ホロノミック級数と直交多項式

日本大学　川島 誠

Makoto Kawashima

Department of Industrial Engineering, Nihon University

概 要

直交多項式系として有名な Legendre 多項式は対数関数の Padé 近似と見做すことができる. 本小論ではホロノミック級数の Padé 近似として直交多項式系を得るための考察を与える. この考察により古典的によく知られている Jacobi 多項式系, Chebyshev 多項式系, Hermite 多項式系などの自然な拡張が得られる. この応用としてあるガウスの超幾何関数族の特殊値の線形独立性を示す.

1　導入

この小論では，ホロノミック級数に付随する直交多項式系 (Padé 近似) の明示的構成とその数論的な応用について述べる. 結果としては未だ完結したものではないので，進行中の研究に関する中間報告とご理解頂きたい.

1782 年に A. M. Legendre は, 今日では Legendre 多項式と呼ばれている直交多項式系を発見した. これらの多項式は豊かな数学的構造を持ち, 多くの応用が知られている. 1816 年に, O. Olinde Rodligues は Legendre 多項式の簡略的な表示を見つけた. この表示は”Rodligues の公式” と呼ばれている. Rodligues の直交多項式に関する仕事の後, 多くの数学者が直交多項式に関する研究を行ってきた. 直交多項式については G. Szegö の本 [23] を, Rodligues の公式の歴史については R. Askey[3] を参照せよ.

1890 年代の Padé による先駆的な仕事 [15, 16] において, Padé 近似と呼ばれる級数の有理関数近似が考察された. Padé 近似は直交多項式系との関係が深く, 様々な Diophantus 問題, 例えば Diophantus 方程式の整数解の決定や級数の値の無理数性や超越性を示すための主要な道具である.

例えば Legendre 多項式は対数関数の Padé 近似であり, Legendre 多項式を用いて対数関数の値の無理数性が K. Alladi, M. L. Robinson[1] において調べられている. この後, Legendre 多項式やその類似を用いた対数関数やその一般化である多重対数関数の Padé 近似の明示的構成とその Diophantus 問題への応用が数多く調べられている (*confer* [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 18, 13, 24]). ここで得られた Padé 近似はいずれも Rodligues の公式の類似を用いて構成されていることに注意する.

Padé 近似の Diophantus 問題への応用を考えるためには Padé 近似の構成を行い, 性質を解析する必要がある. Padé 近似の構成方法として, 鳩ノ巣原理を用いた所謂 Siegel の補題を用いるものと, 関数の性質を考慮して明示的に構成するものがある. 前者は広いクラスの関数族に対して適用できるが, 鳩ノ巣原理を用いた存在定理としての側面から, 一般には弱い結果しかもたらさない. 後者は明示的な構成から前者の方法よ

りも強力な結果を与えるが, 実際に Padé 近似が明示的に構成できる関数族はあまり知られていない. この視点からより多くの関数族に対して Padé 近似の明示的構成を行いたい.

上記の Legendre 多項式やその類似に関する結果で与えられた Padé 近似をはじめ, 明示的に構成された直交多項式系に”Rodligues の公式” があるものが少なくない. 筆者は「直交多項式系に対して”Rodligues の公式” が成り立つ理由は何か?」, また「どのような直交多項式系に対して”Rodligues の公式” があるのか?」という疑問を持った. 今回はこの問題に対して, [2, 19, 20] に基づき, Rodligues の公式の一般化とその応用を行うひとつの方法を提案したい.

2 Padé 近似

以下言及しない限り K は標数 0 の体とする. 級数の order 写像を

$$\mathrm{ord}_\infty : K((1/z)) \longrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\};\quad \sum_k \frac{f_k}{z^k} \mapsto \min\{k\in\mathbb{Z} \mid f_k \neq 0\}$$

と定義する. はじめに級数族の Padé 近似を紹介する.

補題 2.1. $\boldsymbol{f} := (f_1(z),\dots,f_m(z)) \in 1/zK[[1/z]]^m$ とする. $\boldsymbol{n} := (n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m$ に対して $N := \sum_{j=1}^{m} n_j$ とおく. N 以上の任意の自然数 M に対して次の条件を満たす多項式の族 $(P(z),Q_1(z),\dots,Q_m(z)) \in K[z]^{m+1}$ が存在する.

(i) $P(z)\neq 0$

(ii) $\deg P(z) = M$

(iii) 任意の $1\le j\le m$ に対して $\mathrm{ord}_\infty(P(z)f_j(z)-Q_j(z)) \ge n_j+1$

補題 2.1 の証明は略する. 補題 2.1 の条件を満たす多項式族 $(P(z),Q_1(z),\dots,Q_m(z))$ を級数族 $\boldsymbol{f}$ の重さ $\boldsymbol{n}$ 次数 M の Padé 型近似 (Padé approximants) と呼ぶ. また級数族 $(P(z)f_j(z)-Q_j(z))_{1\le j\le m}$ も $\boldsymbol{f}$ の重さ $\boldsymbol{n}$ 次数 M の Padé 型近似 (Padé approximantion) と呼ぶ.

注意 2.2. 補題 2.1 は Padé 型近似の存在定理であり, 一般に, Padé 型近似を明示的に求めることは難しい. 級数族 $\boldsymbol{f}$ の特殊値の無理数性や線形独立性といった数論的応用を与えるためには Padé 型近似を明示的に構成することが重要になる場合も多い.

次に Padé 型近似の直交性についてみる. 級数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k/z^{k+1}$ に対して, K 線形写像 φ_f を

$$\varphi_f : K[t] \longrightarrow K;\quad t^k \mapsto f_k$$

と定義する. 記号の濫用であるが φ_f の拡張 $\varphi_f\otimes_K K[t][[1/z]]$ も φ_f と記述する. このとき

$$f(z) = \varphi_f\left(\frac{1}{z-t}\right) \tag{1}$$

が成り立つ.

補題 2.3. $(f_1(z),\dots,f_m(z))\in 1/zK[[1/z]]^m$ とする．$\boldsymbol{n}:=(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m$ に対して $N:=\sum_{j=1}^{m}n_j$ とおく．M を N 以上の自然数とする．$P(z)\in K[z]$ を 0 でない多項式で, $\deg P(z)=M$ を満たすとする．$1\le j\le m$ を満たす自然数 j に対して

$$Q_j(z)=\varphi_{f_j}\left(\frac{P(z)-P(t)}{z-t}\right)\in K[z]$$

とおく．このとき次は同値である．

(i) $(P(z),Q_1(z),\dots,Q_m(z))\in K[z]^{m+1}$ は $(f_1(z),\dots,f_m(z))$ の重さ $\boldsymbol{n}$ 次数 M の *Padé* 型近似である．

(ii) $1\le j\le m$ を満たす自然数 j と, $0\le k\le n_j-1$ を満たす非負整数 k に対して $t^kP(t)\in\ker\varphi_{f_j}$ が成り立つ．

証明. 各 $1\le j\le m$ に対して $\mathfrak{R}_j(z)=P(z)f_j(z)-Q_j(z)$ とおく．定義より, $(P(z),Q_1(z),\dots,Q_m(z))$ が重さ $\boldsymbol{n}$ 次数 M の Padé 型近似であることと $\mathrm{ord}_\infty\mathfrak{R}_j\ge n_j+1$ $(1\le j\le m)$ が同値であることに注意する．等式 (1) と多項式 $Q_j(z)$ の定義より

$$\mathfrak{R}_j(z)=\varphi_f\left(\frac{P(t)}{z-t}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_f(t^kP(t))}{z^{k+1}} \tag{2}$$

と表せる．ここで 2 つ目の等式は級数展開 $1/(z-t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k/z^{k+1}$ を用いた．等式 (2) より

$$\mathrm{ord}_\infty\mathfrak{R}_j\ge n_j+1\Leftrightarrow t^kP(t)\in\ker\varphi_{f_j}\quad(1\le j\le m,0\le k\le n_j-1)$$

が成り立つため主張が示された．□

注意 2.4. K 線形写像 φ_f から定まる双線形形式 $\langle\,,\rangle_f$ を

$$\langle\,,\rangle_f:K[t]\times K[t]\longrightarrow K;\quad(A(t),B(t))\mapsto\varphi_f(A(t)B(t))$$

と定義する．補題 2.3 の条件 (ii) は,

$$\langle t^k,P(t)\rangle_{f_j}=0\quad(1\le j\le m,0\le k\le n_j-1)$$

と書くことができる．これが多項式 $P(t)$ の満たす直交性である．

級数 $f(z)\in 1/zK[[1/z]]$ に対して $\ker\varphi_f$ を考察することで級数族の Padé 型近似を構成する手がかりを得たい．以下では $f(z)$ がホロノミック級数の場合に $\ker\varphi_f$ を考察する．

3　ホロノミック級数の Padé 型近似

z,t を変数とする．この小節では微分作用素, $\frac{d}{dz},\frac{d}{dt}$ をそれぞれ ∂_z,∂_t と書くことにする．以下では, 微分作用素 $D\in K(z)[\partial_z]$ のローラン級数 $f(z)\in K((1/z))$ への作用を $D\cdot f(z)$ と書くことにする．級数 $f(z)\in K[[1/z]]$ がホロノミック級数であるとは, 0 でない微分作用素 $D\in K[z,\partial_z]$ で, $D\cdot f(z)=0$ を満たすものが存在するときをいう．この節ではホロノミック級数族の Padé 型近似を構成するための idea とその idea を用いた明示的な Padé 型近似を構成について述べる．

3.1 Idea

この小節ではホロノミック級数 $f(z) \in 1/zK[[1/z]]$ にたいして $\ker \varphi_f$ を調べる.

$D := \sum_{i=0}^{n} a_i(z)\partial_z^n \in K[z, \partial_z]$ に対して $a_n(z) \neq 0$ とする．このとき n を D の order，$\max_{0 \leq i \leq n} \deg a_i(z)$ を D の次数と呼ぶ．D に対して $D^* := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_t^i a_i(t) \in K[t, \partial_t]$ とおく．$D_1, D_2 \in K(z)[\partial_z]$ に対して $(D_1 D_2)^* = D_2^* D_1^*$ が成り立つことに注意する.

補題 3.1. $D \in K[z, \partial_z]$ とする．このとき 2 変数多項式, $P(t, z) \in K[t, z]$ で,

$$D \cdot \frac{1}{z-t} = P(t, z) + D^* \cdot \frac{1}{z-t}$$

を満たすものが存在する.

証明. n, m を非負整数とする．$D = z^m \partial_z^n$ に対して主張を示せば十分である．このとき等式

$$D \cdot \frac{1}{z-t} = z^m \partial_z^n \cdot \frac{1}{z-t} = (-1)^n \frac{n! z^m}{(z-t)^{n+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{t^k}{z^{n+1+k-m}}$$

が得られる. 2 変数多項式, $P(t, z) \in K[t, z]$ を

$$P(t,z) = \begin{cases} (-1)^n \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \\ n+1+k-m \leq 0}} \frac{(n+k)!}{k!} t^k z^{m-n-1-k} & (m > n) \\ 0 & (m \leq n) \end{cases}$$

と定義する. 定義から, 等式

$$\begin{aligned} D \cdot \frac{1}{z-t} - P(t,z) &= (-1)^n \sum_{k \geq m-n}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \frac{t^k}{z^{n+1+k-m}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (m+k-n+1) \cdots (m+k) \frac{t^{m+k-n}}{z^{k+1}} \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ. 一方で, $D^* = (-1)^n \partial_t^n t^m$ であり, 等式

$$\begin{aligned} D^* \cdot \frac{1}{z-t} = (-1)^n \partial_t^n \cdot \frac{t^m}{z-t} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \partial_t^n \cdot \frac{t^{m+k}}{z^{k+1}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (m+k-n+1) \cdots (m+k) \frac{t^{m+k-n}}{z^{k+1}} \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる. (3), (4) から, $D \cdot 1/(z-t) - P(t,z) = D^* \cdot 1/(z-t)$ が示された. □

命題 3.2. $f(z) \in 1/zK[[1/z]]$, $D \in K[z, \partial_z] \setminus \{0\}$ とする．このとき次は同値.

(i) $D \cdot f(z) \in K[z]$ が成り立つ.

(ii) $D^* \cdot K[t] \subseteq \ker \varphi_f$ が成り立つ.

証明. 命題 3.2 の主張にある微分作用素 $D \in K[z,\partial_z]$ に対して補題 3.1 より, ある 2 変数多項式 $P(t,z) \in K[t,z]$ で, 等式

$$\begin{aligned} D \cdot f(z) &= \varphi_f(D \cdot 1/(z-t)) = \varphi_f(P(t,z) + D^* \cdot 1/(z-t)) \\ &= \varphi_f(P(t,z)) + \varphi_f(D^* \cdot 1/(z-t)) \\ &= \varphi_f(P(t,z)) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_f(D^* \cdot t^k)}{z^{k+1}} \end{aligned} \tag{5}$$

を満たすものが存在する. $\varphi_f(P(t,z)) \in K[z]$ より, (5) から,

$$D \cdot f(z) \in K[z] \Leftrightarrow \text{任意の非負整数 } k \text{ に対して} \varphi_f(D^* \cdot t^k) = 0 \Leftrightarrow D^* \cdot K[t] \subset \ker \varphi_f$$

が成り立つ. これより主張が示された. □

3.2 Padé 型近似の構成

この小節では Legendre 多項式に対する Rodligues の公式の一般化として級数族の Padé 型近似を構成したい. はじめに, 以下で Padé 型近似の明示的構成を行う対象となる級数を与える.

補題 3.3. $a(z), b(z) \in K[z]$ に対して, $\deg a = u, \deg b = v$ とし, $w = \max(u-2, v-1)$ とおく. さらに

$$D := -a(z)\partial_z + b(z) \in K[z,\partial_z], \quad a(z) = \sum_{i=0}^{u} a_i z^i, \quad b(z) = \sum_{j=0}^{v} b_j z^j$$

とおく. $w \geq 0$ のとき, K 上線形独立な級数 $f_0(z), \dots, f_w(z) \in 1/zK[[1/z]]$ で

$$D \cdot f_l(z) \in K[z] \quad (0 \leq l \leq w)$$

を満たすものが存在する.

補題 3.3 は, $f_l(z)$ を級数表示し f_l の係数が $D \cdot f_l \in K[z]$ を満たすための条件を見ることで簡単に示せるため証明は略する.

次に Rodligues の公式を一般化するために, A. I. Apetekarev, A. Branquinho, W. Van Assche によって [2] で定義された重み付き Rodligues 作用素を思い出す.

定義 3.4. (*confer* [2, (2.5)]) $l \in \mathbb{N}$, $a_1(z), \dots, a_l(z) \in K[z] \setminus \{0\}$, $b(z) \in K[z]$ とする. $a(z) = a_1(z) \dots a_l(z)$, $D = -a(z)\partial_z + b(z)$ とおく. $n \in \mathbb{N}$ と重み $\vec{r} := (r_1, \dots, r_l) \in \mathbb{Z}^l$ $(r_i \geq 0)$, に対して D に付随する重み付き Rodligues 作用素を

$$R_{D,n,\vec{r}} := \frac{1}{n!}\left(\partial_z + \frac{b(z)}{a(z)}\right)^n a(z)^n \prod_{v=1}^{l} a_v(z)^{-r_v} \in K(z)[\partial_z]$$

と定義する. $\vec{r} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^l$ のとき, $R_{D,n,\vec{r}} = R_{D,n}$ と記述し, D に付随する n 次 Rodligues 作用素と呼ぶ.

次に補題 3.3 で与えられた級数族の Padé 型近似を重み付き Rodligues 作用素を用いて構成したい．記号を準備する．

$l, d \in \mathbb{N}$, $(a_1(z), \dots, a_l(z)) \in (K[z] \setminus \{0\})^l$ and $(b_1(z), \dots, b_d(z)) \in K[z]^d$ とする．$a(z) = a_1(z) \cdots a_l(z)$, $D_j = -a(z)\partial_z + b_j(z) \in K[z, \partial_z]$, $w_j = \max(\deg a - 2, \deg b_j - 1)$ とおく．$w_j \geq 0$ $(1 \leq j \leq d)$ を仮定する．級数 $f_{j,0}(z), \dots, f_{j,w_j}(z) \in 1/zK[[1/z]]$ が, K 上線形独立かつ

$$D_j \cdot f_{j,u_j}(z) \in K[z] \quad (0 \leq u_j \leq w_j)$$

を満たすとする (補題 3.3 から存在することに注意)．$(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ と $\vec{r}_j := (r_{j,1}, \dots, r_{j,l})$ $(1 \leq j \leq d)$ に対して, D_j に付随する重み付き Rodligues 作用素 $R_{D_j, n_j, \vec{r}_j}$ を R_{j,n_j} とおく．

これより $(f_{j,u_j}(z))_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq u_j \leq w_j}}$ の Padé 型近似の構成を行う． 次の定理は Apetekarev, Branquinho, Van Assche によって与えられた Padé 型近似 [2, Theorem 1] の一般化である．

定理 3.5. 重み付き *Rodligues* 作用素が可換性

$$R_{j_1, n_{j_1}} R_{j_2, n_{j_2}} = R_{j_2, n_{j_2}} R_{j_1, n_{j_1}} \quad (1 \leq j_1, j_2 \leq d) \tag{6}$$

を満たすとする．多項式 $F(z)$ を $K[z]$ のイデアル $\left(\left[\prod_{v=1}^{l} a_v(z)^{\sum_{j=1}^{d} r_{j,v}}\right]\right)$ の元とし, 多項式族を

$$P(z) = \prod_{j=1}^{d} R_{j,n_j} \cdot F(z), \ Q_{j,u_j}(z) = \varphi_{f_{j,u_j}}\left(\frac{P(z) - P(t)}{z - t}\right) \quad (1 \leq j \leq d, \ 0 \leq u_j \leq w_j)$$

と定義する． $P(z) \neq 0$ とする． このとき, $\boldsymbol{n}_j = (n_j, \dots, n_j) \in \mathbb{N}^{w_j+1}$ $(1 \leq j \leq d)$ に対し, 多項式族 $(P(z), Q_{j,u_j}(z))_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq u_j \leq w_j}}$ は $(f_{j,u_j}(z))_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq u_j \leq w_j}}$ の重さ $(\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_m) \in \mathbb{N}^{\sum_{j=1}^{d}(w_j+1)}$ の *Padé* 型近似である．

定理 3.5 の例を 5 節で紹介する．

注意 3.6. 定理 3.5 で仮定されている可換性 (6) を満たす微分作用素の族はあまり知られていないと思われる．ここでは筆者が見つけた可換性の十分条件をひとつ紹介する．

補題 3.7. 多項式 $a_1(z), a_2(z), b_1(z), b_2(z) \in K[z]$ が $a_1(z)a_2(z) \neq 0$ を満たすとする． 非負整数 n と $j = 1, 2$ に対して $D_j := -a_1(z)a_2(z)\partial_z + b_j(z)$ に付随する一般化 *Rodigues* 作用素を

$$R_{j,n} = \frac{1}{n!}\left(\partial_z + \frac{b_j(z)}{a_1(z)a_2(z)}\right)^n a_1(z)^n \in K(z)[\partial_z]$$

とおく．$\deg a_1 \leq 1$ かつ $(b_1(z) - b_2(z))/a_2(z) \in K$ が成り立つとき, 自然数 n_1, n_2 に対して

$$R_{1,n_1} R_{2,n_2} = R_{2,n_2} R_{1,n_1}$$

が成り立つ．

3.3 Padé 型近似に付随する行列式の計算

定理 3.5 に現れる級数 $f_{j,u_j}(z)$ に対して, Padé 型近似を利用して, 値の無理数性や線形独立性を与えるために Padé 型近似の付随する行列の行列式の非零性を示す方法がある (*confer* C. L. Siegel [22])．ここでは, 以下の特別な場合に Padé 型近似に付随する行列を与え, その行列式の計算を行う．

$l=2$, d を正整数, $a_1(z),a_2(z),b_1(z),\dots,b_d(z)\in K[z]$ とする. $a(z)=a_1(z)a_2(z)$, $w_j=\max\{\deg a-2,\deg b_j-1\}$, $W=w_1+\cdots+w_d+d$ とおく. 以下 $w_j\ge 0$, $\deg a_1\le 1$,

$$\frac{b_{j_1}(z)-b_{j_2}(z)}{a_2(z)}\in K\setminus\{0\}\quad(1\le j_1<j_2\le d)$$

を仮定する. $\gamma_{j_1,j_2}=(b_{j_1}(z)-b_{j_2}(z))/a_2(z)$ とおく.

微分作用素 $D_j=-a(z)\partial_z+b_j(z)\in K[z,\partial_z]$ に対して, 級数 $f_{j,0}(z),\dots,f_{j,w_j}(z)\in 1/zK[[1/z]]$ を K 上線形独立かつ

$$D_j\cdot f_{j,u_j}(z)\in K[z]\quad(1\le j\le d,\ \ 0\le u_j\le w_j)$$

を満たすものとする. 簡単のため, $\varphi_{j,u_j}:=\varphi_{f_{j,u_j}}$ とおく.

非負整数 n に対して, D に付随する一般化 Rodligeus 作用素を

$$R_{j,n}=\frac{1}{n!}\left(\partial_z+\frac{b_j(z)}{a(z)}\right)^n a_1(z)^n\quad(1\le j\le d)$$

とおく. 補題 3.7 から微分作用素 $R_{j,n}$ は可換性

$$R_{j_1,n}R_{j_2,n}=R_{j_2,n}R_{j_1,n}\quad(1\le j_1,j_2\le d)$$

を満たすことに注意する. 整数 $0\le h\le W$ に対して, 多項式族を

$$\begin{aligned}P_{n,h}(z)=P_h(z)&:=\prod_{j=1}^d R_{j,n}\cdot[z^h a_2(z)^{dn}],\\ Q_{n,j,u_j,h}(z)=Q_{j,u_j,h}(z)&=\varphi_{j,u_j}\left(\frac{P_h(z)-P_h(t)}{z-t}\right)\quad(1\le j\le d,\ 0\le u_j\le w_j),\end{aligned}$$

とおく. $P_h(z)\neq 0$ が成り立つと仮定する. このとき定理 3.5 から多項式族 $(P_h,Q_{j,u_j,h})_{\substack{1\le j\le d\\ 1\le u_j\le w_j}}$ は $(f_{j,u_j})_{\substack{1\le j\le d\\ 0\le u_j\le w_j}}$ の重さ $(n,\dots,n)\in\mathbb{N}^W$ の Padé 型近似である.

非負整数 n に対して上記の Padé 型近似に付随する $(W+1)\times(W+1)$ 行列の行列式を

$$\Delta_n(z)=\Delta(z)=\det\begin{pmatrix}P_0(z)&P_1(z)&\dots&P_W(z)\\ Q_{1,0,0}(z)&Q_{1,0,1}(z)&\dots&Q_{1,0,W}(z)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{1,w_1,0}(z)&Q_{1,w_1,1}(z)&\dots&Q_{1,w_1,W}(z)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{d,0,0}(z)&Q_{d,0,1}(z)&\dots&Q_{d,0,W}(z)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{d,w_d,0}(z)&Q_{d,w_d,1}(z)&\dots&Q_{d,w_d,W}(z)\end{pmatrix}$$

とおく. さらに $W\times W$ 行列の行列式を

$$\Theta_n=\Theta=\det\begin{pmatrix}\varphi_{1,0}(a_1(t)^na_2(t)^{dn})&\varphi_{1,0}(ta_1(t)^na_2(t)^{dn})&\dots&\varphi_{1,0}(t^{W-1}a_1(t)^na_2(t)^{dn})\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{1,w_1}(a_1(t)^na_2(t)^{dn})&\varphi_{1,w_1}(ta_1(t)^na_2(t)^{dn})&\dots&\varphi_{1,w_1}(t^{W-1}a_1(t)^na_2(t)^{dn})\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{d,0}(a_1(t)^na_2(t)^{dn})&\varphi_{d,0}(ta_1(t)^na_2(t)^{dn})&\dots&\varphi_{d,0}(t^{W-1}a_1(t)^na_2(t)^{dn})\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{d,w_d}(a_1(t)^na_2(t)^{dn})&\varphi_{d,w_d}(ta_1(t)^na_2(t)^{dn})&\dots&\varphi_{d,w_d}(t^{W-1}a_1(t)^na_2(t)^{dn})\end{pmatrix}$$

とおく. このとき次が成り立つ.

命題 3.8.

$$\Delta(z)=\left(\frac{(-1)^{(n+1)}}{(n!)^{d-1}}\right)^{W}\cdot\frac{1}{[(n+1)W]!}\partial_z^{(n+1)W}\cdot P_W(z)\cdot\prod_{j=1}^{d}\left[\prod_{\substack{1\le j'\le d\\ j'\ne j}}\prod_{k=1}^{n}(\gamma_{j',j}-k\varepsilon_{a_1})\right]\cdot\Theta\in K.$$

ここで ε_{a_1} は, $\varepsilon_{a_1}=1$ $(\deg a_1=1)$, $\varepsilon_{a_1}=0$ $(\deg a_1=0)$ で定義される.

3.4 例

この節では 4 節の設定において, 定理 3.5 と命題 3.8 の例を与える. 有理数 x と非負整数 k に対して Pochhammer 記号を $(x)_0=1$, $(x)_k=x(x+1)\cdots(x+k-1)$ とおく. p,q を非負整数, 負の整数ではない有理数 $a_i,b_j\in\mathbb{Q}$ $(1\le i\le p, 1\le j\le q)$ に対して一般超幾何関数を

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\;\middle|\;\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{1}{k!\cdot z^k}\quad,$$

とおく. 以下 n は非負整数とする.

はじめに $d=1$ の例を与える. この場合 $a_1(z)=1$ とする. $d=1$ なので, 微分作用素の可換性 (6) は考察する必要がないことに注意する.

例 3.9. u を 2 以上の整数とし, 微分作用素 $D=-(z^u-1)\partial_z-z^{u-1}\in K[z,\partial_z]$ とおく. このとき級数

$$f_l(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+l}{u}\right)_k}{\left(\frac{u+l}{u}\right)_k}\frac{1}{z^{uk+l+1}}=\frac{1}{z^{l+1}}{}_2F_1\left(\frac{1+l}{u},1,\frac{u+l}{u}\;\middle|\;\frac{1}{z^u}\right)\quad(0\le l\le u-2)$$

は K 上線形独立であり, $D\cdot f_l(z)\in K[z]$ をみたす. $f_0(z)=(z^u-1)^{-1/u}$ であることに注意する. K 線形写像 φ_{f_l} を φ_l とおく. $0\le h\le u-1$ を満たす整数 h に対して

$$P_{n,h}(z)=P_h(z)=\frac{1}{n!}\left(\partial_z-\frac{z^{u-1}}{z^u-1}\right)^n(z^u-1)^n\cdot z^h$$

$$Q_{n,l,h}(z)=Q_{l,h}(z)=\varphi_l\left(\frac{P_h(z)-P_h(t)}{z-t}\right)\quad(0\le l\le u-2)$$

とおく. $u=2, h=0$ のとき $P_{n,0}(z)$ は Chebyshev 多項式である. 定理 3.5 から $(P_h,Q_{0,h},\dots,Q_{u-2,h})$ は $(f_0,\dots,f_{u-2})$ の重さ $\boldsymbol{n}=(n,\dots,n)$ の Padé 型近似である. 行列式

$$\Delta_n(z)=\det\begin{pmatrix}P_0(z)&\cdots&P_{u-1}(z)\\ Q_{0,0}(z)&\cdots&Q_{0,u-1}(z)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{u-2,0}(z)&\cdots&Q_{u-2,u-1}(z)\end{pmatrix}$$

は $n\not\equiv 0 \mod u$ のとき $\Delta_n(z)=0$ であり, 整数 N を用いて $n=uN$ と書けるときは

$$\Delta_{uN}(z)=(-1)^{u-1}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{uN}[(uN+1)u-1-k]}{(uN)!}\cdot\prod_{l=0}^{u-2}\frac{\left(\frac{u-1}{u}\right)_{uN}}{\left(\frac{u+l}{u}\right)_{uN}}\in K\setminus\{0\}$$

が成り立つ.

以下 $d \geq 2$ とする.

例 3.10. $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in K$ を -1 以下の整数でないとし,

$$\gamma_{j_2} - \gamma_{j_1} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \leq j_1 < j_2 \leq d)$$

を満たすとする. 微分作用素 $D_j = -z^2\partial_z + \gamma_j z - 1$ に対して級数

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2+\gamma_j)_k} \frac{1}{z^{k+1}} = \frac{1}{z} \cdot {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ 2+\gamma_j \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{z}\right)$$

は $D_j \cdot f_j(z) \in K$ を満たす. K 線形写像 φ_{f_j} を φ_j とおく. D_j に付随する一般化 Rodligeus 作用素

$$R_{j,n} = \frac{1}{n!}\left(\partial_z + \frac{\gamma_j z - 1}{z^2}\right)^n z^n \quad (1 \leq j \leq d)$$

は, 補題 3.7 より

$$R_{j_1,n_1}R_{j_2,n_2} = R_{j_2,n_2}R_{j_1,n_1} \quad (1 \leq j_1, j_2 \leq d, n_{j_1}, n_{j_2} \in \mathbb{N})$$

を満たす. $0 \leq h \leq d$ を満たす整数に対して, 多項式族を

$$P_{n,h}(z) = P_h(z) = \prod_{j=1}^{d} R_{j,n} \cdot z^{dn+h}, \quad Q_{n,j}(z) = Q_j(z) = \varphi_j\left(\frac{P_h(z) - P_h(t)}{z-t}\right) \quad (1 \leq j \leq d)$$

と定義する. このとき定理 3.5 より $(P_h, Q_{1,h}, \ldots, Q_{d,h})$ は $(f_1, \ldots, f_d)$ の重さ $(n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$ の Padé 型近似である. 行列式

$$\Delta(z) = \det\begin{pmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \ldots & P_d(z) \\ Q_{1,0}(z) & Q_{1,1}(z) & \ldots & Q_{1,d}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{d,0}(z) & Q_{d,1}(z) & \ldots & Q_{d,d}(z) \end{pmatrix}$$

は

$$\Delta(z) = \left(\frac{(-1)^n}{(n!)^d}\right)^d \cdot \prod_{j=1}^{d}\left[\prod_{\substack{1 \leq j' \leq d \\ j' \neq j}} \prod_{k=1}^{n} (\gamma_{j'} - \gamma_j - k)\right] \cdot \prod_{j=1}^{d} \frac{\gamma_j}{(2+\gamma_j)_{(d+1)n+d-1}} \cdot \prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq d} (\gamma_{j_2} - \gamma_{j_1}) \in K \setminus \{0\}$$

を満たす.

例 3.11. $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in K \setminus \{0\}$ を相異なる元, $\delta \in K$ を負の整数でないとする. 微分作用素 $D_j = -z\partial_z - \gamma_j z + \delta$ に対して, 級数

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+\delta)_k \left(\frac{1}{\gamma_j z}\right)^{k+1} = \frac{1}{z} \cdot {}_2F_0\left(\begin{matrix} 1+\delta, 1 \\ \; \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{\gamma_j z}\right) \quad (1 \leq j \leq d)$$

は $D_j \cdot f_j(z) \in K$ を満たす. K 線形写像 φ_{f_j} を φ_j とおく. D_j に付随する一般化 Rodligeus 作用素

$$R_{j,n} = \frac{1}{n!}\left(\partial_z - \frac{\gamma_j z - \delta}{z}\right)^n \quad (1 \leq j \leq d)$$

は補題 3.7 から

$$R_{j_1,n_{j_1}} R_{j_2,n_{j_2}} = R_{j_2,n_{j_2}} R_{j_1,n_{j_1}} \quad (1 \le j_1, j_2 \le d, \ \ n_{j_1}, n_{j_2} \in \mathbb{N})$$

を満たす $0 \le h \le d$ を満たす整数に対して多項式族を

$$P_{n,h}(z) = P_h(z) = \prod_{j=1}^{d} R_{j,n} \cdot z^{dn+h}, \ \ Q_{n,j}(z) = Q_j(z) = \varphi_j \left(\frac{P_h(z) - P_h(t)}{z - t} \right) \quad (1 \le j \le d)$$

と定義する. 定理 3.5 から $(P_h, Q_{j,h})_{1 \le j \le d}$ $(n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$ は $(f_j)_{1 \le j \le d}$ の Padé 型近似である.
行列式

$$\Delta(z) = \det \begin{pmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \ldots & P_d(z) \\ Q_{1,0}(z) & Q_{1,1}(z) & \ldots & Q_{1,d}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{d,0}(z) & Q_{d,1}(z) & \ldots & Q_{d,d}(z) \end{pmatrix}$$

は

$$\Delta(z) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^d} \right)^d \cdot \prod_{j=1}^{d} \left[\prod_{\substack{1 \le j' \le d \\ j' \ne j}} (\gamma_{j'} - \gamma_j)^n \right] \cdot \prod_{j=1}^{d} \frac{(1+\delta)_{dn+j-1}}{\gamma_j^{(d-1)n+d}} \cdot \prod_{1 \le j_1 < j_2 \le d} (\gamma_{j_2} - \gamma_{j_1}) \in K \setminus \{0\}$$

を満たす.

例 3.12. $\gamma \in K \setminus \{0\}$, $\delta_1, \ldots, \delta_d \in K$ を非負整数でなく

$$\delta_{j_1} - \delta_{j_2} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \le j_1 < j_2 \le d)$$

を満たす元とする. 微分作用素 $D_j = -z\partial_z - \gamma z + \delta_j$ に対して, 級数

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+\delta_j)_k \left(\frac{1}{\gamma z} \right)^{k+1} = \frac{1}{z} \cdot {}_2F_0 \left(\begin{matrix} 1+\delta_j, 1 \\ \ \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{\gamma z} \right)$$

は $D_j \cdot f_j(z) \in K$ を満たす. K 線形写像 φ_{f_j} を φ_j とおく. D_j に付随する一般化 Rodligeus 作用素

$$R_{j,n} = \frac{1}{n!} \left(\partial_z - \frac{\gamma z - \delta_j}{z} \right)^n z^n \quad (1 \le j \le d)$$

は補題 3.7 から

$$R_{j_1,n_{j_1}} R_{j_2,n_{j_2}} = R_{j_2,n_{j_2}} R_{j_1,n_{j_1}} \quad (1 \le j_1, j_2 \le d, \ n_{j_1}, n_{j_2} \in \mathbb{N})$$

を満たす. $0 \le h \le d$ を満たす整数に対して多項式族を

$$P_{n,h}(z) = P_h(z) = \prod_{j=1}^{d} R_{j,n} \cdot z^h, \ \ Q_{n,j}(z) = Q_j(z) = \varphi_j \left(\frac{P_h(z) - P_h(t)}{z - t} \right) \quad (1 \le j \le d)$$

と定義する. 定理 3.5 から $(P_h, Q_{j,h})_{1 \le j \le d}$ $(n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$ は $(f_j)_{1 \le j \le d}$ の Padé 型近似である.
行列式

$$\Delta(z) = \det \begin{pmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \ldots & P_d(z) \\ Q_{1,0}(z) & Q_{1,1}(z) & \ldots & Q_{1,d}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{d,0}(z) & Q_{d,1}(z) & \ldots & Q_{d,d}(z) \end{pmatrix}$$

は

$$\Delta(z)=\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^d}\right)^d\cdot\prod_{j=1}^d\left[\prod_{\substack{1\le j'\le d\\ j'\ne j}}\prod_{k=1}^n(\delta_{j'}-\delta_j-k)\right]\cdot\prod_{j=1}^d\frac{(1+\delta_j)_n}{\gamma^j}\cdot\prod_{1\le j_1<j_2\le d}(\delta_{j_2}-\delta_{j_1})\in K\setminus\{0\}$$

を満たす.

例 3.13. $\gamma\in K\setminus\{0\}$, $\delta_1,\dots,\delta_d\in K$ を相異なる元とする. K の元の列 $(f_{j,k})_{k\ge0}$ $(1\le j\le d)$ を

$$f_{j,0}=1,\quad f_{j,1}=-\delta_j/\gamma,\quad f_{j,k+2}=-\frac{\delta_jf_{j,k+1}+(k+1)f_{j,k}}{\gamma}\quad(k\ge0)$$

を満たすものとする. 微分作用素 $D_j=-\partial_z+\gamma z+\delta_j$ に対して, 級数

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f_{j,k}}{z^{k+1}}$$

は $D_j\cdot f_j(z)\in K$ を満たす. K 線形写像 φ_{f_j} を φ_j とおく. D_j に付随する一般化 Rodligeus 作用素

$$R_{j,n}=\frac{1}{n!}(\partial_z+\gamma z+\delta_j)^n\quad(1\le j\le d)$$

は補題 3.7 から

$$R_{j_1,n_{j_1}}R_{j_2,n_{j_2}}=R_{j_2,n_{j_2}}R_{j_1,n_{j_1}}\quad(1\le j_1,j_2\le d,\ n_{j_1},n_{j_2}\in\mathbb{N})$$

を満たす. $0\le h\le d$ を満たす整数に対して多項式族を

$$P_{n,h}(z)=P_h(z)=\prod_{j=1}^dR_{j,n}\cdot z^h,\quad Q_{n,j,h}(z)=Q_{j,h}(z)=\varphi_j\left(\frac{P_h(z)-P_h(t)}{z-t}\right)\quad(1\le j\le d)$$

と定義する. 定理 3.5 から $(P_h,Q_{j,h})_{1\le j\le d}$ は $(f_j)_{1\le j\le d}$ の重さ $(n,\dots,n)\in\mathbb{N}^d$ の Padé 型近似である.

行列式

$$\Delta(z)=\det\begin{pmatrix}P_0(z)&P_1(z)&\dots&P_d(z)\\Q_{1,0}(z)&Q_{1,1}(z)&\dots&Q_{1,d}(z)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\Q_{d,0}(z)&Q_{d,1}(z)&\dots&Q_{d,d}(z)\end{pmatrix}$$

は

$$\Delta(z)=\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^d}\right)^d\cdot\prod_{j=1}^d\left[\prod_{\substack{1\le j'\le d\\ j'\ne j}}(\delta_{j'}-\delta_j)^n\right]\cdot(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}\gamma^{dn-\frac{d(d-1)}{2}}\cdot\prod_{1\le j_1<j_2\le d}(\delta_{j_2}-\delta_{j_1})\in K\setminus\{0\}$$

を満たす.

次の例は, S. David, N. Hirata-Kohno と筆者の共同研究 [9, Lemma 3] の特別な場合である.

例 3.14. $m\in\mathbb{N}$ を非負整数, $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in K\setminus\{0\}$ を相異なる元, $\gamma_1,\dots,\gamma_d\in K$ を非負整数かつ, $\gamma_{j_1}-\gamma_{j_2}\notin\mathbb{Z}$ $(1\le j_1<j_2\le d)$ みたす元とする. $a_2(z)=(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_m)$, $D_j=-za_2(z)\partial_z+\gamma_ja_2(z)$ と定義する. このとき級数

$$f_{i,j}(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k+1+\gamma_j}\left(\frac{\alpha_i}{z}\right)^{k+1}=\frac{\gamma_j+1}{z}\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}1+\gamma_j,1\\2+\gamma_j\end{matrix}\,\middle|\,\frac{\alpha_i}{z}\right)\quad(1\le i\le m,\ 1\le j\le d)$$

は K 上線形独立であり, $D_j \cdot f_{i,j}(z) \in K[z]$ を満たす. K 線形写像 $\varphi_{f_{i,j}}$ を $\varphi_{i,j}$ とおく. D_j に付随する一般化 Rodligeus 作用素

$$R_{j,n} = \frac{1}{n!}\left(\partial_z + \frac{\gamma_j}{z}\right)^n z^n \quad (1 \le j \le d)$$

は, 補題 3.7 より

$$R_{j_1,n_{j_1}} R_{j_2,n_{j_2}} = R_{j_2,n_{j_2}} R_{j_1,n_{j_1}} \quad (1 \le j_1, j_2 \le d,\ n_{j_1}, n_{j_2} \in \mathbb{N})$$

を満たす. $0 \le h \le dm$ をみたす整数に対して, 多項式族を

$$P_{n,h}(z) = P_h(z) = \prod_{j=1}^{d} R_{j,n} \cdot [a_2(z)^{dn} z^h],$$

$$Q_{n,i,j,h}(z) = Q_{i,j,h}(z) = \varphi_{i,j}\left(\frac{P_h(z) - P_h(t)}{z - t}\right) \quad (1 \le i \le m,\ \ 1 \le j \le d)$$

と定義する. 定理 3.5 より $(P_h, Q_{i,j,h})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le d}}$ は $(f_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le d}}$ の重さ $(n, \dots, n) \in \mathbb{N}^{dm}$ の Padé 型近似である.

行列式

$$\Delta(z) = \det \begin{pmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \dots & P_{dm}(z) \\ Q_{1,1,0}(z) & Q_{1,1,1}(z) & \dots & Q_{1,1,dm}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m,1,0}(z) & Q_{m,1,1}(z) & \dots & Q_{m,1,dm}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1,d,0}(z) & Q_{1,d,1}(z) & \dots & Q_{1,d,dm}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m,d,0}(z) & Q_{m,d,1}(z) & \dots & Q_{m,d,dm}(z) \end{pmatrix}$$

の非零性が [9, Proposition 4.1] で示されている.

4　ホロノミック級数の値の線形独立性への応用

この節では K を代数体とする.

例 3.10, 例 3.11, 例 3.12 及び例 3.14 を応用してそれぞれで扱った級数の特殊値の線形独立性に関連する結果が得られる. これらの級数の線形独立性に関して, 以下の先行研究がある. 先行研究では本小論とは異なる Padé 型近似を用いているものが多いが, 証明の方法は本質的に同じものである.

例 3.10 について, $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in \mathbb{Q}$ で負の整数でないものとすると $f_j(z)$ は E 関数 (*confer* [22]) になる. これらの特殊値の線形独立性が K. Väänänen により [26] で与えられている. 例 3.11 について, $\delta \in \mathbb{Q}$ が負の整数でなく $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in K$ のとき, $f_j(z)$ は Euler 型関数 (*confer* [4]) になる. これらの関数の global relation について, $\delta = 0$ のとき, T. Matala-aho, W. Zudilin[14] や L. Seppälä [21] で与えられている. 例 3.12 について $\delta_1, \dots, \delta_d \in \mathbb{Q}$ が負の整数でなく $\gamma = 1$ のとき Euler 型関数 $f_j(z)$ の global relation が Väänänen[25] で得られている. 例 3.14 の関数の値の線形独立性は David, Hirata-Kohno, 筆者により [9] で与えられている. 以下では先行研究で知られていなかったと思われる例 3.9 の応用を与える.

v_0 を K の素点とする．v_0 が非アルキメデス的素点の場合は p_{v_0} で v_0 の下にある素数を表す．2 以上の整数 u に対し，

$$\mu(u) = \prod_{q:\text{素数},\ q|u} q^{q/(q-1)}$$

$\varepsilon_{v_0}(u) = 1\ (1/u \in \mathbb{Z}_{p_{v_0}})$, $\varepsilon_{v_0}(u) = 0$ (その他) とおく．α を $|\alpha|_{v_0} > 2$ を満たす K の元とする．

K の素点 v と $\beta \in K$ に対して，β の v 進高さを $\mathrm{H}_v(\beta) = \max(1, |\beta|_v)$, β の高さを $\mathrm{H}(\beta) = \prod_v \mathrm{H}_v(\beta)$ と定義し，β の対数的高さを $\mathrm{h}_v(\beta) := \log \mathrm{H}_v(\beta)$, $\mathrm{h}(\beta) = \log \mathrm{H}(\beta)$ と定義する．

これらに対して以下の実数を定義する．

$$\mathbb{A}_{v_0}(\alpha) = \mathrm{h}_{v_0}(\alpha) - \begin{cases} \mathrm{h}_{v_0}(2) & (v_0 \mid \infty) \\ \dfrac{\varepsilon_{v_0}(u) \cdot \log |p_{v_0}|_{v_0}}{p_{v_0} - 1} - \log |\mu(u)|_{v_0} & (v_0 \nmid \infty) \end{cases}$$

$$\mathbb{B}_{v_0}(\alpha) = (u-1)\mathrm{h}(\alpha) + (u+1)\mathrm{h}(2) + (2 - 1/u)\log \mu(u) + u - 1$$

$$- (u-1)\mathrm{h}_{v_0}(\alpha) - \begin{cases} (u+1)\mathrm{h}_{v_0}(2) & (v_0 \mid \infty) \\ \log |\mu(u)|_{v_0}^{-1} & (v_0 \nmid \infty) \end{cases}$$

$$U_{v_0}(\alpha) = (u-1)\mathrm{h}_{v_0}(\alpha) + \begin{cases} (u+1)\mathrm{h}_{v_0}(2) & (v_0 \mid \infty) \\ \log |\mu(u)|_{v_0}^{-1} & (v_0 \nmid \infty) \end{cases}$$

$$V_{v_0}(\alpha) = \mathbb{A}_{v_0}(\alpha) - \mathbb{B}_{v_0}(\alpha)$$

このとき次が成り立つ．

定理 4.1. $V_{v_0}(\alpha) > 0$ とする．このとき $\varepsilon < V_{v_0}(\alpha)$ をみたす正数 ε に対して，ε, u, α に依存する *effective* な正定数 H_0 で以下の条件を満たすものが存在する．

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_l)_{0 \le l \le u-2} \in K^u \setminus \{\mathbf{0}\}$ が $H_0 \le \mathrm{H}(\boldsymbol{\lambda})$ を満たすとき

$$\left| \lambda + \sum_{l=0}^{u-2} \lambda_l \cdot \frac{1}{\alpha^{l+1}} {}_2F_1\left(\frac{1+l}{u}, 1, \frac{u+l}{u} \,\middle|\, \frac{1}{\alpha^u} \right) \right|_{v_0} > C(\alpha, \varepsilon)\mathrm{H}_{v_0}(\boldsymbol{\lambda})\mathrm{H}(\boldsymbol{\lambda})^{-\mu(\alpha,\varepsilon)}$$

が成り立つ．ここで

$$\mu(\alpha, \varepsilon) = \frac{\mathbb{A}_{v_0}(\alpha) + U_{v_0}(\alpha)}{V_{v_0}(\alpha) - \varepsilon}, \quad C(\alpha, \varepsilon) = \exp\left(-\left(\frac{\log(2)}{V_{v_0}(\alpha) - \varepsilon} + 1 \right) (\mathbb{A}_{v_0}(\alpha) + U_{v_0}(\alpha)) \right)$$

である．

謝辞: 最後になりますが，講演の機会をくださいました組織委員の赤塚広隆先生 (小樽商科大学), 山崎義徳先生 (愛媛大学) に感謝致します．

参考文献

[1] K. Alladi, M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew Math. **318** (1980), 137–155.

[2] A. I. Apetekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc. **355**. 10 (2003), 3887–3914.

[3] R. Askey, *The* 1839 *Paper on Permutations: Its Relation to the Rodligues Formula and Further Developments. Mathematics and social utopias in France: Olinde Rodligues and his times/ Simon Altmann, Eduardo L. Ortiz, editors* (*History of mathematics*; *v.*28), Providence, R.I. :American Math. Soc. (2005).

[4] D. Bertrand, V. Chrskii, J. Yebbou, *Effective estimates for global relations on Euler-type series*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 13 (2004), 241–260.

[5] F. Beukers, *Padé approximations in number theory*, Société Arithmétique de Bordeaux, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1980-1981), 1–9.

[6] F. Beukers, *Legendre polynomials in irrationality proofs*, Bull. of the Australian Math. Soc. **22** (03), 431–438.

[7] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent* ?, Moscow Journal in Combinatorics and Number Theory, **9** (2020), 389–406.

[8] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, to appear Annali della Scoula Normale Superiore di Pise.

[9] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criteria for generalized polylogarithms with distinct shifts*, preprint, available at https://arxiv.org/abs/2202.13931 .

[10] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Generalized hypergeometric G-functions take linear independent values*, preprint, available at https://arxiv.org/abs/2203.00207 .

[11] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. **404** (1990), 99–125.

[12] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl., **69** (1990), 133–173.

[13] R. Marcovecchio, *Multiple Legendre polynomials in diophantine approximation*, International Journal of Number Theory, **10** (2014), 1829–1855.

[14] T. Matala-aho, W. Zudilin, *Euler's factorial series and global relations*, Journal of Number Theory, **186** (2018), 202–210.

[15] H. Padé, *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **9** (1892), 3–93.

[16] H. Padé, *Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1899), 395–426.

[17] M. Kawashima, *Rodligues formula and linear independence*, preprint.

[18] M. Kawashima and A. Poëls, *Padé approximation for a class of hypergeometric functions and parametric geometry of numbers*, preprint, available at http://arxiv.org/abs/2202.10782 .

[19] R. Rasala, *The Rodligues Formula and Polynomial Differential Operators*, Journal of Mathematical analysis and applications, **84** (1981), 443–482.

[20] T. Rivoal, *Simultaneous Padé approximants to the Euler, exponential and logarithmic functions*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **27** (2015), 565–589.

[21] L. Seppälä, *Euler's factorial series at algebraic integer points*, Journal of Number Theory, **206** (2020), 250–281.

[22] C. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Kl. **1929–30**, no.1, 1–70.

[23] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, New York 1939.

[24] V. N. Sorokin, *Joint approximations of the square root, logarithm, and arcsine*, (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2009, no. 2, 65–69 ; translation in Moscow Univ. Math. Bull. 64.2 (2009), 80–83.

[25] K. Väänänen, *On Padé approximations and global relations of some Euler-type series*, International Journal of Number Theory, **14** (2018), 2303–2315.

[26] K. Väänänen, *On a result of Fel'dman on linear forms in the values of some E-functions*, Ramanujan J., **48** (2019) 33–46.

Makoto Kawashima
kawashima.makoto@nihon-u.ac.jp
Department of Liberal Arts and Basic Sciences
College of Industrial Engineering
Nihon University
Izumi-chou, Narashino, Chiba
275-8575, Japan