On the zeros of the k-th derivative of the Dirichlet L-functions under the generalized Riemann hypothesis

名古屋大学・多元数理科学研究科　櫻井　和磨
Kazuma Sakurai
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要

A. Speiser [10] は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\Re(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないことが Riemann 予想と同値であることを示した．この結果は $\zeta(s)$ の零点の分布がその導関数の零点の分布と関係していることを意味する．その後, B. C. Berndt [3], N. Levinson と H. L. Montgomery [7], H. Akatsuka [1], そして A. I. Suriajaya [8] によって $\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点についても多く調べられてきた．$\zeta(s)$ の類似として Dirichlet の L 関数 $L(s,\chi)$ の導関数 $L^{(k)}(s,\chi)$ についても調べられた．C. Y. Yıldırım [11] は一般 Riemann 予想を仮定した場合と無条件の場合で $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点分布について調べた．Yıldırım [11] の結果を改良したものとして, Suriajaya [9] は一般 Riemann 予想を仮定したときの $L'(s,\chi)$ の零点の分布を調べ, Akatsuka と Suriajaya [2] は一般 Riemann 予想の仮定したときと無条件の場合の $L'(s,\chi)$ の零点の分布について調べた．この講究録では, Riemann ゼータ関数とその導関数の研究の歴史と, Dirichlet の L 関数とその導関数の研究の歴史を紹介する．また, 著者 [12] が得た結果について紹介する．特に著者の結果は, Suriajaya [9] の結果の延長であるため, 重複する部分が多いことに, 注意してほしい.

1　Riemann ゼータ関数の零点分布

定理 1.1. (cf. [1, Theorem 1]($k=1$), [8, Theorem 1]) *Riemann* 予想が成り立つ

とき,

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0<\Im(\rho)\leq T \\ \zeta^{(k)}(\rho)=0, \\ \text{重複度込み}}} \left(\Re(\rho)-\frac{1}{2}\right) = \frac{kT}{2\pi}\log\log\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2 - k\log\log 2\right) - k\mathrm{Li}\left(\frac{T}{2\pi}\right)$$
$$+O_k((\log\log T)^2)$$

が成り立つ．ここで,

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

である．

定理 1.2. (cf. [1, Theorem 3] ($k=1$), [8, Theorem 3]) $N_k(T)$ を $0<\Im(s)\leq T$ における $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の重複度込みの個数とする．*Riemann* 予想が成り立つとき,

$$N_k(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O_k\left(\frac{\log T}{(\log\log T)^{1/2}}\right)$$

が成り立つ．

F. Ge [4] は, 定理 1.2 における誤差項を $k=1$ に対して, F. Ge と A. I. Suriajaya [6] は一般的な k に対して,

$$O_k\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

に改良した．

2 Dirichlet の L 関数の零点分布

$q>1$ を法とする主指標でない原始的指標 χ に付随する Dirichlet の L 関数 $L(s,\chi)$ の k 階導関数 $L^{(k)}(s,\chi)$ に対して, C. Y. Yıldırım [11], Suriajaya [9], Akatsuka と Suriajaya [2] によって調べられた．Yıldırım [11] は $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点について, 非零領域を調べ, それに基づいて $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点を次のように分類した:

- $\{\sigma+it : \sigma\leq -q^K, |t|\leq\varepsilon\}$ にある自明な零点,
- $\{s=\sigma+it : |s|\leq q^K, \sigma\leq-\varepsilon\}$ にある,“放浪” 零点と
- $\{\sigma+it : \sigma>-\varepsilon\}$ にある非自明な零点.

ここで, $\varepsilon>0$ は任意であり, $K>0$ は k と ε に依存する大きな定数である．Akatsuka と Suriajaya [2] は, Yıldırım が示した非零領域を $k=1$ の場合に対して改良し, “放浪” 零点が存在しないことを示した．

以下,

$$\kappa := \begin{cases} 0, & \chi(-1)=1, \\ 1, & \chi(-1)=-1 \end{cases}$$

と $m:=\min\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 2} : \chi(n)\neq 0\}$ とおく．

定理 2.1. (cf. [2, Theorems 1-4])

(1) $\Theta(\chi) := \sup\{\Re(\rho) : \rho \in \mathbb{C}, L(\rho,\chi) = 0\}$ と

$$\mathcal{D}_1(\chi) := \left\{\sigma + it : \sigma \le 1 - \Theta(\chi), |t| \ge \frac{6}{\log q}\right\} \setminus \{\rho \in \mathbb{C} : L(\rho,\chi) = 0\},$$
$$\mathcal{D}_2(\chi) := \left\{\sigma + it : \sigma \le -q^2, |t| \ge \frac{12}{\log|\sigma|}\right\}$$

としたとき, $s \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ に対して, $L'(s,\chi) \neq 0$ である.

(2) $j \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つ.
- $L'(s,\chi)$ は $-2j - \kappa - 1 < \Re(s) < -2j - \kappa + 1$ に唯一な零点

$$-2j - \kappa + O\left(\frac{1}{\log(jq)}\right)$$

  を持つ.
- $\Re(s) = -2j - \kappa + 1$ 上で, $L'(s,\chi) \neq 0$ である.

(3) $-\kappa - 1 < \Re(s) < 0$ に対して, 次が成り立つ.
- $\kappa = 0$ と $q \ge 7$ のとき, $-1 \le \Re(s) \le 0$ で $L'(s,\chi) \neq 0$ である.
- $\kappa = 1$ と $q \ge 23$ のとき, $-2 \le \Re(s) \le 0$ で $L'(s,\chi)$ は唯一な零点を持つ.

注意 2.1. (cf. [11, Theorem 2]) $k \ge 1$ に対して

$$\Re(s) > 1 + \frac{m}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2}{m\log m}}\right)$$

において, $L^{(k)}(s,\chi) \neq 0$ である.

Akatsuka と Suriajaya [2, Theorem 5] は以上の非零領域 (定理 2.1) を用いて, Yıldırım [11, Theorem 4] が示した, $\Re(s) > 0$, $|\Im(s)| \le T$ における $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点の重複度込みの個数 $N_k(T,\chi)$ の評価式の誤差項 $O(q^K \log T)$ を $k = 1$ の場合に対して改良できた.

定理 2.2. (cf. [2, Theorem 5])

$$N_1(T,\chi) = \frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi m} - \frac{T}{\pi} + O(m^{1/2}\log qT).$$

$m = O(\log q)$ により, 定理 2.2 における誤差項は Yıldırım [11, Theorem 4] が示した $O(q^K \log T)$ を大幅に改良した. Akatsuka と Suriajaya [2, Theorem 6] は定理 1.1 の $L'(s,\chi)$ への拡張も示した.

定理 2.3. (cf. [2, Theorem 6])

$$\sum_{\substack{\rho \\ \Re(\rho)>0, |\Im(\rho)| \le T \\ L'(\rho,\chi)=0, \\ \text{重複度込み}}} \left(\Re(\rho) - \frac{1}{2}\right) = \frac{T}{\pi}\log\log\frac{qT}{2\pi} + \frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2}\log m - \log\log m\right) - \frac{2}{q}\mathrm{Li}\left(\frac{qT}{2\pi}\right)$$
$$+ O(m^{1/2}\log qT)$$

これは, 第 1 節で述べた Levinson と Montgomery の $k=1$ の場合に対する $L(s,\chi)$ への拡張である. 一般 Riemann 予想を仮定すれば, 定理 2.2 と 2.3 における誤差項を次のように改良できる. 以下, Suriajaya [9] の結果である.

定理 2.4. (cf. [9, Theorems 1.1 and 1.2]) 一般 *Riemann* 予想が成り立つとするとき,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\rho \\ \Re(\rho)>0,|\Im(\rho)|\le T \\ L'(\rho,\chi)=0, \\ \text{重複度込み}}}\left(\Re(\rho)-\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{kT}{\pi}\log\log\frac{qT}{2\pi}+\frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2}\log m-k\log\log(qT)\right)-\frac{2k}{q}\mathrm{li}\left(\frac{qT}{2\pi}\right)\\ &\quad+O_k\left(m^{1/2}(\log\log(qT))^2+m\log\log(qT)+m^{1/2}\log q\right)\end{aligned}$$

と

$$N_1(T,\chi)=\frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi m}-\frac{T}{\pi}+O\left(A(q,T)\frac{m^{1/2}\log qT}{\log\log qT}+\log q\right)$$

が成り立つ. ここで,

$$A(q,T):=\min\left\{(\log\log qT)^{1/2},1+\frac{m^{1/2}}{\log\log qT}\right\}$$

である.

以上の定理 2.4 の近似公式の誤差項における $A(q,T)$ は基本的に後者となり, 1 くらいの大きさになるが, m が T を上回り非常に大きいとき, 前者のほうが小さくなる. $A(q,T)$ における前者の誤差項は, Akatsuka [1] の方法によるものである. また, Ge [5] によって定理 2.4 における誤差項を

$$O\left(\frac{\log qT}{\log\log qT}+\sqrt{m\log 2m\log qT}\right)$$

に改良した.

筆者 [12] は定理 2.4 を一般の k に対して調べた.

定理 2.5. (cf. [12, Main results 3.1 and 3.2]) 一般 *Riemann* 予想が成り立つとき,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\rho \\ t_k<\pm\Im(\rho)\le T \\ L^{(k)}(\rho,\chi)=0, \\ \text{重複度込み}}}\left(\Re(\rho)-\frac{1}{2}\right)&=\frac{kT}{\pi}\log\log\frac{qT}{2\pi}+\frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2}\log m-k\log\log(qT)\right)-\frac{2k}{q}\mathrm{li}\left(\frac{qT}{2\pi}\right)\\ &\quad+O_k\left(m^{1/2}(\log\log(qT))^2+m\log\log(qT)\right)+O_k(\log\log t_k).\end{aligned}$$

と

$$N_k(T,\chi)=\frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi m}-\frac{T}{\pi}+N_k(t_k,\chi)+O_k\left(\frac{m^{1/2}\log(qT)}{(\log\log(qT))^{1/2}}\right)$$

が, 十分大きな q と t_k で成り立つ. また, O-定数は q, t_k, k に依存する.

以上の定理 2.5 は, k に対しての零点の個数の式であるが, Akatsuka と Suriajaya [2] が示した定理 2.1 のような "放浪" 零点の存在性などについては言及されていない. また, Ge [4] の手法を用いて, $N_k(T,\chi)$ の誤差項の改良が未だできていない. Ge と Suriajaya [6] の手法を用いれば改良できそうだが, これらの改良が今後の課題である. また, Akatsuka と Suriajaya [2] は $L'(s,\chi)$ と一般 Riemann 予想との関係は以上で述べたこと以外にも言及している. それらの結果と $L^{(k)}(s,\chi)$ との類似も調べる必要がある.

参考文献

[1] H. Akatsuka, "Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of $\zeta'(s)$" J. Number Theory **132** (2012), no. 10, 2242-2257.

[2] H. Akatsuka and A. I. Suriajaya, "Zeros of the first derivative of Dirichlet L-functions" J. Number Theory **184** (2018), 300-329.

[3] B. C. Berndt, "The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$", J. Lond. Math. Soc. (2) **2** (1970). 577-580.

[4] F. Ge, "The number of zeros of $\zeta'(s)$", Int. Math. Res. Not. IMRN **2017** (2017), no. 5, 1578-1588.

[5] F. Ge, "The number of zeros of $L'(s,\chi)$, Acta Arith. **190** (2019), no. 2, 127-138.

[6] F. Ge and A. I. Suriajaya, Note on the number of zeros of $\zeta^{(k)}(s)$, to appear in Ramanujan J., available online at https://doi.org/10.1007/s11139-019-00219-z.

[7] N. Levinson and H. L. Montgomery, "Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function", Acta Math. **133** (1974), 49-65.

[8] A. I. Suriajaya, "On the zeros of the k-th derivative of the Riemann zeta function under the Riemann Hypothesis", Funct. Approx. Comment. Math. **53** (2015), no.1, 69-95.

[9] ———, "Two estimates on the distribution of zeros of $L'(s,\chi)$ under first derivative of Dirichlet L-functions under the generalized Riemann hypothesis", J. Théour. Nombres Bordeaux **29** (2017), 471-502.

[10] A. Spieser, "Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion", Math. Ann. **110** (1935) 514-521.

[11] C. Y. Yildirim, "Zeros of derivatives of Dirichlet L-functions", Turk. J. Math. **21** (1997), no. 2, p. 521-534.

[12] 櫻井和磨, "種々のゼータ関数の零点について", 修士論文, 首都大学東京, (2020).

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY,

FUROCHO, CHIKUSAKU, NAGOYA 464-8602, JAPAN
E-mail address: d20002i@math.nagoya-u.ac.jp