japan, **60**(2), pp.156–177, 2017.

[2] 宝崎隆祐, 非ゼロ和の施設警備ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 2126, pp. 35–43, 2019.