ある三変数の純指数型不定方程式の解の個数について

Number of solutions to some purely exponential Diophantine equation in three unknowns [1]

群馬大学・理工学部　宮崎 隆史 (Takafumi Miyazaki)
Faculty of Science and Technology, Gunma University

1 序

ここでは指数 (だけ) を未知数とする不定方程式を考える．例えば $1+2^y=3^z$ や $3^x+4^y=5^z$ であり，この様なものは (純) 指数型と呼ばれる．本稿では，これらを一般化したものとして，次の様なものを考える．

(1) $$Aa^x+Bb^y+Cc^z+\cdots=0.$$

ここで，$A,B,C,\cdots,a,b,c,\cdots$ は与えられた有限個の非零整数，$a,b,c,\cdots$ は自然数，そして $x,y,z,\cdots$ は未知の自然数である．ただし (1) の左辺において項数は 3 以上かつ変数の数は 2 以上とする．上記の様な方程式は通常の (多項式型) 不定方程式の研究においても現れている．例えば連立ペル方程式の研究は，二つの線形回帰数列の項の一致の問題に帰着されるが，それは方程式 (1) の二変数の場合として表される (ただし A,a 等の値を代数的数まで拡大する)．また，方程式 (1) の左辺の各項において現れる素因数の種類は有限である．例えば，始めの項では，Aa の素因数の集合になる (A,a はあらかじめ与えられていることに注意する)．この様な意味で，方程式 (1) は単数方程式と呼ばれるものの特別な場合となる．単数方程式は様々なディオファントス問題に現れる重要な研究対象であると認識されている．代数的数の有理数による近似の理論によって，その解の個数は適切な制限の下で有限であることが知られ，その詳しい上限評価が成されている．一つの重要な経験的あるいは理論的事実として，与えられた単数方程式は一般に解を持つことがほとんどない．より正確には，解の個数は極端に少ないことが期待される．これらの話題の詳細や一般化等については，平田典子氏の [Hi, Hi2, Hi3] を，または [ShTi] の 1 章や [EvGy] の 4,5,6 章等を参照して頂きたい．以下では，方程式 (1) の単純な場合，すなわち項数が最小の 3 でありかつ係数が現れない場合について，解の個数の ‘最良評価’ に関わることを述べる．項数が最小の場合に限り，解 x,y,z の一般的な上限評価がベイカーの理論によって与えられることに注意する．

2 二変数の場合 - ピライ型方程式

[1]本研究は科研費 (課題番号 16K17557, 20K03553) の助成を受けたものである．

方程式 (1) の最も単純な場合とは，項数 3 の 2 変数で係数が現れない場合であると考えられる．それは次の様に表すことができる．

$$a^x - b^y = c. \tag{2}$$

ここで，$a > 1, b > 1, c$ は与えられた自然数であり，x, y は未知の自然数である．(実際は左辺の二項 a^x, b^y の和を考えることもできるがここでは割愛する．) 方程式 (2) は,「差が一定となる累乗数の組」の有限性を問う有名なピライの予想の特別な場合とみなすことができる．ただし (2) では $x = 1, y = 1$ のいずれも許される．ピライは，(2) の様に底数 (a, b のこと，以下同様) を固定する場合を主に考察していた ([Pi, Pi2])．彼の主結果は，c が a, b に比べて十分大きいならば (2) を満たす x, y の組は高々一つであるというものである．その後，特別な場合については，例えば Stroker-Tijdeman [StTi] や Scott [Sc] による重要な研究がある．これらのより詳しい歴史的経緯は [Be, Be2] のそれぞれの第 1 節に紹介されている．

さて，方程式 (2) の一般の解の個数については，2001 年に Bennett [Be] が次の様な ‘決定的’ な評価を得ている．

命題 1　方程式 (2) は一般に高々二つの解しか持ちえない．

‘決定的’ と記したのは，実際に解が (ちょうど) 二つ存在する様な例がいくつか見つかっているからである．その様な例は以下である ([Be, (1.2)])：

$$
\begin{aligned}
3 - 2 = 3^2 - 2^3 = 1,\\
2^3 - 3 = 2^5 - 3^3 = 5,\\
2^4 - 3 = 2^8 - 3^5 = 13,\\
2^3 - 5 = 2^7 - 5^3 = 3,\\
13 - 3 = 13^3 - 3^7 = 10,\\
91 - 2 = 91^2 - 2^{13} = 89,\\
6 - 2 = 6^2 - 2^5 = 4,\\
15 - 6 = 15^2 - 6^3 = 9,\\
280 - 5 = 280^2 - 5^7 = 275,\\
4930 - 30 = 4930^2 - 30^5 = 4900,\\
6^4 - 3^4 = 6^5 - 3^8 = 1215.
\end{aligned}
$$

命題 1 は，項数の少ない単数方程式 (方程式 (1) では項数が最小の 3 に該当) の解の大きさの上限評価を与える対数一次形式に関するベイカー理論 ([Bu] を参照) と，(a, b が互いに素な場合における) 三つ以上の (架空の) 解の間の間隙原理を組み合わせることで証明が成された，実に見事な定理である．a, b が非自明な公約数を有する場合は，短く初等的に処理されるので，a, b が互いに素である場合が本質であると考えられることに注意する．この定理はそ

の後，その係数付き一般化問題等が Scott-Styer [ScSt, ScSt2, ScSt3] によって熱心に研究され続けている．

さて，さらなる問題として，(2) の解の個数の最良評価について，Bennett [Be] は次のことを提起している．

予想 1 方程式 (2) が解を複数持つ場合は，前掲の例に限る．

Bennett [Be] はこの予想を次の様な部分的な場合に確かめている．

・c が a, b に比べて十分大きい場合；
・c が項 b^y に比べて比較的に小さい場合；
・$c \leq 100$ の場合；
・a が素数で，b の a による剰余が 1 または -1 の場合．

この内，最初のものは前述したピライの結果の明示版である．三番目の仮定の c の上限は 250 まで拡張されている ([Su])．また，最後のものの系として，予想 1 は a がフェルマー素数 $(= 3, 5, 17, 257, 65537)$ である場合に成立することが示されている．これは，前述した Scott [Sc] の $a = 2$ に対する結果 (次節の命題 2) のアナロジーとみなせる．[Be] 内にも言及されているが，a を固定するあるいは b を固定する場合にも，予想 1 を示すことは一般に容易ではない．これらに関するさらなる研究例として，部分空間定理や abc 予想の応用も含めた [BuLu, Lu] が挙げられる．これ以降現在まで予想 1 に関する進展は特にないようである．

3 三変数の場合

本節以降では，前節で取り上げた方程式の三変数版：

$$a^x + b^y = c^z \tag{3}$$

を考える．ここで，a, b, c は与えられた自然数 > 1，x, y, z は未知の自然数，そして a, b, c はどの二つも互いに素であるとする．方程式 (3) は，不定方程式の歴史を通して最大の興味が注がれてきた，「互いに素な二つの累乗数の和が累乗数になるかどうか？」という問題 ([Co, 14 章] を参照) の特別な場合であるとみなせる．この意味で，a, b, c が自明な公約数を有さないとすることは自然 (で原始的) な前提条件であると考えられる．ただし (3) では $x = 1, y = 1, z = 1$ のいずれも許される．

方程式 (3) が初めて文献に出たのは Sierpiński [Si] の論文のようである ([Si2, 2 章 3 節] も参照)．彼は $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ の場合に解はただ一つの自明なもの $x = y = z = 2$ に限ることを示している．その直後に弟子の Jeśmanowicz が他のいくつかの原始ピタゴラス三つ組みについても同様の考察をしている．この分野で有名な彼の予想は，$(a, b, c) = (3, 4, 5)$ の場合と同様の結論が全てのピタゴラス三つ組みについても成り立つだろう，というものであり，現在も未解決である．この予想の歴史については [Mi, Mi3, Mi4, Mi6] を参照のこと．また，Sierpiński-Jeśmanowicz 予想の一般化問題

として寺井伸浩氏 [Te] による有名な予想がある．これはピタゴラス三つ組みの満たす式 $a^2+b^2=c^2$ を一般化したもの $a^p+b^q=c^r\ (p,q,r:$ 自然数 $>1)$ に置き換えた問題であり，いくつかの場合を除けば方程式 (3) の解は自明なもの $x=p, y=q, z=r$ に限ることを主張する．この予想も当然未解決だが多くの部分的な結果が知られている ([Mi5, Te2] を参照)．これら以外にも，a,b,c が整数変数の多項式あるいは線形回帰数列の項で与えられたりする場合にも，解の決定に関わる研究がある ([Mi2] を参照)．

さて，(3) については，解の決定問題が盛んに論じられる一方で，個数の絶対評価に関する研究も少数だが存在する (以下に述べるものは '最良評価' に関わるものだけである)．中でも有名なのが Scott [Sc] によるもので，c が素数である場合が扱われている．特に，$c=2$ の場合には，明確な例外を除いて，個数は高々一つであるという '最良評価' を得ている：

命題２　$c=2$ ならば，方程式 (3) は複数の解を持ちえない．ただし，$\{a,b\}=\{5,3\},\{13,3\}$ の場合を除く．

彼の手法は，方程式の左辺を虚二次体上で分解し，右辺が累乗数であることから，項の素因数が限定された特別な線形回帰数列の考察に帰着させるものである．特筆すべきことは，この証明は二次体上の初等整数論によって行われており，いわゆる「初等的」である (= 簡単，とは筆者は決して感じない)．Scott の c が奇素数の場合の結果は，その後，Styer との共同研究 [ScSt4] で，一般の奇数の場合に拡張されている：

命題３　c が奇数ならば，方程式 (3) は高々二つの解しか持ちえない．

c が奇数であって解が二つある場合はたくさん存在する (最終節を参照) ので，命題３は奇数 c に対しては解の個数の '最良評価' を与えている．また命題３は本稿の主結果の証明で極めて重要な役割を果たす．ここで，c が偶数である場合には，Scott-Styer の手法は本質的に困難な点が生じ，現在でも活路は見出されていないことに注意する．

一方で，Scott-Styer とは異なるアプローチにより，解の個数の絶対評価を得た Hu と Le [HuLe, HuLe2] の研究がある．彼らの方法は，二つの解が存在する状況下で，方程式 (3) の各底数の適当な累乗を法とする合同式から生じる整除性に基づいている．三つの (架空) 解の存在を仮定すると，前述した整除性が二つ得られ，それらを組み合わせるとことで，三つの解の内最も大きいもの (正確には c の指数 z が最も大きい解) の非常に大きな下限が得られる (この様な性質は '間隙原理' と称され，Thue 方程式や連立ペル方程式等の解の個数の評価でも現れる性質である)．これを (z の) 上限評価を与えるベイカー理論と組み合わせることで，底数すべての絶対的上限評価が出る，という流れである．対偶を考えれば，a,b,c の内の一つが十分に大きいならば解の個数は多くても 2 であると結論できる：

命題４　a,b,c のいずれかが 10^{62} より大きいならば，方程式 (3) は高々二つの解しか持ちえない．

これにより，方程式 (3) の一般的な最良評価を得るためには，底数のすべてが 10^{62} 以下である高々有限個の場合をすべて調べつくせばよいことが分かる．ここで，ベイカー理論は，解の大きさの上限評価を与え，そしてその評価式は方程式 (の底数 a, b, c) のみに依存し明示的に与えられることに注意する．しかしながらこの様な作業は現在の計算機で行える範疇では全くない．実はこの点を克服したのが本稿の主結果になる．

4 主結果

方程式 (3) の解の個数を '決定的' に評価したのが主定理 ([MiPi]) であり，命題 1 の '三変数版' とみなすことができる．

定理　方程式 (3) は一般に高々二つの解しか持ちえない．ただし，$(a, b, c) = (3, 5, 2), (5, 3, 2)$ の場合を除く．

'決定的' と記したのは，実際に解が (ちょうど) 二つ存在する様な例がいくつか (無数!!) 見つかっているからである．その様な例は以下のものである ([ScSt4, Conjecture])：

$$13 + 3 = 2^4,\ 13 + 3^5 = 2^8;$$
$$3 + 2^8 = 259,\ 3^5 + 2^4 = 259;$$
$$10 + 3 = 13,\ 10 + 3^7 = 13^3;$$
$$13 + 3^7 = 2200,\ 13^3 + 3 = 2200;$$
$$89 + 2 = 91,\ 89 + 2^{13} = 91^2;$$
$$91 + 2^{13} = 8283,\ 91^2 + 2 = 8283;$$
$$3 + 2^3 = 11,\ 3^2 + 2 = 11;$$
$$5 + 2^7 = 133,\ 5^3 + 2^3 = 133;$$
$$3 + 2^5 = 35,\ 3^3 + 2^3 = 35;$$
$$5 + 2^2 = 3^2,\ 5^2 + 2 = 3^3;$$
$$7 + 2 = 3^2,\ 7^2 + 2^5 = 3^4;$$
$$(2^k - 1) + 2 = 2^k + 1,\ (2^k - 1)^2 + 2^{k+2} = (2^k + 1)^2;$$
$$5 + 3 = 2^3,\ 5 + 3^3 = 2^5,\ 5^3 + 3 = 2^7.$$

ここで，k は任意の自然数 ≥ 2 である．この各例に対応する三つ組み (a, b, c) に対して (3) の解は既に決定されていて，それらは上記の様に与えられることに注意する．よって特に (a, b, c) が $(3, 5, 2)$ あるいは $(5, 3, 2)$ である場合には解はちょうど三つだけ存在する．

主定理の証明は，既知の成果を用いる他に，二つの重要なポイントがある．一つは，命題 3 の証明で使われた間隙原理を改良することであり，も

う一つは，方程式の右辺の 2 で割れる回数を，正確に (かつ初等的に) 評価することである (命題 4 によって c は偶数であるとしてよい)．これらを組み合わせることで，解が三個以上存在する仮定の下では，指数 x, y, z および底数 a, b, c の良い上限評価 (およそ，$a, b, c < 10^{10}$) がなされる．最後に残りの場合は計算機で調べつくすことで証明が成される．ここで，方程式の解の候補を制限するために，一般化されたフェルマー方程式の既知の結果 ([BeMiSi] を参照) を多分に用いていることに注意する．詳しくは [MiPi] を参照して頂きたい．

さて，Bennett の仕事と同じように，予想 1 の三変数版を考えることは自然であろう．

予想 2 方程式 (3) が解を複数持つ場合は，前掲の例に限る．

これは，前節で取り上げた，Sierpiński-Jeśmanowicz 予想や寺井氏の予想をも含むものであり，この分野の (一つの) 究極の問題といえる．多くの場合に予想が成立する結果が知られているが，その内最も一般的なものは Scott の定理 (命題 2) であると筆者は考えている．筆者は今後，本稿の主定理の証明中で扱った方法を利用し，二節で取り上げた "予想 1 の Bennett による部分的結果の三変数版" とみなせるものの証明を追求していくつもりである．

References

[Be] M.A. Bennett, 'On some exponential equations of S. S. Pillai', *Canad. J. Math.* **53** (2001), 897–922.

[Be2] M.A. Bennett, 'Pillai's conjecture revisited', *J. Number Theory* **98** (2003), 228–235.

[BeMiSi] M.A. Bennett, P. Mihăilescu and S. Siksek, 'The generalized Fermat equation', *Springer volume Open Problems in Mathematics*, 2016, 173–205.

[Bu] Y. Bugeaud, 'Linear forms in logarithms and applications', (European Mathematical Society, 2017).

[BuLu] Y. Bugeaud and F. Luca, 'On Pillai's Diophantine equation', *New York J. Math.* **12** (2006), 193–217.

[EvGy] J.H. Evertse and K. Győry, 'Unit Equations in Diophantine Number Theory', (Cambridge University Press, 2015).

[Lu] F. Luca, 'On the diophantine equation $p^{x_1} - p^{x_2} = q^{y_1} - q^{y_2}$', *Indag. Math. (N.S.)* **14** (2003), no. 2, 207–222.

[Co] H. Cohen, 'Number Theory. Vol. II: Analytic and Modern Tools', (Grad. Texts in Math. 240, Springer, 2007).

[Hi] 平田 典子, '整数解と Schmidt の部分空間定理', 数理解析研究所講究録 **1026** (1998), 89–103.

[Hi2] N. Hirata-Kohno, 'S-unit equations and integer solutions to exponential Diophantine equations', *RIMS Kokyuroku* **1511** (2006), 92–97.

[Hi3] N. Hirata-Kohno, 'Unit equations having few solutions', *RIMS Kokyuroku* **1665** (2009), 152–159.

[HuLe] Y. Hu and M. Le, *An upper bound for the number of solutions of ternary purely exponential diophantine equations*, J. Number Theory **183** (2018), 62–73.

[HuLe2] Y. Hu and M. Le, 'An upper bound for the number of solutions of ternary purely exponential diophantine equations II', *Publ. Math. Debrecen* **95** (2019), 335–354.

[Mi] T. Miyazaki, ‘On exponential Diophantine equations concerning Pythagorean triples’, *RIMS Kokyuroku* **1710** (2010), 113–123.

[Mi2] T. Miyazaki, ‘Upper bounds for solutions of exponential Diophantine equations with applications to Fibonacci numbers’, *RIMS Kokyuroku* **1806** (2012), 134–142.

[Mi3] T. Miyazaki, ‘On an analogue of Jeśmanowicz’ conjecture on exponential Diophantine equations’, *RIMS Kokyuroku* **1874** (2014), 64–70.

[Mi4] T. Miyazaki, ‘On an exponential equation concerning Pythagorean numbers with congruence relations’, *RIMS Kokyuroku* **2013** (2016), 50–59.

[Mi5] T. Miyazaki, ‘On Terai’s exponential equation with two finite integer parameters’, *RIMS Kokyuroku* **2092** (2018), 111–121.

[Mi6] 宮崎 隆史, ‘原始ピタゴラス数から生ずる三項指数型不定方程式について’, 第 11 回代数学と計算 報告集, 92–105.

[MiPi] T. Miyazaki and I. Pink, ‘Number of solutions to a special type of unit equations in two variables’, arXiv:math/2006.15952.

[Pi] S.S. Pillai, ‘On the inequality $0 < a^x - b^y \leq n$’, *J. Indian Math. Soc.* **19** (1931), 1–11.

[Pi2] S.S. Pillai, ‘On $a^x - b^y = c$’, *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*) **2** (1936), 119–122, and 215.

[Sc] R. Scott, ‘On the equations $p^x - b^y = c$ and $a^x + b^y = c^z$’, *J. Number Theory* **44** (1993), 153–165.

[ScSt] R. Scott and R. Styer, ‘On the generalized Pillai equation $\pm a^x \pm b^y = c$’, *J. Number Theory* **118** (2006), 236–265.

[ScSt2] R. Scott and R. Styer, ‘The number of solutions to the generalized Pillai equation $\pm ra^x \pm sb^y = c$’, *J. Theor. Nombres Bordeaux* **25** (2013), 179–210.

[ScSt3] R. Scott and R. Styer, ‘Bennett’s Pillai theorem with fractional bases and negative exponents allowed’, *J. Theor. Nombres Bordeaux* **27** (2015), 289–307.

[ScSt4] R. Scott and R. Styer, ‘Number of solutions to $a^x + b^y = c^z$’, *Publ. Math. Debrecen* **88** (2016), 131–138.

[Si] W. Sierpiński, ‘On the equation $3^x + 4^y = 5^z$’, *Wiadom. Mat.*, **1** (1955/1956), 194–195 (in Polish).

[Si2] W. Sierpiński, ‘Elementary Theory of Numbers’ (North Holland, 2012).

[Su] M. Sudo, ‘On the exponential equations $a^x - b^y = C\,(1 \leq C \leq 300)$’, *J. Fac. Sci. Tech., Seikei Univ.* **42** (2005), 57–62.

[ShTi] T.N. Shorey and R. Tijdeman, ‘Exponential Diophantine Equations’, (Cambridge University Press, 1986).

[StTi] R.J. Stroeker, R. Tijdeman, ‘Diophantine Equations’, *Computational Methods in Number Theory, M.C. Tract 155, Centre for Mathematics and Computer Science*, Amsterdam, 1982, pp. 321–369.

[Te] N. Terai, ‘Applications of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations’, *Acta Arith.* **90** (1999), 17–35.

[Te2] 寺井 伸浩, ‘指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ と $x^2 + b^m = c^n$ の最近の進展について’, 第 64 回代数学シンポジウム 報告集.