Schur-Cohn の判定法と関連する正準系について [1]

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. 序文

1.1. 本稿で述べる結果は, 一年前に執筆した概説 [8] の第 5 節で進行中だと報告した多項式についての研究が, 思いのほか順調に進展したことにより得られたものである. 端的に言えば, それは実係数多項式に関する [5] の結果を, 複素係数多項式へ一般化したものである. このような一般化を行う過程において, 複素係数多項式の根の分布に関する Schur–Cohn の判定法との関係が明らかになったため, [2] の最後で述べた, 古典的な事柄との関係についての疑問にも一つの解答が与えられたと言える. 以下ではこれらの事柄について解説する.

より詳しく言えば, 本稿で扱うのは多項式の根の分布と, 正準系と呼ばれる常微分方程式系の逆問題との関係である. この関係について述べることは, 概説 [8] などで何度も行っているので繰り返しにはなるのだが, 主結果の意味を説明するのに必要な事柄なので, 以下での解説はそこから始めることとする.

2. Hermite–Biehler class

多項式の根の分布と正準系の逆問題は, Hermite–Biehler クラスの整関数を通じて関係する. そこで, まず Hermite–Biehler クラスの整関数について復習する.

Hermite–Biehler クラスとは, 整関数 E であって不等式

$$|E^\sharp(z)| < |E(z)| \quad \text{for all } z \in \mathbb{C}_+, \tag{2.1}$$

を満たすもの全体が成すクラスである. ここで $\mathbb{C}_+ = \{z = u+iv \,|\, u, v \in \mathbb{R},\, v > 0\}$ は上半平面で, 整関数 F に対して $F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$ と表す. 本稿では Hermite–Biehler クラスを $\overline{\mathbb{HB}}$ で表し, その中で実軸上に零点を持たないもの全体を $\mathbb{HB}$ で表す. Hermite–Biehler クラスの関数 E が

$$E^\sharp(z) = E(-z)$$

を満たすとき対称 (symmetric) であると言う. Hermite–Biehler クラスの関数 E の重要な性質は, これから定義される 2 つの整関数

$$A(z) := \frac{1}{2}(E(z) + E^\sharp(z)), \qquad B(z) := \frac{i}{2}(E(z) - E^\sharp(z)) \tag{2.2}$$

が実零点のみを持つ実整関数となることである. 実整関数とは $F = F^\sharp$ を満たす整関数 F のことである. E が $\mathbb{HB}$ に属す, つまり実零点をもたないならば, A と B の零点はみな単純であり, A と B は共通零点を持たないうえ, それらの零点は実軸上で交互に現れる. また, E が対称ならば A は偶関数, B は奇関数である.

記号の乱用であるが, 以下では $\overline{\mathbb{HB}}$ に属すとは限らない関数 E に対しても, A, B を上記のように定義されるものとして扱う.

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者 : 鈴木正俊, 研究課題番号 : 17K05163）の助成を受けています.

3. 自己反転的多項式

次に, 自己反転的 (self-inversive) な多項式と Hermite–Biehler クラスの整関数との関係を述べる.

次数 d の複素係数多項式 $P(T) = \sum_{n=0}^{d} a_n T^n$ が自己反転的であるとは, ある絶対値 1 の複素数 ε が存在して, 等式

$$P(T) = \varepsilon T^d \bar{P}(1/T)$$

が成り立つことを言う. ここで $\bar{P}(T) = \sum_{n=0}^{d} \bar{a}_n T^n$ とした. 多項式 P が自己反転的であるとき, $\varepsilon = \bar{c}/c$ となる c を一つとり, $Q(T) := cP(T)$ とおくと

$$Q(T) = T^d \bar{Q}(1/T)$$

が成り立つ. このような等式を満たす多項式は自己相反的 (self-reciprocal) であると言われる. この辺りの用語は文献毎に定義に若干のブレがあるが, 本稿ではこのような意味で用いる. 多項式の根を考える場合, P と Q で状況は変わらないから, 以下では自己相反な場合 ($\varepsilon = 1$) のみを扱う.

根がみな単位円周上にある多項式は自己反転的であるが, 逆はもちろん成り立たず, 一般には自己反転的な多項式の根は単位円に対して対称 ($z \mapsto 1/z$) であることしか言えない. 例えば Gauss–Lucas の定理と, 後の第 7 節で復習する Schur–Cohn の判定法を用いると, 自己反転的多項式の根がみな単位円周上にあるための必要十分条件が得られる. この他にも根がみな単位円周上にあるための必要十分条件や十分条件が知られているが, 本稿の主題から外れるのでそれらには触れない. 興味がある方は, 例えば [1, §1 Introduction] や, そこで挙げられている参考文献などを見て頂きたい.

次数 d の自己相反多項式 $P(T)$ に対して, 整関数 $\tilde{A}_P(z)$ を

$$\tilde{A}_P(z) := e^{-irdz/2} P(e^{riz}), \quad r = \begin{cases} 1, & d \text{ が偶数の場合}, \\ 2, & d \text{ が奇数の場合}, \end{cases}$$

により定める. このとき, $P(T)$ の根がみな単位円周上にあることと, $\tilde{A}_P(z)$ の零点がみな実であることは同値である. さらに,

$$\tilde{B}_P(z) := -\frac{d}{dz}\tilde{A}_P(z), \qquad \tilde{E}_P(z) := \tilde{A}_P(z) - i\tilde{B}_P(z)$$

などと定めると, $\tilde{E}_P(z)$, $\tilde{A}_P(z)$, $\tilde{B}_P(z)$ はみな指数多項式 (多項式に指数関数を代入したもの) なので整関数であり, P の自己相反性から $\tilde{A}_P(z)$ と $\tilde{B}_P(z)$ は実整関数である.

補題 1. $\tilde{E}_P(z)$, $\tilde{A}_P(z)$, $\tilde{B}_P(z)$ を上記の通りとすると次が成り立つ.

(1) $P(T)$ の根がみな単位円周上にあるためには, $\tilde{E}_P(z)$ が $\overline{\mathbb{HB}}$ に属すことが必要かつ十分である.

(2) $P(T)$ の根がみな単位円周上の単根であるためには, $\tilde{E}_P(z)$ が $\mathbb{HB}$ に属すことが必要かつ十分である.

$P(T)$ が実係数ならば, $(\tilde{E}_P)^\sharp(z) = \tilde{E}_P(-z)$ が簡単な計算で分かるので, $\tilde{E}_P(z) \in \overline{\mathbb{HB}}$ であるとき $\tilde{E}_P(z)$ は対称である.

4. 正準系とその逆問題

前節から転じて, 本節では正準系と Hermite–Biehler クラスとの関係を述べる.

4.1. 正準系の定義. 2 次実対称行列全体を $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ で表す. 区間 $I = [t_0, t_1)$ $(-\infty < t_0 < t_1 \leqslant \infty)$ 上で定義され, $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ に値を持つ関数 H が Hamiltonian であるとは, 次の 3 つの条件が満たされることとする:

(H1) 各点 $t \in I$ で $H(t)$ は半正定値である.
(H2) H はどんな Lebesgue 測度が正の部分集合 $J \subset I$ 上でも恒等的に 0 でない.
(H3) H の各成分は I 上で局所可積分である.

与えられた $H : I \to \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ に対し, $z \in \mathbb{C}$ でパラメータ付けられた微分方程式系

$$-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} A(t,z) \\ B(t,z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H(t) \begin{bmatrix} A(t,z) \\ B(t,z) \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{4.1}$$

を考える. このとき, H が Hamiltonian であるなら, この微分方程式系は I 上の正準系 (canonical system) と呼ばれる. この定義から, 正準系を与えることと Hamiltonian H を与えることは等価であるから「H を与えられた正準系の Hamiltonian とする」などと言ったりもする. 正準系の歴史的背景や関連する事柄などについては, 概説記事 Winkler [10], Woracek [11] や, これらの参考文献を見て頂きたい.

本稿では H が上記の意味で Hamiltonian とは限らない場合にも微分方程式系 (4.1) を考える. そのような場合は (4.1) を [9] に従って I 上の擬正準系 (quasi-canonical system) と呼ぶこととする. 用語の乱用であるし紛らわしいのだが, 説明上の便利のため, 擬正準系の場合も H を「擬正準系の Hamiltonian」などと呼んだりする.

4.2. 順問題. 擬正準系 (4.1) に対して, 区間の左端点での条件, または右端点における極限の条件を課し, それを満たす解 ${}^{\mathrm{t}}[A(t,z),\ B(t,z)]$ を求める問題を順問題 (direct problem) という.

4.3. 逆問題. いま ${}^{\mathrm{t}}[A(t,z), B(t,z)]$ を, Hamiltonian H に付随する $I = [t_0, t_1)$ 上の正準系の解としたとき,

$$J(t; z, w) := \frac{\overline{A(t,z)}B(t,w) - A(t,w)\overline{B(t,z)}}{\pi(w - \bar{z})} \tag{4.2}$$

と定める. 簡単のため $\det H(t) \neq 0$ であるような $t \in I$ の Lebesgue 測度は 0 でないものとして, 各点 $z \in \mathbb{C}_+$ で

$$\lim_{t \to t_1} J(t; z, z) = 0$$

が成り立つことを仮定する. このとき, 各 $t \in I$ に対して,

$$E(t,z) := A(t,z) - iB(t,z)$$

は z の関数として Hermite–Biehler クラス $\overline{\mathbb{HB}}$ に属す. つまり, 正準系から Hermite–Biehler クラスの整関数 (の族) が生ずる. 次の de Branges の結果は, この逆が成り立つことを主張する.

Theorem dB. 各 $E \in \overline{\mathbb{HB}}$ に対して, (有界とは限らない) ある区間 $I = [t_0, t_1)$ 上で定義された Hamiltonian H で次の 2 つの性質を持つものが存在する.

(1) ${}^{\mathrm{t}}[A(t,z), B(t,z)]$ を H に付随する正準系 (4.1) の解であって, 区間の左端点で条件 ${}^{\mathrm{t}}[A(t_0,z), B(t_0,z)] = {}^{\mathrm{t}}[A(z), B(z)]$ を満たすものとする. このとき, 各点 $t \in I$ で $E(t,z) := A(t,z) - iB(t,z)$ は $\overline{\mathbb{HB}}$ に属す.
(2) (1) の ${}^{\mathrm{t}}[A(t,z), B(t,z)]$ に対して $J(t; z, w)$ を (4.2) により定めると, 各点 $z \in \mathbb{C}_+$ で $\lim_{t \to t_1} J(t; z, z) = 0$ が成り立つ.

Theorem dB は正準系の理論において基本的かつ重要な結果である. しかしながら多くの場合, 与えられた E に対応する H が具体的にどのようなものであるかは de Branges の証明からは分からない. 「具体的」の意味をどう捉えるかにもよるが, これは現在でも未解決である. とはいえ, E が多項式ならば H は区分的に

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (0 \leqslant \theta < \pi).$$

という形の定数行列であることが分かるし, 具体的な構成手順も分かる. 一般の場合に H が分からないというのは, E が多項式の場合から極限操作を通して H を作るためである. 逆に言えば, そのような極限の意味でならどんな E についても H は分かるとも言えるが, それは Weierstrass の多項式近似定理があるから有限区間上の実数値連続関数はみな分かったというようなものであろう. E やそれに付随したデータから H を決定する問題を逆問題 (inverse problem) という.

5. 自己相反多項式と正準系の逆問題の関係

補題 1 と Theorem dB によれば, 自己相反多項式 $P(T)$ の根がみな単位円周上にあるなら, 指数多項式 $\tilde{E}_P$ に対応する Hamiltonian H が存在する. ここで次の問いが自然に生ずる:

Question 1. H は $P(T)$ の係数を用いて具体的にどのように表示されるのか?

この問いに解答を与えることの利点として次のようなことが考えられる. H が $P(T)$ の係数によって具体的に書き下せれば, 根がみな単位円周上にあるとは限らない $P(T)$ についても $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$-値の関数 H を与えることができる. $P(T)$ の根がみな単位円周上にあるならば H は各点で半正定値でなくてはならないから, 与えらえれた $P(T)$ から書き下される H の正値性を調べることにより, $P(T)$ の根がみな単位円周上にあるのか否かが判定できることが期待される.

上記のような期待が実係数多項式の場合に実現されることは [5] で示されていたので, それを複素係数多項式にまで一般化できるのが望ましい. しかしどのようにすればそれが可能なのか筆者には長らく分からなかった. 転機となったのは [5] の理論を "連続化" した [6] の一般化が得られたことである. [6] では [5] で扱った行列の線形方程式を, 対称な積分核に関する積分方程式に "連続化" したものを扱っている. これが最近 [7] で Hermitian な積分核に一般化されたので, これを "離散化" することで [5] を複素係数に一般化できるのではないかという期待が持たれた.

こうした経緯で得られたのが第 8 節で述べる本稿の主結果なのだが, 概説 [8] を書いていた時点では, $P(T)$ に対応する H について帰納的な構成法が分かっているだけだった. その後, その方法で次数の小さな場合に H を具体的に計算して観察してみることで, 第 7 節で述べる Schur–Cohn の判定法との関連が見出され, H が主結果のような形で記述されることになった.
こういった過程を振り返ると, 当初の帰納的構成法と, 次数が小さい場合の計算例を見て頂くのも悪くないと思われるので, 以下の流れとしては, それを解説した後に Schur-Cohn の判定法について復習し, 主結果を述べるという順で進める.

6. 帰納的構成法と計算例

実係数自己相反多項式に対して, [5] では Hamiltonian H の構成法が 2 通り与えられていた. このうち片方の帰納的に H を構成する方法は, [7] の結果を眺めながら良く考えると複素係数の場合に一般化できる. この節ではそれを天下り的に述べる.

6.1. d 次の自己相反多項式 $P(T)$ に対して第 3 節で定義された $\tilde{A}_P(z)$, $\tilde{B}_P(z)$ をとり,

$$A_0(z) = \tilde{A}_P(z), \quad B_0(z) = \tilde{B}_P(z)$$

とおく. そして d が偶数のとき, $L = d/2$, $r = 1$ として

$$A_0(z) = \sum_{j=0}^{d/2} a_0(L-rj)\cos((L-rj)z) + \sum_{j=0}^{d/2-1} c_0(L-rj)\sin((L-rj)z),$$
$$B_0(z) = \sum_{j=0}^{d/2-1} b_0(L-rj)\sin((L-rj)z) + \sum_{j=0}^{d/2} d_0(L-rj)\cos((L-rj)z)$$

と表し, d が奇数のときは $L = d$, $r = 2$ として

$$A_0(z) = \sum_{j=0}^{(d-1)/2} a_0(L-rj)\cos((L-rj)z) + \sum_{j=0}^{(d-1)/2-1} c_0(L-rj)\sin((L-rj)z),$$
$$B_0(z) = \sum_{j=0}^{(d-1)/2-1} b_0(L-rj)\sin((L-rj)z) + \sum_{j=0}^{(d-1)/2} d_0(L-rj)\cos((L-rj)z)$$

と表すことにより, 複素数列 $a_0(n)$, $b_0(n)$, $c_0(n)$, $d_0(n)$ を定める. これらが帰納的構成における初期データである (n がわたる範囲は d が奇数のときは奇数のみになる).

次に, 各 $1 \leqslant k \leqslant d$ に対して, $a_k(n)$, $b_k(n)$, $c_k(n)$, $d_k(n)$ を未知数として

$$A_k(t,z) = \sum_{j=0}^{d-k} a_k(L-rj)\cos((L-rj-t)z) + \sum_{j=0}^{d-k} c_k(L-rj)\sin((L-rj-t)z),$$
$$B_k(t,z) = \sum_{j=0}^{d-k} b_k(L-rj)\sin((L-rj-t)z) + \sum_{j=0}^{d-k} d_k(L-rj)\cos((L-rj-t)z)$$

と定める. 各 k で未知数の個数は $4(d-k+1)$ 個あるが, 一つ前の $a_{k-1}(n)$, $b_{k-1}(n)$, $c_{k-}(n)$, $d_{k-1}(n)$ が定まっているとすれば,

$$\begin{gathered} A_k(t_k,z) = A_{k-1}(t_k,z), \quad B_k(t_k,z) = B_{k-1}(t_k,z) \quad \text{if} \quad 2 \leqslant k \leqslant d, \\ A_1(t_1,z) = A_0(z), \quad B_1(t_1,z) = B_0(z) \quad \text{if} \quad k = 1 \end{gathered} \tag{6.1}$$

により $4(d-k+1) - 2(d-k)$ 個の一次方程式が得られる. ここで,

$$t_k = \begin{cases} (k-1)/2, & d\text{ が偶数の場合}, \\ (k-1), & d\text{ が奇数の場合} \end{cases} \quad (1 \leqslant k \leqslant d).$$

とした. さらに, 定数 α_k, β_k, γ_k を含む微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_k(t,z) &= z(\beta_k A_k(t,z) + \gamma_k B_k(t,z)), \\ \frac{d}{dt}B_k(t,z) &= -z(\alpha_k A_k(t,z) + \beta_k B_k(t,z)) \end{aligned} \tag{6.2}$$

を考えると, さらに $2(d-k)$ 個の一次方程式が得られる.

こうして未知数の個数と同じ個数の一次方程式から成る連立方程式が得られ, $\alpha_k\gamma_k - \beta_k^2 \neq 0$ である限り唯一つの解を持つ. 少し注意しておくと, (6.2) から得られる一次方程式は $2(d-k)$ 個以上あるが, (6.1) で得られる方程式系と独立なものは高々$2(d-k)$ 個ということである. ともあれ, こうして一つ前の $a_{k-1}(n)$, $b_{k-1}(n)$, $c_{k-}(n)$, $d_{k-1}(n)$ から $a_k(n)$, $b_k(n)$, $c_k(n)$, $d_k(n)$ が定まるが, 後者には定数 α_k, β_k, γ_k が含まれた状態である. しかしながら, (6.2) からとる $2(d-k)$ 個の方程式を上手に選んでおくと, 少なくとも $a_k(L)$, $b_k(L)$, $c_k(L)$, $d_k(L)$ は α_k, β_k, γ_k を含まないようにできる. すると, (6.2) が成り立つためには, 定数は

$$\alpha_k = \frac{b_k(L)^2 + d_k(L)^2}{a_k(L)b_k(L) - c_k(L)d_k(L)}, \quad \beta_k = -\frac{a_k(L)d_k(L) + b_k(L)c_k(L)}{a_k(L)b_k(L) - c_k(L)d_k(L)},$$
$$\gamma_k = \frac{a_k(L)^2 + c_k(L)^2}{a_k(L)b_k(L) - c_k(L)d_k(L)}$$

でなくてはならない事が分かる. しかも, これらの計算とは関係なく (6.1) から直接に

$$\begin{aligned} a_k(L) &= a_{k-1}(L) + a_{k-1}(R), \quad b_k(L) = b_{k-1}(L) - b_{k-1}(R), \\ c_k(L) &= c_{k-1}(L) - c_{k-1}(R), \quad d_k(L) = d_{k-1}(L) + d_{k-1}(R) \end{aligned} \tag{6.3}$$

$(R := L - r(d-k))$ が分かるので, 結局のところ $a_{k-1}(n)$, $b_{k-1}(n)$, $c_{k-1}(n)$, $d_{k-1}(n)$ から $a_k(n)$, $b_k(n)$, $c_k(n)$, $d_k(n)$ と α_k, β_k, γ_k が定まる.

命題 2. 上記のようにして $a_k(n)$, $b_k(n)$, $c_k(n)$, $d_k(n)$ と α_k, β_k, γ_k を帰納的に定めるとき, 各 $0 \leqslant k \leqslant d$ で $a_k(L)b_k(L) - c_k(L)d_k(L) \neq 0$ を仮定する. このとき, $A(t,z)$, $B(t,z)$, $H_P(t)$ を

$$A(t,z) := A_k(t,z), \quad B(t,z) := B_k(t,z), \quad H_P(t) := \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \gamma_k \end{bmatrix} \quad \textit{if} \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}$$

により定めると, $A(t,z)$ と $B(t,z)$ は $[0, rd/2)$ 上の $H = H_P$ に関する擬正準系 (4.1) の解となり, 初期条件 $A_0(z) = A(0,z)$, $B_0(z) = B(0,z)$ を満たす. しかも $k = d$ のとき, ある実数 a, b, c, d により,

$$\begin{aligned} A_d(t,z) &= a\cos((L-t)z) + c\sin((L-t)z), \\ B_d(t,z) &= d\cos((L-t)z) + b\sin((L-t)z) \end{aligned}$$

と書けることから, 区間の右端点で $\lim_{t\to L} J(t;z,w) = 0$ が成り立つことも分かる.

この方法で自己相反多項式 $P(T)$ に対して擬正準系の Hamiltonian H が計算できるが, 例えば $P(T)$ の根がみな単位円周上の単根ならば, 常に H が $[0, rd/2)$ 全体で定義されるのか (言いかえると, 常に $a_k(L)b_k(L) - c_k(L)d_k(L) \neq 0$ か), などといったことは, このような構成からは非自明である. そのような保証は, 後に述べる Schur–Cohn の判定法と主定理を組み合わせることで得られる.

6.2. 次数 1 の場合. 1 次の自己相反多項式は $P(T) = aT + \bar{a}$ の形なので, $a = a_{\Re} + ia_{\Im}$ ($\Re$, $\Im$ は実部, 虚部の意味) とすると,

$$A_0(z) = 2a_{\Re}\cos z - 2a_{\Im}\sin z, \quad B_0(z) = 2a_{\Im}\cos z + 2a_{\Re}\sin z,$$

$$\begin{aligned} A_1(t,z) &= a_1(1)\cos((1-t)z) + c_1(1)\sin((1-t)z), \\ B_1(t,z) &= d_1(1)\cos((1-t)z) + b_1(1)\sin((1-t)z). \end{aligned}$$

このとき (6.1) と (6.2) から,

$$a_1(1) = 2a_{\Re}, \quad c_1(1) = -2a_{\Im}, \quad d_1(1) = 2a_{\Im}, \quad b_1(1) = 2a_{\Re}.$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1.$$

したがって,

$$\Delta_1 = a_1(1)b_1(1) - c_1(1)d_1(1) = 4\,|a|^2 > 0.$$

1 次の自己相反多項式の根は常に単位円周上の単根だが, これは常に $\Delta_1 > 0$ だから $H_P(t)$ が常に正定値なこと整合する.

6.3. 次数 2 の場合. 2 次の自己相反多項式は $P(T) = aT^2 + bT + \bar{a}$ の形なので, $a = a_{\Re} + ia_{\Im}$, $b = b_{\Re} + ib_{\Im}$ とすると

$$A_0(z) = 2a_{\Re}\cos z + b - 2a_{\Im}\sin z, \quad B_0(z) = 2a_{\Im}\cos z + 0 + 2a_{\Re}\sin z,$$

$$\begin{aligned} A_1(t,z) &= a_1(1)\cos((1-t)z) + a_1(0)\cos((0-t)z) \\ &\qquad + c_1(1)\sin((1-t)z) + c_1(0)\sin((0-t)z), \\ B_1(t,z) &= d_1(1)\cos((1-t)z) + d_1(0)\cos((0-t)z) \\ &\qquad + b_1(1)\sin((1-t)z) + b_1(0)\sin((0-t)z), \\ A_2(t,z) &= a_2(1)\cos((1-t)z) + c_2(1)\sin((1-t)z), \\ B_2(t,z) &= d_2(1)\cos((1-t)z) + b_2(1)\sin((1-t)z). \end{aligned}$$

これらに対して, $k = 1$ のとき, (6.1) と (6.2) から

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 1 & 0 & \beta_1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1(1) \\ a_1(0) \\ c_1(1) \\ c_1(0) \\ d_1(1) \\ d_1(0) \\ b_1(1) \\ b_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{\Re} \\ b \\ -2a_{\Im} \\ 2a_{\Im} \\ 0 \\ 2a_{\Re} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

という一次方程式が得られる. これを (6.3) を用いて解くと,

$$\begin{aligned} &a_1(1) = 2a_{\Re}, \quad a_1(0) = b, \quad c_1(1) = -2a_{\Im}, \quad c_1(0) = 0, \\ &d_1(1) = 2a_{\Im}, \quad d_1(0) = 0, \quad b_1(1) = 2a_{\Re}, \quad b_1(0) = b; \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1.$$

このとき, $\Delta_1 = a_1(1)b_1(1) - c_1(1)d_1(1) = 4\,|a|^2 > 0$.

また $k = 2$ のとき, (6.1) と (6.2) から

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_2(1) \\ c_2(1) \\ d_2(1) \\ b_2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1(1) \\ a_1(0) \\ c_1(1) \\ c_1(0) \\ d_1(1) \\ d_1(0) \\ b_1(1) \\ b_1(0) \end{bmatrix}$$

という一次方程式が得られる. これを解くと,

$$a_2(1) = 2a_{\Re} + b, \quad c_2(1) = -2a_{\Im}, \quad d_2(1) = 2a_{\Im}, \quad b_2(1) = 2a_{\Re} - b.$$

また (6.3) から,

$$\alpha_2 = \frac{|2a-b|^2}{\Delta_2}, \quad \beta_2 = -\frac{\Im((2a+b)\overline{(2a-b)})}{\Delta_2}, \quad \gamma_2 = \frac{|2a+b|^2}{\Delta_2}.$$

ここで

$$\Delta_2 = a_2(1)b_2(1) - c_2(1)d_2(1) = 4\,|a|^2 - b^2.$$

$P(T) = aT^2 + bT + \bar{a}$ の根がみな単位円周上の単根であるためには, $D = b^2 - 4|a|^2 < 0$ が必要かつ十分だが, 後者は $\Delta_2 > 0$ に同値. $\Delta_1 > 0$ は自明なので, $\Delta_2 > 0$ ならば $H_P(t)$ は $[0, rd/2) = [0, 1)$ 上で正定値である.

6.4. Degree 3. 3 次の自己相反多項式は $P(T) = aT^3 + bT^2 + \bar{b}T + \bar{a}$ の形なので, $a = a_{\Re} + ia_{\Im}$, $b = b_{\Re} + ib_{\Im}$ とすると,

$$\begin{aligned}
A_0(z) &= 2a_{\Re}\cos 3z + 2b_{\Re}\cos z - 2a_{\Im}\sin 3z - 2b_{\Im}\sin z,\\
B_0(z) &= 6a_{\Im}\cos 3z + 2b_{\Im}\cos z + 6a_{\Re}\sin 3z + 2b_{\Re}\sin z,\\
A_1(t,z) &= a_1(3)\cos((3-t)z) + a_1(1)\cos((1-t)z) + a_1(-1)\cos((-1-t)z)\\
&\quad + c_1(3)\sin((3-t)z) + c_1(1)\sin((1-t)z) + c_1(-1)\sin((-1-t)z),\\
B_1(t,z) &= d_1(3)\cos((3-t)z) + d_1(1)\cos((1-t)z) + d_1(-1)\cos((-1-t)z)\\
&\quad + b_1(3)\sin((3-t)z) + b_1(1)\sin((1-t)z) + b_1(-1)\sin((-1-t)z),\\
A_2(t,z) &= a_2(3)\cos((3-t)z) + a_2(1)\cos((1-t)z)\\
&\quad + c_2(3)\sin((3-t)z) + c_2(1)\sin((1-t)z),\\
B_2(t,z) &= d_2(3)\cos((3-t)z) + d_2(1)\cos((1-t)z)\\
&\quad + b_2(3)\sin((3-t)z) + b_2(1)\sin((1-t)z),\\
A_3(t,z) &= a_3(3)\cos((3-t)z) + c_3(3)\sin((3-t)z),\\
B_3(t,z) &= d_3(3)\cos((3-t)z) + b_3(3)\sin((3-t)z).
\end{aligned}$$

これらに対して, $k = 1$ のとき, (6.1) と (6.2) から

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1\\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} a_1(3)\\ a_1(1)\\ a_1(-1)\\ c_1(3)\\ c_1(1)\\ c_1(-1)\\ d_1(3)\\ d_1(1)\\ d_1(-1)\\ b_1(3)\\ b_1(1)\\ b_1(-1) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2a_{\Re}\\ 2b_{\Re}\\ -2a_{\Im}\\ -2b_{\Im}\\ 6a_{\Im}\\ 2b_{\Im}\\ 6a_{\Re}\\ 2b_{\Re}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

という一次方程式が得られる. これを (6.3) を用いて解くと,

$$\begin{aligned}
&a_1(3) = 2a_{\Re},\ a_1(1) = \frac{4}{3}b_{\Re},\ a_1(-1) = \frac{2}{3}b_{\Re},\ c_1(3) = -2a_{\Im},\ c_1(1) = -\frac{4}{3}b_{\Im},\ c_1(-1) = \frac{2}{3}b_{\Im},\\
&d_1(3) = 6a_{\Im},\ d_1(1) = 4b_{\Im},\ d_1(-1) = -2b_{\Im},\ b_1(3) = 6a_{\Re},\ b_1(1) = 4b_{\Re},\ b_1(-1) = 2b_{\Re};
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 3, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{1}{3}.$$

このとき, $\Delta_1 = a_1(3)b_1(3) - c_1(3)d_1(3) = 12|a|^2 > 0$.

また $k = 2$ のとき, (6.1) と (6.2) から

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \beta_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_2(3) \\ a_2(1) \\ c_2(3) \\ c_2(1) \\ d_2(3) \\ d_2(1) \\ b_2(3) \\ b_2(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1(3) \\ a_1(1) \\ a_1(-1) \\ c_1(3) \\ c_1(1) \\ c_1(-1) \\ d_1(3) \\ d_1(1) \\ d_1(-1) \\ b_1(3) \\ b_1(1) \\ b_1(-1) \end{bmatrix}$$

という一次方程式が得られる. これを (6.3) を用いて解くと,

$$a_2(3) = \frac{2}{3}(3a_{\Re} + b_{\Re}), \quad a_2(1) = \frac{4}{3}b_{\Re}, \quad c_2(3) = -\frac{2}{3}(3a_{\Im} + b_{\Im}), \quad c_2(1) = \frac{*}{\Delta_2},$$
$$d_2(3) = 2(3a_{\Im} - b_{\Im}), \quad d_2(1) = 4b_{\Im}, \quad b_2(3) = 2(3a_{\Re} - b_{\Re}), \quad b_2(1) = \frac{*}{\Delta_2};$$

$$\alpha_2 = 2^2\frac{|3a-b|^2}{\Delta_2}, \quad \beta_2 = -\frac{2^2}{3}\frac{\Im((3a-b)\overline{(3a+b)})}{\Delta_2}, \quad \gamma_2 = \frac{2^2}{3^2}\frac{|3a+b|^2}{\Delta_2}.$$

ここで $*$ は表示が長くなるので省略した部分であり,

$$\Delta_2 = a_2(3)b_2(3) - c_2(3)d_2(3) = \frac{4}{3}(9|a|^2 - |b|^2).$$

$k = 3$ のときも (6.1), (6.2), (6.3) から $a_3(3), b_3(3), c_3(3), d_3(3), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ が計算されるが, 表示が長くなるのでここでは省略する. この計算から

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_3(3)b_3(3) - c_3(3)d_3(3) \\ &= \frac{4}{9|a|^2 - |b|^2}(27|a|^4 - |b|^4 - 18|a|^2|b|^2 + 4a\bar{b}^3 + 4\bar{a}b^3) \end{aligned}$$

であり, $\alpha_3 = (*)/\Delta_3$, $\beta_3 = (*)/\Delta_3$, $\gamma_3 = (*)/\Delta_3$ という形で, $\begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ の符号は Δ_3 の符号に一致することが分かる.

ここで簡単のため a, b は実数とすると, $P(T)$ の根がみな単位円周上の単根であるためには, $D = (a-b)^2 - 4a^2 = -(3a-b)(a+b) < 0$ が必要かつ十分である. a, b が実数なら,

$$\Delta_2 = \frac{4}{3}\cdot(3a-b)(3a+b), \quad \Delta_3 = 4\cdot\frac{3a-b}{3a+b}\cdot(3a-b)(a+b)$$

なので, 後者は $\Delta_2 > 0$ かつ $\Delta_3 > 0$ に同値である. $\Delta_1 > 0$ は自明なので, $\Delta_2 > 0$ かつ $\Delta_3 > 0$ ならば $H_P(t)$ は $[0, rd/2) = [0, 3)$ 上で正定値である.

7. Schur–Cohn の判定法

d 次の複素係数多項式

$$f(T) = a_d T^d + a_{d-1} T^{d-1} + \cdots + a_1 T + a_0$$

に対して $D_0(f) := 1$ とし, d 個の行列式 $D_1(f), \ldots, D_d(f)$ を

$$D_1(f) := \det \left[\begin{array}{c|c} a_d & \overline{a_0} \\ \hline a_0 & \overline{a_d} \end{array}\right], \quad D_2(f) := \det \left[\begin{array}{cc|cc} a_d & & \overline{a_0} & \\ a_{d-1} & a_d & \overline{a_1} & \overline{a_0} \\ \hline a_0 & a_1 & \overline{a_d} & \overline{a_{d-1}} \\ & a_0 & & \overline{a_d} \end{array}\right],$$

$$D_3(f) := \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_d & & & \overline{a_0} & & \\ a_{d-1} & a_d & & \overline{a_1} & \overline{a_0} & \\ a_{d-2} & a_{d-1} & a_d & \overline{a_2} & \overline{a_1} & \overline{a_0} \\ \hline a_0 & a_1 & a_2 & \overline{a_d} & \overline{a_{d-1}} & \overline{a_{d-2}} \\ & a_0 & a_1 & & \overline{a_d} & \overline{a_{d-1}} \\ & & a_0 & & & \overline{a_d} \end{array}\right], \ldots$$

などと定める. ここで $\overline{a}$ は a の複素共役を表す. Schur–Cohn の判定法は, これらの符号変化と f の根の分布を次のように関連付けるものである.

[Schur (1917, 1918), Cohn (1922)]

d 次の複素係数多項式 $f(T)$ について, $D_n(f)$ を上記のように定めたとき, すべての $1 \leqslant n \leqslant d$ について $D_n(f) \neq 0$ を仮定し, q で有限列 $(D_0(f), D_1(f), \ldots, D_d(f))$ の符号変化の個数を表す. このとき, $f(T)$ は単位円周上に根を持たず, 単位円の外部に重複度を含めてちょうど q 個の根を持つ. 特に, $f(T)$ の根がみな単位円の内部にあるためには, すべての $D_n(f)$ $(1 \leqslant n \leqslant d)$ が正であることが必要かつ十分である.

例 1. Schur–Cohn の判定法の適用例を一つあげておく. 多項式

$$f(x) = 2x^3 - (10+i)x^2 + (12+5i)x - 6i$$

に対して, $D_0(f) = 1$, $D_1(f) = \det \begin{bmatrix} 2 & 6i \\ -6i & 2 \end{bmatrix} = -32$,

$$D_2(f) = \det \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & & 6i & \\ -10-i & 2 & 12-5i & 6i \\ \hline -6i & 12+5i & 2 & -10+i \\ & -6i & & 2 \end{array}\right] = -1800,$$

$$D_3(f) = \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & 6i & & \\ -10-i & 2 & & 12-5i & 6i & \\ 12+5i & -10-i & 2 & -10+i & 12-5i & 6i \\ \hline -6i & 12+5i & -10-i & 2 & -10+i & 12-5i \\ & -6i & 12+5i & & 2 & -10+i \\ & & -6i & & & 2 \end{array}\right] = 187200$$

なので, 有限列 $(D_0(f), D_1(f), D_2(f), D_3(f)) = (1, -32, -1800, 187200)$ の符号変化の個数は 2 個である. したがって, Schur–Cohn の判定法によれば, $f(x)$ は単位円周上に根を持たず, 単位円の外部にちょうど 2 個の根を持つはずである. これが正しいことは因数分解 $f(x) = (2x-i)(x-2)(x-3)$ から確かめられる.

8. 主結果

主結果を述べる準備として, 自己相反多項式と Hermite–Biehler クラスの関係を少し一般化しておく. 与えられた d 次の複素係数多項式

$$f(T) = a_d T^d + a_{d-1} T^{d-1} + \cdots + a_1 T + a_0$$

に対して, 指数多項式

$$E_f(z) := e^{irdz/2} f(e^{-irz}), \quad r = \begin{cases} 1, & d \text{ が偶数の場合}, \\ 2, & d \text{ が奇数の場合}, \end{cases}$$

を考える. 次数 $d = 2n$ の自己相反多項式は $P(T) = \sum_{k=1}^{n} (c_k T^{n+k} + \overline{c_k} T^{n-k}) + c_0 T^n$ と書けるので, 第 3 節の定義より

$$\tilde{E}_P(z) = \sum_{k=1}^{n} \Big((1-k) c_k e^{ikz} + (1+k) \overline{c_k} e^{-ikz} \Big) + c_0.$$

したがって,

$$f_P(T) = \sum_{k=1}^{n} \Big((1-k) c_k T^{n-k} + (1+k) \overline{c_k} T^{n+k} \Big) + c_0 T^n$$

とおけば, $\tilde{E}_P(z) = e^{inz} f_P(e^{-iz}) = E_{f_P}(z)$ である. d が奇数の場合も, ある多項式 f_P について $\tilde{E}_P(z) = E_{f_P}(z)$ であることが同様に示される. つまり, E_f は $\tilde{E}_P$ の一般化になっている. 補題 1 の類似として次が成り立つ.

補題 2. E_f に対して次が成り立つ.

(1) $f(T)$ が単位円の外部に根を持たないことと, $E_f(z) \in \overline{\mathbb{HB}}$ は同値である.
(2) $f(T)$ の根がみな単位円の内部にあることと, $E_f(z) \in \mathbb{HB}$ は同値である.

$\tilde{E}_P$ にせよ E_f にせよ, それが Hermite–Biehler クラスに属すなら, Theorem dB の意味で対応する Hamiltonian H が存在する. それは以下のように具体的に求められる.

8.1. 逆問題についての結果.

第 6 節で計算したような, 自己相反多項式 P から定まる $E_{f_P} = \tilde{E}_P$ に対応する Hamiltonian は, より一般の E_f に対応する擬正準系の Hamiltonian として, 次のような Schur–Cohn の行列式 $D_n(f)$ を含む形で与えられる.

定理 1 ([9], Theorems 1.1)**.** d 次の複素係数多項式 f が与えられたとき, d が偶数なら $r = 1$, d が奇数なら $r = 2$ とする. また, $f(0) \neq 0$ かつ $D_d(f) \neq 0$ を仮定する. このとき, d 個の正定値行列 $\widetilde{H_{f,n}} \in \mathrm{Sym}_2^+(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant n \leqslant d)$ で次を満たすものが存在する:

$$H_f(t) = \frac{1}{D_{n-1}(f) D_n(f)} \widetilde{H_{f,n}}, \quad \frac{r(n-1)}{2} \leqslant t < \frac{rn}{2}, \quad 1 \leqslant n \leqslant d$$

で定義される $H_f(t)$ に対して, 区間 $[0, rd/2)$ 上の擬正準系 (4.1) を考え, 右端点で条件

$$\lim_{t \to rd/2} \begin{bmatrix} A(t,z) \\ B(t,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_f(0) + \overline{E_f(0)}) \\ \frac{i}{2}(E_f(0) - \overline{E_f(0)}) \end{bmatrix}.$$

を満たす解 $u(t,z) = {}^t(A(t,z), B(t,z))$ をとると, 指数多項式 E_f が左端点での特殊化

$$E_f(z) = A(0,z) - iB(0,z)$$

として復元される. また, $H_f(t)$ の定義と Schur–Cohn の判定法から, f の根がみな単位円内部にあることと, $[0, rd/2)$ の各点で $H_f(t)$ が正定値であることは同値である.

さらに, 上記の $\widetilde{H_{f,n}} \in \mathrm{Sym}_2^+(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant n \leqslant d)$ は以下のようにして計算可能である: $f(T) = a_d T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_1 T + a_0$ であるとき, 2 種の上三角行列を

$$\underset{n\times n}{M_n(f)} := \begin{bmatrix} a_d & a_{d-1} & \cdots & a_{d-n+1} \\ & a_d & \cdots & a_{d-n+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_d \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times n}{N_n(f)} := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_0 \end{bmatrix}$$

により定義する. (このとき, Schur–Cohn の判定法の行列式は

$$D_n(f) = \det \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}M_n(f) & \pm {}^{\mathrm{t}}\overline{N_n(f)} \\ \pm N_n(f) & \overline{M_n(f)} \end{bmatrix}$$

で与えられる.) そして各 $1 \leqslant n \leqslant d$ に対し $z_n^{\pm}(1)\ \ldots, z_n^{\pm}(n)$ を未知数とする方程式

$$\begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}M_n(f) & \pm {}^{\mathrm{t}}\overline{N_n(f)} \\ \pm N_n(f) & \overline{M_n(f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n^{\pm}(1) \\ z_n^{\pm}(2) \\ \vdots \\ z_n^{\pm}(n) \\ \overline{z_n^{\pm}(n)} \\ \overline{z_n^{\pm}(n-1)} \\ \vdots \\ \overline{z_n^{\pm}(1)} \end{bmatrix} = \mp \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\overline{a_0} \\ 2a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解を用いて, 行列 $H_{f,n}$ を

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Re(z_n^+(1)) & \Im(z_n^+(1)) \\ -\Im(z_n^-(1)) & \Re(z_n^-(1)) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \Re(z_1^+(1)) & \Im(z_1^+(1)) \\ -\Im(z_1^-(1)) & \Re(z_1^-(1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H_{f,n} \\ &\qquad = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(z_n^+(1)) & \Im(z_n^+(1)) \\ -\Im(z_n^-(1)) & \Re(z_n^-(1)) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \Re(z_1^+(1)) & \Im(z_1^+(1)) \\ -\Im(z_1^-(1)) & \Re(z_1^-(1)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

により定義すると, 求める $\widetilde{H_{f,n}}$ は

$$\widetilde{H_{f,n}} = D_{n-1}(f) D_n(f) H_{f,n}$$

によって定まる.

定理の仮定 $D_d(f) \neq 0$ は f が単位円周上に根を持たないことを意味するので, そのような場合は $E_f \in \overline{\mathbb{HB}}$ であっても Theorem dB の H が得られてないように見える. しかし, 実は定理 1 はそのような場合もカバーしている. f が単位円周上に根を持つ場合は, それらの因子を括り出して $f = f_0 f_1$ とすると, f_1 は単位円周上に根を持たないようにできる. このとき $E_f = E_{f_0} E_{f_1}$ であり, E_{f_0} の零点はみな実である. また, $E_f \in \overline{\mathbb{HB}}$ ならば $E_{f_1} \in \mathbb{HB}$ となる. f_1 に対して定理 1 を適用すると, Hamiltonian H_{f_1} と, これに付随した正準系の解 $A(t,z)$, $B(t,z)$ が得られるが, $E_{f_0}(z)A(t,z)$, $E_{f_0}(z)B(t,z)$ も同じ正準系の解であり, $\lim_{t\to rd/2} J(t,z,w) = 0$ という条件は変わらず, 初期条件だけが $E_{f_0}(z)(A(0,z) - iB(0,z)) = E_{f_0}(z)E_{f_1}(z) = E_f(z)$ に変わる. つまり, $E_f \in \overline{\mathbb{HB}}$ ならば, これに Theorem dB で対応するものはこの H_{f_1} であることが分かる. このように, 定理 1 は単位円周上に根を持つような多項式についても, 擬正準系の Hamiltonian を復元する方法を与えている.

例 2. 定理 1 を例 1 の多項式に適用すると, $H_f(t)$ は次のように計算される:

$$H_f(t) = \begin{cases} H_{f,1} & \text{if } 0 \leqslant t < 1, \\ H_{f,2} & \text{if } 1 \leqslant t < 2, \\ H_{f,3} & \text{if } 2 \leqslant t < 3, \end{cases} \qquad \text{with}$$

$$\begin{aligned} H_{f,1} &= \frac{1}{D_0(f)D_1(f)} \widetilde{H_{f,1}} = \frac{1}{1 \cdot (-32)} \begin{bmatrix} 40 & -24 \\ -24 & 40 \end{bmatrix} < 0, \\ H_{f,2} &= \frac{1}{D_1(f)D_2(f)} \widetilde{H_{f,2}} = \frac{1}{(-32) \cdot (-1800)} \begin{bmatrix} 40256 & 35648 \\ 35648 & 113984 \end{bmatrix} > 0, \\ H_{f,3} &= \frac{1}{D_2(f)D_3(f)} \widetilde{H_{f,3}} = \frac{1}{(-1800) \cdot 187200} \begin{bmatrix} 898617600 & 988300800 \\ 988300800 & 1213286400 \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

これより, $f(T)$ の根の分布に応じた $D_n(f)$ の符号変化にしたがって, $H_f(t)$ の定値性が小区間毎に変化しているのが分かる.

8.2. 順問題についての結果. 指数多項式 $E_f(z)$ に対して定理 1 で得られた $H_f(t)$ は, ある小区間毎に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ に属す定数行列に等しかった. そのような形の H について順問題を解いてみると, それはある多項式 f について逆問題を解いて現れるものになっていることが分かる.

定理 2 ([9], Theorems 1.2–1.3)**.** d 個の行列 $H_1, \ldots, H_d \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ と非零ベクトル $(A, B) \neq (0, 0)$ を任意にとる. また, 有限列 $(H_1, H_2, \ldots, H_d)$ の正定値/負定値の符号変化の個数を q とする. このとき,

$$H(t) := H_n \quad \textit{if} \quad \frac{r(n-1)}{2} \leqslant t < \frac{rn}{2}, \quad 1 \leqslant n \leqslant d,$$

で定義される H に対して区間 $[0, rd/2)$ 上の擬正準系 (4.1) を考え, 右端点で条件

$$\lim_{t \to rd/2} u(t, z) = {}^t(A, B).$$

を満たす解 $u(t, z) = {}^t(A(t, z), B(t, z))$ をとる. このとき, $u(t, z)$ は唯一つ存在しており, $f(e^{-irz}) := e^{-irdz/2}(A(0, z) - iB(0, z))$ によって複素多項式 f が定まる.

もし f が d 次かつ $f(0) \neq 0$ ならば, f は単位円周上に根を持たず, 単位円の外部に重複度を含めて q 個の根を持つ. さらに, f が d 次かつ $f(0) \neq 0$ であるためには, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ としたとき

$$0 \neq (I - iJH_1)(I - iJH_2) \cdots (I - iJH_d) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \notin \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

が成り立つことが必要かつ十分である.

8.3. 多項式と行列の列の対応. 定理 1 と 定理 2 から, 単位円周上に根を持たす, 単位円外部に特定の個数の根を持つ d 次複素多項式と, d 個の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ の行列から成る列の間に全単射が得られる. ただし, 対応を 1 対 1 にするために, $f(1) = 1$ や, $(A, B) = (1, 0)$ といった正規化を行う必要がある:

$$
\left\{ f \in \mathbb{C}[x] \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot \deg f = d \\ \cdot f(0) \neq 0 \\ \cdot D_d(f) \neq 0 \\ \cdot n \text{ roots outside } \mathbb{T} \\ \cdot f(1) = 1 \end{array} \right\}
$$

$$
\text{逆問題} \Big\downarrow \Big\uparrow \text{順問題}
$$

$$
\left\{ (H_1, \dots, H_d) \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot H_1, \dots, H_d \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) \\ \cdot \sharp \text{ of sign changes in } (H_1, \dots, H_d) \text{ is } n \\ \cdot 0 \neq (I - iJH_1)(I - iJH_2) \cdots (I - iJH_d) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \end{array} \right\}
$$

この対応にはいろいろ面白い応用があると期待されるので, それを探すのが今後の課題の一つである. 特に, 講演の際に頂いた質問にもあったように, Lehmer の Mahler 測度問題に応用できると嬉しいのだが, 残念ながら現時点での進展はない.

References

[1] M. N. Lalín, C. J. Smyth, Unimodularity of zeros of self-inversive polynomials, *Acta Math. Hungar.* **138** (2013), no. 1–2, 85–101.

[2] M. Suzuki, 自己相反多項式の零点と微分方程式, 数理研講究録 No.1874 解析数論–近似と漸近的手法を通して見た数論 (2014), 125–134.

[3] M. Suzuki, An inverse problem for a class of canonical systems, 解析的整数論–超越関数の数論的性質とその応用, No.1898 (2014), 140–145.

[4] M. Suzuki, Canonical systems arising from Dirichlet polynomials, RIMS 研究集会 解析的整数論の諸問題と展望 (2016):
`http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/RIMS_2016_11.pdf`

[5] M. Suzuki, An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials, *J. Anal. Math.* **136** (2018), no. 1, 273–340.

[6] M. Suzuki, An inverse problem for a class of canonical systems having Hamiltonians of determinant one, *J. Funct. Anal.* **279** (2020), no. 12, 108699.

[7] M. Suzuki, Chains of reproducing kernel Hilbert spaces generated by unimodular functions, `https://arxiv.org/abs/2012.11121`.

[8] M. Suzuki, Canonical systems arising from L-functions, 解析的整数論の展望と諸問題, No.2196 (2021), 188–199.

[9] M. Suzuki, Interpretation of the Schur-Cohn test in terms of canonical systems, `https://arxiv.org/abs/2106.04061`.

[10] H. Winkler, Two-dimensional Hamiltonian systems, *Operator Theory*, D. Alpay (eds.), *Springer, Basel*, 2015, 525–547.

[11] H. Woracek, De Branges spaces and growth aspects, *Operator Theory*, D. Alpay (eds.), *Springer, Basel*, 2015, 489–523.