On the efficiency of median unbiased estimators based on a sample of fixed size

筑波大学　赤平　昌文
Masafumi Akahira
University of Tsukuba

筑波大学・数理物質系　大谷内　奈穂
Nao Ohyauchi
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1. はじめに

固定(した大きさの)標本に基づく推測方式について考察する理論を小標本論というが, そこでは不偏性の概念を導入して最適な推定量について多くの研究がなされている ([VN93], [LC98], [A19]). 特に, (平均) 不偏推定量全体のクラスに限定して, その中で分散を一様に最小にする一様最小分散不偏 (uniformly minimum variance unbiased, 略して UMVU) 推定量がよく知られている. 一方, 標本の大きさを無限に大きくする大標本論では, 推定の(高次) 漸近理論において (高次) 漸近中央値不偏 (asymptotically median unbiased, 略して AMU) 推定量全体のクラスに限定して, そのクラスの中で真の母数の周りに集中する確率を最大にする (高次)AMU 推定量を (高次) 漸近有効推定量という. 適当な正則条件の下で補正最尤推定量や補正ベイズ推定量が高次のオーダーまで漸近的有効になることが示されている ([AT81], [PW85], [G94]).

また, 小標本論の場合に, 推定量を比較する尺度としては分散よりも集中確率の方が精密とも把えられ, 中央値不偏 (median unbiased, 略して MU) 推定量全体のクラス $\mathcal{M}$ において有効推定量を考察できる. 実際, 仮説検定論の最強力検定の手法を用いて, $\mathcal{M}$ において MU 推定量の分布の限界を求め, その限界を一様に達成する, すなわち集中確率の上界を一様に達成する MU 推定量を $\mathcal{M}$ における有効推定量と定義して, 指数型分布族の場合に MU 推定量の有効性が論じられた ([A19]).

本論において, 非正則分布族の典型としてある切断分布族を考え, その分布族の切断母数の MU 推定量の $\mathcal{M}$ における有効性について考察する. 例としてパレート分布, 下側切断指数分布の場合について論じる.

2. 設定と定義

本節において, [A19] の 2.6 節と同様にして, 最強力検定の手法を用いて MU 推定量の分布の限界から集中確率の上界を求め, それを一様に達成する MU 推定量, すなわち $\mathcal{M}$ における有効推定量について考える. 実際, まず, $X_1, \cdots, X_n$ を (Lebesgue 測度に関する) 密度 $p(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1)$ をもつ分布からの無作為標本, Θ を開区間とし, $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく θ の推定量を $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ とする.

定義 2.1 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) \le \theta\right\} = P_\theta\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) \ge \theta\right\} = \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

であるとき, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ を θ の中央値不偏 (MU) 推定量という.

次に, θ の MU 推定量の分布の限界を求めよう. まず, 仮説 $\mathrm{H}^+ : \ \theta = \theta_0 + a$, 対立仮説 $\mathrm{K} : \ \theta = \theta_0$ の (有意) 水準 $1/2$ の検定問題 $\mathcal{T}_{1/2}^{+}$ を考える. ただし, $a > 0$ とする. いま, $\phi^+(\boldsymbol{X})$ を最強力 (most powerful, 略して MP) 検定とし, θ の MU 推定量全体のクラス $\mathcal{M}$ に属する任意の $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ について

$$A_{\hat{\theta}} := \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \hat{\theta}(\boldsymbol{x}) \leq \theta_0 + a \right\}$$

とおくと, (2.1) より $A_{\hat{\theta}}$ の定義関数 $\chi_{A_{\hat{\theta}}}(\boldsymbol{x})$ は水準 $1/2$ の検定になる. ただし, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ とする. ここで, ϕ^+ は MP 検定であるから, 任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$ について

$$E_{\theta_0}\left(\phi^+\right) \geq E_{\theta_0}\left[\chi_{A_{\hat{\theta}}}(\boldsymbol{X})\right] = P_{\theta_0}\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta_0 \leq a\right\} \tag{2.2}$$

となる. また, $a < 0$ として, 仮説 $\mathrm{H}^- : \ \theta = \theta_0 + a$, 対立仮説 $\mathrm{K} : \ \theta = \theta_0$ の水準 $1/2$ の検定問題 $\mathcal{T}_{1/2}^{-}$ において, MP 検定を $\phi^-(\boldsymbol{X})$ とすると, (2.1) より $A_{\hat{\theta}}$ の補集合 $A_{\hat{\theta}}^c$ の定義関数 $\chi_{A_{\hat{\theta}}^c}(\boldsymbol{x})$ も水準 $1/2$ の検定になるから, 任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$ について

$$P_{\theta_0}\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta_0 > a\right\} = E_{\theta_0}\left[\chi_{A_{\hat{\theta}}^c}(\boldsymbol{X})\right] \leq E_{\theta_0}\left(\phi^-\right)$$

となり,

$$P_{\theta_0}\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta_0 \leq a\right\} \geq 1 - E_{\theta_0}\left(\phi^-\right) \tag{2.3}$$

になる. ここで

$$\beta_\theta^+(a) := E_\theta\left(\phi^+\right) \quad (a > 0), \tag{2.4}$$

$$\beta_\theta^-(a) := 1 - E_\theta\left(\phi^-\right) \quad (a < 0) \tag{2.5}$$

とおくと, θ_0 は任意であるから, (2.2), (2.3) より任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$, 任意の $\theta \in \Theta$ について

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta \leq a\right\} \leq \beta_\theta^+(a) \quad (a > 0), \tag{2.6}$$

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta \leq a\right\} \geq \beta_\theta^-(a) \quad (a < 0) \tag{2.7}$$

となる. ただし, $a = 0$ のときは $\beta_\theta^+(0) = \beta_\theta^-(0) = 1/2$ とする. このとき, $\beta_\theta^+(\cdot)$, $\beta_\theta^-(\cdot)$ を $\hat{\theta}$ の分布の限界といい, これらを用いると (2.6), (2.7) より任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$, 任意の $\theta \in \Theta$, 任意の正数 a, b について

$$P_\theta\left\{-a \leq \hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta \leq b\right\} \leq \beta_\theta^+(b) - \beta_\theta^-(-a) \tag{2.8}$$

となり, (2.8) の左辺を MU 推定量 $\hat{\theta}$ の θ の周りでの集中確率といって $C_\theta(\hat{\theta}; a, b)$ と表すと, その集中確率の上界は (2.8) の右辺になる, すなわち

$$C_\theta(\hat{\theta}; a, b) \leq \beta_\theta^+(b) - \beta_\theta^-(a) \tag{2.9}$$

になる. 特に, $a=b$ とすると

$$C_\theta(\hat{\theta};a,a)=P_\theta\{|\hat{\theta}_n-\theta|\le a\}\le\beta_\theta^+(a)-\beta_\theta^-(-a) \tag{2.10}$$

となる.
定義 2.2 ある $\hat{\theta}^*=\hat{\theta}^*(\boldsymbol{X})\in\mathcal{M}$ が存在して, 任意の $\hat{\theta}\in\mathcal{M}$, 任意の $\theta\in\Theta$, 任意の正数 $a,\ b$ について

$$C_\theta(\hat{\theta}^*;a,b)=\beta_\theta^+(b)-\beta_\theta^-(-a) \tag{2.11}$$

であるとき, $\hat{\theta}^*$ を $\mathcal{M}$ において有効推定量であるという. また, (2.11) の代わりに

$$C_\theta(\hat{\theta}^*;a,a)=\beta_\theta^+(a)-\beta_\theta^-(-a) \tag{2.12}$$

とするとき, $\hat{\theta}^*$ を $\mathcal{M}$ において対称有効推定量であるという.
　定義 2.2 において, (2.11), (2.12) は $\hat{\theta}^*$ が θ の周りで最大の集中確率をもつことを意味する. また, (2.9), (2.10) より $\mathcal{M}$ において θ の有効推定量は対称有効推定量になる.

3. 切断分布族の切断母数の中央値不偏推定量の有効性

　$X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に, いずれも (ルベーグ測度に関する) 密度

$$p(x;\theta)=c(\theta)q(x)\chi_{[\theta,\infty)}(x),\quad \theta\in\mathbf{R}^1 \tag{3.1}$$

をもつ分布に従う確率変数とする. ただし, $q(x)\ge 0\ (x\in\mathbf{R}^1)$ で $A(\subset\mathbf{R}^1)$ の定義関数を $\chi_A(x)$ とし

$$\Theta:=\left\{\theta\ \middle|\ 0<c(\theta)=\left(\int_\theta^\infty q(x)dx\right)^{-1}<\infty\right\} \tag{3.2}$$

とする. このとき, $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f. は

$$f(\boldsymbol{x};\theta)=c^n(\theta)\prod_{i=1}^n q(x_i)\chi_{\{\boldsymbol{x}|\ x_{(1)}\ge\theta\}}(\boldsymbol{x}) \tag{3.3}$$

となる. ただし, $x_{(1)}=\min_{1\le i\le n}x_i$ とする.
　検定問題 $\mathcal{T}_{1/2}^+$ において, Neyman-Pearson の基本定理より MP 検定の候補は

$$\phi_1^+(\boldsymbol{X})=\begin{cases}0 & (X_{(1)}\ge\theta_0+a),\\ \gamma & (\theta_0\le X_{(1)}<\theta_0+a)\end{cases} \tag{3.4}$$

または

$$\phi_2^+(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\gamma & (X_{(1)}\ge\theta_0+a),\\ 1 & (\theta_0<X_{(1)}<\theta_0+a)\end{cases} \tag{3.5}$$

になる. ただし, $0 \leq \gamma \leq 1$, $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ とする. ここで, (3.4) より

$$E_{\theta_0+a}\left(\phi_1^+\right) = \gamma P_{\theta_0+a}\left\{\theta_0 \leq X_{(1)} < \theta_0 + a\right\} = 0$$

となり, ϕ_1^+ は水準 $1/2$ にならない. 一方, (3.5) より

$$E_{\theta_0+a}\left(\phi_2^+\right) = \gamma P_{\theta_0+a}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0 + a\right\} + P_{\theta_0}\left\{\theta_0 \leq X_{(1)} < \theta_0 + a\right\} = \gamma$$

となるから $\gamma = 1/2$ とすれば, ϕ_2^+ は水準 $1/2$ の MP 検定になる. このとき, (2.3) より任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$ について

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta_0 \leq a\right\} &\leq E_{\theta_0}\left(\phi_2^+\right) \\ &= \frac{1}{2} P_{\theta_0}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0 + a\right\} + P_{\theta_0}\left\{\theta_0 \leq X_{(1)} < \theta_0 + a\right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2} P_{\theta_0}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0 + a\right\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる. ここで, (3.1) より $X_{(1)}$ の密度は

$$f_{X_{(1)}}(x;\theta) = \left\{n c^n(\theta) q(x) / c^{n-1}(x)\right\} \chi_{[\theta,\infty)}(x)$$

となるから, (2.4), (3.6) より

$$\beta_{\theta_0}^+(a) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta_0)}{c(\theta_0 + a)}\right)^n \tag{3.7}$$

になる.

次に, 検定問題 $\mathcal{T}_{1/2}^-$ において Neyman-Pearson の基本定理より MP 検定の候補は

$$\phi_1^-(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & (X_{(1)} \geq \theta_0), \\ \gamma & (\theta_0 + a \leq X_{(1)} < \theta_0) \end{cases} \tag{3.8}$$

または

$$\phi_2^-(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \gamma & (X_{(1)} \geq \theta_0), \\ 0 & (\theta_0 + a \leq X_{(1)} < \theta_0) \end{cases} \tag{3.9}$$

になる. ただし, $0 \leq \gamma \leq 1$ とする. ここで, (3.3) より

$$\begin{aligned} P_{\theta_0+a}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0\right\} &= \int \cdots \int_{\{x_{(1)} > \theta_0\}} \frac{f(\boldsymbol{x};\theta_0 + a)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)} f(\boldsymbol{x};\theta_0) d\boldsymbol{x} \\ &= \left(\frac{c(\theta_0 + a)}{c(\theta_0)}\right)^n P_{\theta_0}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0\right\} = \left(\frac{c(\theta_0 + a)}{c(\theta_0)}\right)^n \end{aligned} \tag{3.10}$$

となるから, (3.8), (3.10) より

$$E_{\theta_0+a}\left(\phi_1^-\right) = P_{\theta_0+a}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0\right\} + \gamma P_{\theta_0+a}\left\{\theta_0 + a \leq X_{(1)} < \theta_0\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{c(\theta_0+a)}{c(\theta_0)}\right)^n + \gamma\left(1 - P_{\theta_0+a}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0\right\}\right) \\
&= \left(\frac{c(\theta_0+a)}{c(\theta_0)}\right)^n + \gamma\left\{1 - \left(\frac{c(\theta_0+a)}{c(\theta_0)}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

になる．このとき, $2(c(\theta_0+a)/c(\theta_0))^n < 1$ ならば

$$
\gamma = \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{c(\theta_0+a)}{c(\theta_0)}\right)^n\right\} \Big/ \left\{1 - \left(\frac{c(\theta_0+a)}{c(\theta_0)}\right)^n\right\}
$$

として, ϕ_1^- は水準 $1/2$ の MP 検定になる．また, (3.9), (3.10) より

$$
E_{\theta_0+a}\left(\phi_2^-\right) = \gamma P_{\theta_0+a}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0\right\} = \gamma\left(\frac{c(\theta_0+a)}{c(\theta_0)}\right)^n
$$

となるから, $2(c(\theta_0+a)/c(\theta_0))^n \geq 1$ ならば

$$
\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta_0)}{c(\theta_0+a)}\right)^n
$$

として, ϕ_2^- は水準 $1/2$ の MP 検定になる．よって, (2.3) より $2(c(\theta_0+a)/c(\theta_0))^n < 1$ のとき, 任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$ について

$$
\begin{aligned}
P_{\theta_0}\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta_0 \leq a\right\} &\geq 1 - E_{\theta_0}\left(\phi_1^-\right) \\
&= 1 - \left(P_{\theta_0}\left\{X_{(1)} \geq \theta_0\right\} + \gamma P_{\theta_0}\left\{\theta_0 + a \leq X_{(1)} < \theta_0\right\}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり, $2(c(\theta_0+a)/c(\theta_0))^n \geq 1$ のとき, 任意の $\hat{\theta} \in \mathcal{M}$ について

$$
P_{\theta_0}\left\{\hat{\theta}(\boldsymbol{X}) - \theta_0 \leq a\right\} \geq 1 - E_{\theta_0}\left(\phi_2^-\right) = 1 - \gamma P_{\theta_0}\left\{X_{(1)} > \theta_0\right\} = 1 - \gamma
$$

となるので, (2.5) より

$$
\beta_{\theta_0}^-(a) := \begin{cases} 0 & \left(c(\theta_0+a)/c(\theta_0) < 2^{-1/n}\right), \\ 1-\gamma & \left(c(\theta_0+a)/c(\theta_0) \geq 2^{-1/n}\right) \end{cases} \tag{3.11}
$$

となる．ただし, $\gamma = (1/2)(c(\theta_0)/c(\theta_0+a))^n$ とする．よって, θ_0 は任意であるから (3.7), (3.11) より

$$
\beta_\theta^+(a) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n \quad (a > 0), \tag{3.12}
$$

$$
\beta_\theta^-(a) = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n\right\}\chi_{\{a|c(\theta)/c(\theta+a) \leq 2^{1/n}\}\cap(-\infty,\ 0)}(a). \tag{3.13}
$$

ここで, 次の条件 (A) を仮定する.

(A) 各 $n=1,2,\cdots$ についてある正数 κ が存在し, 任意の $\theta\in\Theta$ について $c(\theta/\kappa)/c(\theta)=2^{1/n}$ でかつ $(\kappa-1)\theta<0$ である.

このとき, (3.2) より各 n について

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n=\left\{\frac{c(\theta)}{c\left(\theta+\frac{1}{\kappa}(a-(\kappa-1)\theta)\right)}\right\}^n$$

となり, $c^n(\theta)$ は θ の単調増加であるから, $a>(\kappa-1)\theta$ ならば

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n<1 \tag{3.14}$$

となる. よって, (3.7), (3.12)〜(3.14) より次のことが成り立つ.

定理 1 条件 (A) の下で, MU 推定量の分布の限界は

$$\beta_\theta^+(a)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n \quad (a\geq 0), \tag{3.15}$$

$$\beta_\theta^-(a)=\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n\right\}\chi_{[(\kappa-1)\theta,\ 0)}(a) \tag{3.16}$$

である.

次節において, 限界 $\beta_\theta^\pm(a)$ を a について一様に達成する MU 推定量, すなわち $\mathcal{M}$ における有効推定量を求める.

4. $\mathcal{M}$ における有効推定量

$X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度 (3.1) をもつ分布に従う確率変数とする. このとき, θ の推定量として $X_{(1)}$ をとると

$$P_\theta\left\{X_{(1)}-\theta\leq a\right\}=\left\{1-\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n\right\}\chi_{[0,\ \infty)}(a) \tag{4.1}$$

となる. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 2 条件 (A) の下で, θ の推定量 $\hat{\theta}_\kappa=\kappa X_{(1)}$ とすれば, $\hat{\theta}_\kappa$ は $\mathcal{M}$ において有効推定量である.

証明 まず, $T_\kappa=\hat{\theta}_\kappa-\theta$ とおくと T_κ の分布関数は, 任意の $a\in\mathbf{R}^1$ について

$$F_{T_\kappa}(a)=P_\theta\left\{T_\kappa\leq a\right\}=P_\theta\left\{X_{(1)}-\theta\leq\frac{1}{\kappa}\left(a-(\kappa-1)\theta\right)\right\} \tag{4.2}$$

となる. ここで, $(\kappa-1)\theta<0$ であるから, $a=0$ とすると条件 (A) と (4.1) より

$$\begin{aligned}F_{T_\kappa}(0)&=P_\theta\left\{\hat{\theta}_\kappa\leq\theta\right\}=P_\theta\left\{X_{(1)}-\theta\leq\left(-1+\frac{1}{\kappa}\right)\theta\right\}\\&=1-\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta/\kappa)}\right)^n=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるので, (2.1) より $\hat{\theta}_\kappa$ は θ の MU 推定量になる. また, 条件 (A) と (4.1), (4.2) より T_κ の分布関数は

$$F_{T_\kappa}(a) = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)}\right)^n\right\} \chi_{[(\kappa-1)\theta,\ \infty)}(a) \tag{4.3}$$

となる. このとき, $(\kappa-1)\theta < 0$ であるから, (3.15), (3.16), (4.3) より

$$F_{T_\kappa}(a) = \begin{cases} \beta_\theta^+(a) & (a \geq 0), \\ \beta_\theta^-(a) & (a < 0) \end{cases}$$

となる. よって, (2.6)〜(2.9) より $\hat{\theta}_\kappa$ の θ の周りでの集中確率は, 任意の $\theta \in \Theta$, 任意の正数 a, b について

$$C_\theta\left(\hat{\theta}_\kappa; a, b\right) = \beta_\theta^+(b) - \beta_\theta^-(a)$$

となるから $\hat{\theta}_\kappa$ は $\mathcal{M}$ において有効推定量になる. □

例 (パレート分布) (3.1) において $q(x) = x^{-\nu}\chi_{(0,\ \infty)}(x)$ $(\nu > 1)$ とすると, 密度 $p(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta = (0, \infty))$ をもつ分布はパレート分布 $P_a(\nu, \theta)$ となる. ただし, $c(\theta) = (\nu-1)\theta^{\nu-1}$ とする. このとき, ν を既知として, $c(\theta/\kappa)/c(\theta) = 2^{1/n}$ となる κ は $\hat{\kappa} = 2^{-1/(n(\nu-1))}$ となるから条件 (A) は満たされる. ここで, $a > -\theta$ のとき

$$\frac{c(\theta)}{c(\theta+a)} = \left(\frac{\theta}{\theta+a}\right)^{\nu-1}$$

となるから, (3.15), (3.16) より

$$\beta_\theta^+(a) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\theta+a}\right)^{n(\nu-1)} \quad (a > 0),$$
$$\beta_\theta^-(a) = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\theta+a}\right)^{n(\nu-1)}\right\} \chi_{[(\hat{\kappa}-1)\theta,\ 0]}(a)$$

となる. そして, 定理 1 より θ の MU 推定量 $\hat{\theta}_{MU} = \hat{\kappa}X_{(1)}$ は $\mathcal{M}$ において有効推定量になる. 一方, θ の UMVU 推定量は

$$\hat{\theta}_{MV} = \left(1 - \frac{1}{n(\nu-1)}\right) X_{(1)}$$

となる ([A19] の pp.117, 118 参照). ここで, $\hat{\theta}_{MV}$ は MU 推定量でないが $\hat{\theta}_{MV}$ と $\hat{\theta}_{MU}$ における $X_{(1)}$ の係数を比較してみると下表のようになり, $\nu = 2$ の場合には, n が 10 位になると双方が近い値になる.

表 1: $\nu=2$ のときの θ の推定量 $\hat{\theta}_{MU}$ と $\hat{\theta}_{MV}$ における $X_{(1)}$ の係数の比較

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$\hat{\kappa}$	0.5	0.707	0.794	0.841	0.871	0.891	0.906	0.917	0.926	0.933	1
$1-(1/n(\nu-1))$	0	0.5	0.667	0.75	0.8	0.833	0.857	0.875	0.889	0.9	1

次に, $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度 (3.1) をもつ分布に従う確率変数とし, $q(x)=e^{-x}$ $(x \in \mathbf{R}^1)$ とする. このとき, この分布は下側切断指数分布で $C(\theta)=e^{\theta}$ $(\theta \in \Theta=\mathbf{R}^1)$ となり, 条件 (A) は満たされない. そこで, θ の推定量として

$$\hat{\theta}^* = X_{(1)} - \frac{1}{n}\log 2$$

をとると, (4.1) より

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}^* - \theta \le a\right\} = P_\theta\left\{X_{(1)} - \theta \le a + \frac{1}{n}\log 2\right\} = 1 - \frac{1}{2}e^{-na} \quad \left(a \ge -\frac{1}{n}\log 2\right) \tag{4.4}$$

となり,

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}^* - \theta \le a\right\} = 0 \quad \left(a < -\frac{1}{n}\log 2\right) \tag{4.5}$$

となる. ここで, (4.4) より $P_\theta\{\hat{\theta}^* \le \theta\} = 1/2$ となるから $\hat{\theta}^*$ は θ の MU 推定量になり, $T=\hat{\theta}^*-\theta$ とおくと (4.4), (4.5) より

$$F_T(a) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-na}\right)\chi_{[-(1/n)\log 2,\ \infty)}(a) \tag{4.6}$$

となる. 一方, $c(\theta)/c(\theta+a)=e^{-a}$ となるから, (3.12), (3.13) よりそれぞれ

$$\beta_\theta^+(a) = 1 - \frac{1}{2}e^{-na} \quad (a \ge 0), \tag{4.7}$$

$$\beta_\theta^-(a) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-na}\right)\chi_{[-(1/n)\log 2,\ 0)}(a) \tag{4.8}$$

となる. よって, (4.6)〜(4.8) より

$$F_T(a) = \begin{cases} \beta_\theta^+(a) & (a \ge 0), \\ \beta_\theta^-(a) & (a < 0) \end{cases}$$

となり, (2.6)〜(2.9) より $\hat{\theta}^*$ の θ の周りでの集中確率は, 任意の $\theta \in \Theta$, 任意の正数 a, b について

$$C_\theta\left(\hat{\theta}^*; a, b\right) = \beta_\theta^+(b) - \beta_\theta^-(a)$$

となるから $\hat{\theta}^*$ は $\mathcal{M}$ において有効推定量になる. 一方, θ の UMVU 推定量は $\hat{\theta}_{MV} = X_{(1)} - (1/n)$ となり ([A19] の pp.80, 81 参照), $\hat{\theta}^*$ とは偏り補正部分が異なる.

5. おわりに

本論において, 小標本論の場合に, 密度 (3.1) をもつ切断分布族において MU 推定量の有効性について論じたが, もっと一般の切断分布族のときには, 大標本論の枠組で考える必要がある. 実際, 切断指数型分布族における自然母数, 切断母数の最尤推定について (高次までの) 漸近不偏性をもつように補正して考察できるし ([A17]), さらにもっと一般の切断分布にも拡張され得る ([A21], [AO21]).

参考文献

[A17] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation for Truncated Exponential Families.* Springer Briefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Springer Nature, Singapore.

[A19] 赤平昌文 (2019). 統計的不偏推定論. 共立出版.

[A21] Akahira, M. (2021). Maximum likelihood estimation for a one-sided truncated family of distributions. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **4**, 317–344.

[AO21] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2021). Asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter in the presence of a nuisance parameter for a one-sided truncated family of distributions. Submitted for publication.

[AT81] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators.* Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.

[G94] Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics.* NSF-CBMS Regional Conf. Ser. Prob. Statist., 4, Inst. of Math. Statist., Hayward, California.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* 2nd ed. Springer, New York.

[PW85] Pfanzagl, J. and Wefelmeyer, W. (1985). *Asymptotic Expansions for General Statistical Models.* Lecture Notes in Statistics 31, Springer, Berlin.

[VN93] Voinov, V. G. and Nikulin, M. S. (1993). *Unbiased Estimators and Their Applications, Vol. 1: Univariate Case.* Kluwer Academic Pub., Dordrecht.