Artin style characterizations of the multiple gamma and sine functions

神戸大学 理学研究科　渋川 元樹 *
Genki Shibukawa†
Graduate School of Science, Kobe University

Abstract

E. Artin による積公式を用いたガンマ函数の特徴付けを多重化し, 多重ガンマ函数や多重三角函数といった多重特殊函数の特徴付けを与える.

1 Introduction –ガンマ函数の特徴付け–

ガンマ函数

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}\,du, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

の特徴付けについては Bohr-Mollerup の定理がよく知られている. これは (1) 函数等式

$$f(z+1) = zf(z) \tag{FE}$$

(2) 初期値 $f(1) = 1$, 及び (3) $z > 0$ における $\log f(z)$ の凸性 (対数凸性) によりガンマ函数が一意に特徴付けられるというものである. 条件 (1), (2) に加え, 連続性, あるいはより強く連続微分可能性を仮定しても, それだけでは一意性が成立しないが, 条件 (3) 対数凸性を課すと (連続性の仮定無しに) 一意性が成立する点が著しい. これはガンマ函数だけでなく, Askey [As] により q ガンマ函数

$$\Gamma_q(z) := (1-q)^{1-z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{1+n}}{1-q^{z+n}}$$

へ殆ど parallel に拡張されている.

多重ガンマ函数についての類似の結果も知られており, Vignéras [V] は

$(1)_{\mathrm{V}}$ $G_r(z+1) = G_{r-1}(z)G_r(z)$,

$(2)_{\mathrm{V}}$ $G_r(1) = 1$,

$(3)_{\mathrm{V}}$ $\frac{d^{r+1}}{dz^{r+1}}\log G_r(z+1) \geq 0$ for $z \geq 0$,

$(4)_{\mathrm{V}}$ $G_0(z) = z$,

* g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

† 本研究は科研費 (課題番号: 21K13808) の助成を受けたものである.
講演動画の URL は `https://www.youtube.com/watch?v=YHa-piMg5Hs&t=963s`

によって多重 (r 重) ガンマ函数が特徴付けられることを示した．この結果は西澤 [N] により q 類似 (Askey の結果の多重化) も与えられている．ただし, Bohr-Mollerup や Askey による一重のガンマ函数の場合とは異なり, 一般の r 重の場合においては単純な対数凸性だけでは不十分で, 本質的に高階微分可能性が必要となることに注意しておく．

さて, 一方で Artin [Ar] は Bohr-Mollerup とは異なるガンマ函数の特徴付けをいくつか与えている．鍵になるのは函数等式 $f(z+1)=zf(z)$ に加え, ガンマ函数が満たす積公式 (倍角公式)

$$f(z)=\frac{N^{\frac{z}{N}-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}}\prod_{j=0}^{N-1}f\left(\frac{z+j}{N}\right) \tag{A_N}$$

を併せて考えるという点である．これによりたとえば以下のようなガンマ函数の特徴付けが得られる．

[Ar] 定理 6.1 ガンマ函数は, (FE) と $N=2$ のときの (A_N)(これを (A_2) と書くことにする) を満たし, 正の実数 x について正となる, 唯一の二階連続微分可能函数である．

[Ar] 定理 6.2 ガンマ函数は, (FE) とある一つの $N\geq 2$ についての (A_N) を満たし, 正の実数 x について正となる唯一の一階連続微分可能函数である ([Ar] の日本語訳はここが「連続函数」と誤訳されている).

[Ar] 定理 6.3 ガンマ函数は, (FE) と任意の $N\geq 2$ について (A_N) を満たし, 正の実数 x について正となる唯一の連続函数である．

Artin はこの 3 つの定理を証明するために, (A_N) の log 版にあたる

$$g(z)=\sum_{j=0}^{N-1}g\left(\frac{z+j}{N}\right) \tag{$l\mathrm{A}_N$}$$

による次の 3 つの補題を示している．

補題 1 g を, $N=2$ のときの $(l\mathrm{A}_N)$(これを $(l\mathrm{A}_2)$ と書くことにする) を満たす, 二階連続微分可能な周期 1 の周期函数とすると $g\equiv 0$ である．

補題 2 g を, ある $N\geq 2$ について $(l\mathrm{A}_N)$ を満たす, 一階連続微分可能な周期 1 の周期函数とすると $g\equiv 0$ である．

補題 3 g を, 任意の $N \geq 2$ について $(l\mathrm{A}_N)$ を満たす, 連続な周期 1 の周期函数とすると $g \equiv 0$ である.

上から下に行くにつれて, 函数 f に対する条件は C^2 級から C^0 級へと弱くなっていき, 代わりに積公式 (A_N) の条件が厳しくなっていく. 特に一番下の定理 6.3 もしくは補題3 は函数自身の条件は連続まで弱められる代わりに, $N \geq 2$ となる全ての整数に対して積公式 (A_N) の成立を要請しているので, (FE) と初期値と対数凸性のみで統制される Bohr-Mollerup の定理に比して, かなり複雑な特徴付けのように思えるかもしれない.

ところが多重化に関しては様相が異なり, Bohr-Mollerup 流よりもむしろ Artin 流 (特に定理 6.3) の方が以下のような点で優れている.

1. Bohr-Mollerup 流は多重化すると対数凸性が (対数) 高階微分可能性とその正値性というかなり強い制約になってしまうのに対し, Artin 流は初期値の条件を一つ増やすだけで多重化しても連続函数の要請を保つことも可能である (高階微分可能性を取るか, 初期値を取るか).
2. 多重ガンマ函数だけではなく, 多重三角函数等の別のタイプの多重特殊函数に関しても全く同様に特徴付けができる.

本稿では, 積公式 (A_N) を用いる Artin 流のガンマ函数の特徴付け, 特により基本的な補題1, 補題2, 補題3 を, 周期 1 の周期函数に関する Kubert 恒等式

$$g(z) = \sum_{j_1,\ldots,j_r=0}^{N-1} g\left(\frac{z+j_1+\cdots+j_r}{N}\right) = N^{r-1}\sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{z+j}{N}\right) \tag{K_N}$$

による特徴付けで多重化する. そのために key となる以下の補題を与える. 以下, 特に断らない限り r を 2 以上の整数とする.

補題 1.1 g を函数方程式 (K_2) を満たす $r+1$ 階連続微分可能な周期 1 の周期函数とすると $g \equiv 0$ である.

補題 1.2 g を, 2 以上のあるの整数 N について, 函数方程式 (K_N) を満たす r 階連続微分可能な周期 1 の周期函数とすると $g \equiv 0$ である.

補題 1.3（Milner [M]） r を 2 以上の整数とする. g を, 2 以上の任意の整数 N について, 函数方程式 (K_N) を満たす周期 1 の連続函数とする. このとき, ある複素数 a, b が存在して

$$g(z) = a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nz)}{n^r} + b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nz)}{n^r}. \tag{1}$$

補題 1.3 は Milner [M] による．証明も Fourier 級数展開から直ちに得られるよく知られた結果だと思われるが,

- ここから更に $g \equiv 0$ を導出する付帯条件にはいくつかの変奏が考えられること,
- 意外なことに応用として多重ガンマ函数や多重三角函数の特徴付けへの言及がなされていないように思われること,

を考慮し, 本稿で改めて取り上げる．更にその応用として, 多重ガンマ函数や多重三角函数を含むクラスの多重特殊函数についての特徴付けを述べる．

本稿の構成は以下のようになる．まず第 2 章で Barnes 型の多重ゼータ函数, 多重ガンマ函数と多重三角函数を導入し, その基本的性質を紹介する．第 3 章で Artin による補題 1, 補題 2, 補題 3 の多重化にあたる補題 1.1, 補題 1.2, 補題 1.3 を証明ないし紹介し, その系をいくつか述べる．最後に第 4 章で多重ガンマ函数と多重三角函数等を含むより一般の多重特殊函数の特徴付けについて述べる．

2 Preliminaries

任意の複素数 a についてその偏角を $-\pi < \arg a \le \pi$ とする．正の整数 r について, ゼロでない複素パラメーター $\omega_1, \ldots, \omega_r$ の r 組を $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$ と書く．Barnes 型の r 重ゼータ函数 (多重 Hurwitz ゼータ函数)$\zeta_r(s, z \mid \boldsymbol{\omega})$ を

$$\zeta_r(s, z \mid \boldsymbol{\omega}) := \sum_{m_1, \ldots, m_r \ge 0} \frac{1}{(m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r + z)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > r$$

で定義する．ただしは $z, \omega_1, \ldots, \omega_r$ は条件

$$\max\{\arg z, \arg \omega_1, \ldots, \arg \omega_r\} - \min\{\arg z, \arg \omega_1, \ldots, \arg \omega_r\} < \pi$$

を満たすとする (以下特に断らない限り $z, \omega_1, \ldots, \omega_r$ はこの条件を満たすとする).

この $\zeta_r(s, z \mid \boldsymbol{\omega})$ は全 s 平面に有理型函数として解析接続され, 極は $s = 1, 2, \ldots, r$ にのみもち, しかも一意であることが知られている．特に $s = 0$ において正則であるので,

$$\Gamma_r(z \mid \boldsymbol{\omega}) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_r(s, z \mid \boldsymbol{\omega}) \Big|_{s=0} \right)$$

とおき, これを Barnes の多重 (r 重) ガンマ函数と呼ぶ．一重の場合 ($r = 1$) は

$$\Gamma_1(z \mid \omega_1) = \omega_1^{\frac{z}{\omega_1} - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{z}{\omega_1}\right)}{\sqrt{2\pi}}$$

である．また多重ゼータ函数 $\zeta_r(s,z\mid\boldsymbol{\omega})$ の差分関係式

$$\zeta_r(s,z+\omega_i\mid\boldsymbol{\omega})=\zeta_r(s,z\mid\boldsymbol{\omega})-\zeta_{r-1}(s,z\mid\widehat{\boldsymbol{\omega}}(i)),\quad i=1,\dots,r$$
$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}(i)=(\omega_1,\dots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\omega_r)\in(\mathbb{C}^\times)^{r-1}$$

から差分関係式

$$\Gamma_r(z+\omega_i\mid\boldsymbol{\omega})=\Gamma_{r-1}(z\mid\widehat{\boldsymbol{\omega}}(i))^{-1}\Gamma_r(z\mid\boldsymbol{\omega}) \tag{2}$$

が得られる．

更にこの多重ガンマ函数 $\Gamma_r(z\mid\boldsymbol{\omega})$ を用い, 黒川の多重三角函数 $S_r(z\mid\boldsymbol{\omega})$ を

$$S_r(z\mid\boldsymbol{\omega}):=\Gamma_r(z\mid\boldsymbol{\omega})^{-1}\Gamma_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-z\mid\boldsymbol{\omega})^{(-1)^r}$$

で定める．これに関しても多重ガンマ函数と同様に, $r=1$ のときは

$$S_1(z\mid\boldsymbol{\omega})=2\sin\left(\frac{\pi z}{\omega_1}\right)$$

が成立し, 差分関係式

$$S_r(z+\omega_i\mid\boldsymbol{\omega})=S_{r-1}(z\mid\widehat{\boldsymbol{\omega}}(i))^{-1}S_r(z\mid\boldsymbol{\omega}) \tag{3}$$

が成立する．

また Artin 流特徴付けにおいて重要となる倍角公式 (A_N) の類似も知られている:

$$\Gamma_r\left(z\mid\boldsymbol{\omega}\right)=N^{-\zeta_r(0,z\mid\boldsymbol{\omega})}\prod_{j_1,\dots,j_r=0}^{N-1}\Gamma_r\left(\left.\frac{z+j_1\omega_1+\cdots+j_r\omega_r}{N}\right|\boldsymbol{\omega}\right), \tag{4}$$
$$S_r\left(z\mid\boldsymbol{\omega}\right)=\prod_{j_1,\dots,j_r=0}^{N-1}S_r\left(\left.\frac{z+j_1\omega_1+\cdots+j_r\omega_r}{N}\right|\boldsymbol{\omega}\right). \tag{5}$$

以下, $\omega_1=\cdots=\omega_r=1$ の場合のときは上述の $\boldsymbol{\omega}$ を全て省略して

$$\zeta_r(s,z),\quad\Gamma_r(z),\quad S_r(z)$$

のように書くことにする．

注意 2.1　(1) 多重ガンマ函数 $\Gamma_r(z\mid\boldsymbol{\omega})$ の代わりに

$$G_r(z\mid\boldsymbol{\omega}):=\exp\left((-1)^{r-1}\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,z\mid\boldsymbol{\omega})\Big|_{s=0}\right)$$

を用いることもある．このようにすると差分関係式は

$$G_r(z+\omega_i\mid\boldsymbol{\omega})=G_r(z\mid\boldsymbol{\omega})G_{r-1}(z\mid\widehat{\boldsymbol{\omega}}(i))$$

のようになる.
(2) 多重ガンマ函数の倍角公式に現れた $\zeta_r(0, z \mid \boldsymbol{\omega})$ は, 母函数

$$\frac{u^r e^{zu}}{(e^{\omega_1 u}-1)\cdots(e^{\omega_r u}-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{r,n}(z \mid \boldsymbol{\omega}) \frac{u^n}{n!}$$

で定まる多重 Bernoulli 多項式を用いて

$$\zeta_r(0, z \mid \boldsymbol{\omega}) = (-1)^r \frac{B_{r,r}(z \mid \boldsymbol{\omega})}{r!}$$

となるので, 特に z の r 次多項式であることに注意しておく.
(3) $r \geq 3$ でパラメータ $\omega_1, \ldots, \omega_r$ が任意の $i \neq j$ について $\omega_i/\omega_j \notin \mathbb{Q}$ となるとき, 三重周期以上の一変数 (一価) 函数は存在しないこと (Jacobi) より, 函数方程式

$$f_r(z+\omega_j \mid \boldsymbol{\omega}) = f_{r-1}(z \mid \widehat{\boldsymbol{\omega}}(j)) f_r(z \mid \boldsymbol{\omega}) \quad j = 1, \ldots, r$$

を満たす解は定数倍を除いて一意的である. なので $r \geq 3$ で多重特殊函数の一意性が問題になるのは, パラメータが $\omega_i/\omega_j \in \mathbb{Q}$ のように適当に退化しているときになることに注意する. 本稿ではその中でも特に最も退化した場合に当たる $\omega_1 = \cdots = \omega_r = 1$ についての一意性について取り扱う.

最後に多重ゼータ函数とは関係ないが, 以下の証明において必要となる一つの公式を準備する.

命題 2.2 1 より大きい実数 r と 3 以上の整数 N について

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{n^r} > 0,$$

よって特に非零である.

証明 この条件の元で命題の左辺の級数は絶対収束するので以下のように変形する:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{n^r} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right)}{(mN+j)^r} \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sin\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(mN+j)^r} - \frac{1}{(mN+N-j)^r} \right\}.\end{aligned}$$

ここで明らかに

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(mN+j)^r} - \frac{1}{(mN+N-j)^r} \right\} > 0$$

であり,

$$0 < \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) < \cdots < \sin\left(\frac{2\pi\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}{N}\right) < 1$$

ゆえ結論を得る. □

3 Proofs of key lemmas

補題 1.1, 補題 1.2 を示す.

証明は Artin の**補題 1**, **補題 2** を用いる.

補題 1.1 の証明 周期 1 の周期函数 g が C^{r+1} 級であるとして, (K_2), つまり $N=2$ の場合の (K_N) が成り立つとする. このとき, (K_2) の両辺を z で $r-1$ 階微分すると

$$g^{(r-1)}(z) = g^{(r-1)}\left(\frac{z}{2}\right) + g^{(r-1)}\left(\frac{z+1}{2}\right) \tag{$\mathrm{K}_2^{(r-1)}$}$$

を得る. ここで $g^{(r-1)}(z)$ は $[0,1]$ 上で二回連続微分可能な周期 1 の周期函数なので, Artin の**補題 1** より $g^{(r-1)}(z) \equiv 0$.

よって $g^{(r-1)}(z)$ を $r-1$ 階積分することで $g(z)$ は z の $r-1$ 次多項式であることがわかるが, 周期 1 の周期函数であるので結局 $g(z)$ は定数函数である:$g(z)=c$. これを (K_2) に代入すると, $c = 2^r c$ を得るが, 今 $r \geq 2$ としているので $c=0$ である. □

補題 1.2 の証明 周期 1 の周期函数 g が C^r 級であるとして, ある 2 以上の整数 N について (K_N) が成り立つとする. ここで (K_N) の両辺を z で $r-1$ 階微分すると

$$g^{(r-1)}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} g^{(r-1)}\left(\frac{z+j}{N}\right) \tag{$\mathrm{K}_N^{(r-1)}$}$$

となるが, $g^{(r-1)}(z)$ は C^1 級の周期 1 の周期函数なので Artin の**補題 2** より $g^{(r-1)} \equiv 0$. 後は先程と同様の論法で $g \equiv 0$ を得る. □

補題 1.3 は [M] の Lemma 1 であるので改めて証明を述べるまでもないが, $g \equiv 0$ を得る付帯条件にはいくつかの変奏があるのでそれを述べる.

系 3.1 g を, 任意の $N \geq 2$ について $(l\mathrm{A}_N)$ を満たす, 連続な周期 1 の周期函数とする.
(1) g が 1 階連続微分可能かつ $g(0) = g'(0) = 0$ とすると $g \equiv 0$ である.
(2) $g(0)=0$ かつ, 2 より大きな整数 m について $g(\frac{1}{m}) = 0$ が成立すれば $g \equiv 0$ である.

証明 今 g は補題 1.3 の条件を満たしているので, ある複素数 a, b が存在して (1) が成立する.

(1) まず $g(0)=0$ と Riemann ゼータ函数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

について $\zeta(r) > 1$ であることより, $b=0$, すなわち

$$g(z) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nz)}{n^r} \tag{6}$$

を得る. この両辺を z で微分すると

$$g'(z) = 2\pi a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nz)}{n^{r-1}}$$

となる. $r=2$ のときは, $a \neq 0$ とすると右辺が z の整数点で不連続になっているために g が C^1 級である仮定に反するので, $a=0$ である. そこで $r>2$ とすると, $g'(0)=0$ と $\zeta(r-1)>1$ より, やはり $a=0$ を得る.
(2) $g(0)=0$ から先程と同様にして (6) となることはよい. これに $g(\frac{1}{m})=0$ と命題2.2 より $a=0$ を得る. $\square$

注意 3.2 多重の場合の Milnor の結果 (補題1.3) には適当な初期条件がついているのに対し, 一重の場合の Artin の結果 (**補題 3**) には初期値の条件がついていない. その理由は, **補題 3** の場合の Fourier 級数

$$a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nz)}{n} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nz)}{n}$$

が絶対収束しないことから生じる不連続性により, 連続性の仮定のみから恒等的に零が従うからである.

4 Characterizations of multiple gamma and sine functions

$G(z)$ を函数方程式

$$G(z+1) = \alpha(z)G(z) \tag{GE}$$

を満たす $\mathbb{R}_{>0}$ 上で正の実数となる連続函数とする. 更に $G(z)$ が 2 以上の整数 N について倍角公式

$$G(z) = \beta(z,N) \prod_{j_1,\ldots j_r=0}^{N-1} G\left(\frac{z+j_1+\cdots+j_r}{N}\right) \tag{B_N}$$

が成り立つとする.

定理 4.1　函数等式 (GE) を満たし, $N=2$ についての倍角公式 (B_2) を満たす $r+1$ 階連続微分可能な函数は, 存在すれば一意的である.

定理 4.2　函数等式 (GE) を満たし, ある 2 以上の整数 N についての倍角公式 (B_N) を満たす r 階連続微分可能な函数は, 存在すれば一意的である.

定理 4.3　(0) 函数等式 (GE) を満たし, 2 以上の全ての整数 N についての倍角公式 (B_N) を満たす連続函数は, 存在すれば

$$\exp\left(a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nz)}{n^r}+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nz)}{n^r}\right)$$

の因子分を除いて, 一意的である.

(1) 函数等式 (GE) を満たし, 2 以上の全ての整数 N についての倍角公式 (B_N) と, $z=1$ と $z=\frac{1}{m}$(ただし m は 2 より大きいある整数 m) における初期値が一致する連続函数は, 存在すれば一意的である.

証明　いずれも函数等式 (GE) を満たす函数を G_1, G_2 とし, $z>0$ でその比の対数を

$$g(z) := \log\left(\frac{G_1(z)}{G_2(z)}\right)$$

とすると, $g(z)$ は周期 1 の周期函数である. また $g(z)$ は周期 1 の周期函数とすると, 倍角公式 (B_N) より Kubert 恒等式 (K_N) が得られるので, 補題1.1, 補題1.2, 補題1.3 及び系 3.1 より結論を得る. □

例 4.4　$\alpha(z)=\Gamma_{r-1}(z)^{-1}$, $\beta(z,N)=N^{-\zeta_r(0,z)}$ とするとき, Barnes の多重ガンマ函数 $\Gamma_r(z)$ は (GE) と任意の N に対し (B_N) を満たす $\mathbb{R}_{>0}$ 上で正の連続函数である. よって定理4.3 のより, $G(z)$ が函数等式 (GE) と, 2 以上の全ての整数 N についての倍角公式 (B_N) を満たすとし, G は連続かつ $G(1)=\Gamma_r(1)$, 及びある 2 より大きい整数 m について $G(\frac{1}{m})=\Gamma_r(\frac{1}{m})$ を満たすとすれば, $G(z)=\Gamma_r(z)$ となる.

$\alpha(z)=S_{r-1}(z)^{-1}$, $\beta(z,N)=1$ に対して同様に考えると, $G(z)=S_r(z)$ となる.

注意 4.5　より一般に, Milnor's multiple gamma functions

$$\Gamma_{r,k}(z) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,z)\Big|_{s=-k}\right)$$

に対しても, 同様の特徴付けが成立する. ただし, 定理4.3 に関しては, $r-k>1$ として, 不定性が生じる因子は

$$\exp\left(a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nz)}{n^{r-k}}+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nz)}{n^{r-k}}\right)$$

に置き換えられる.

Acknowledgment

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[Ar] E. Artin : *The Gamma function*, Holt, Reinehart and Winston, (1964).

[As] R. Askey : *The q-gamma and q-beta functions*, Applicable Anal., **8**-2 (1978), 125–141.

[M] J. Milnor : *On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and the Kubert identities*, Enseign. Math., **29** (1983), 281–322.

[N] M. Nishizawa : *On a q-analogue of the multiple gamma functions*, Lett. Math. Phys. **37**-2 (1996), 201–209.

[V] M. F. Vignéras: *L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, Astérisque **61** (1979) 235–249.