

The Hausdorff dimension of some planar sets with unbounded digits *

Yuto Nakajima

Course of Mathematical Science, Department of Human Coexistence,
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University
E-mail: nakajima.yuuto.32n@st.kyoto-u.ac.jp

概要

反復関数系の自然な類推で、作用する関数の組が単位時刻に依って構わない関数系を非自励的反復関数系という。本講演で扱う非自励的反復関数系は、単位円盤内の点でパラメータ付けられ、単位時刻毎に作用する関数の組は常に、平面上の二つの縮小的な「線形写像」からなるが、二つのうち片方は、時刻が無限大にいくにつれ無限大に発散する平行移動項 (ディジットと呼ぶ) を有するものを考える。すると、単位円盤内の点でパラメータ付けられた極限集合が定義される。上記設定下で、「横断性」という性質を持つパラメータ集合上の二次元ルベグ測度に関するほとんど全てのパラメータに対応した極限集合のハウスドルフ次元を計算する。また、例外的なパラメータ集合のハウスドルフ次元の上からの評価も与える。

1 導入

1.1 背景

$\mathbb{D}^* := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < 1\}$ とおく。 $\lambda \in \mathbb{D}^*$ でパラメータ付けされた以下の集合 $A(\lambda)$ について考える。

$$A(\lambda) := \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{0, 1\} \right\}.$$

集合 $A(\lambda)$ はフラクタル的な構造を有する。実際に、 $A(\lambda)$ は複素平面上的反復関数系 $\{z \mapsto \lambda z, z \mapsto \lambda z + 1\}$ の極限集合である。反復関数系 (以下 IFS と呼ぶ) の一般論は例えば [4] を参照。 $A(\lambda)$ のハウスドルフ次元を調べるために、ある関数たちの集合 \mathcal{F} と \mathcal{F} に属する関数の

* 2020 Mathematics Subject Classification. 28A80

\mathbb{D}^* 内に存在する零根集合 \mathcal{M} を以下で与える.

$$\mathcal{F} := \left\{ f(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{-1, 0, 1\} \right\},$$

$$\mathcal{M} := \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : \text{ある } f \in \mathcal{F} \text{ が存在して } f(\lambda) = 0 \}.$$

集合 \mathcal{M} は *Mandelbrot set for pairs of linear maps* として知られていて 1985 年頃よりその位相的性質の研究が多くなされている ([1], [2] を参照). 注意することとして,

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{D}^* : \frac{1}{\sqrt{2}} < |\lambda| < 1 \right\} \subset \mathcal{M} \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{D}^* : \frac{1}{2} < |\lambda| < 1 \right\} \quad (1)$$

(証明は [12, p.538 (6)] を参照).

一般に $\text{IFS}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ が開集合条件を満たすとは, ある空でない開集合 V が存在して, $\phi_i(V) \cap \phi_j(V) = \emptyset$ と $\phi_i(V) \subset V (i \neq j \in \{1, \dots, n\})$ が成り立つときにいう. 直感的に開集合条件とは IFS のつくる極限集合を異なる ϕ_i たちで写したものが分離している状況である. 開集合条件を課した等角写像からなる IFS の極限集合のハウスドルフ次元の計算に関しては [3] を参照. もし $\lambda \notin \mathcal{M}$ なら, 対応する $\text{IFS}\{z \mapsto \lambda z, z \mapsto \lambda z + 1\}$ は開集合条件を満たすことがわかり, さらに $A(\lambda)$ のハウスドルフ次元は $-\log 2 / \log |\lambda|$ に等しいことが容易にわかる ([4, Theorem 9.3] を参照). しかしながら, $\lambda \in \mathcal{M}$ のときは, $A(\lambda)$ のハウスドルフ次元の計算は一般に難しい. 実際にどのパラメータ $\lambda \in \mathcal{M}$ で対応する $\text{IFS}\{z \mapsto \lambda z, z \mapsto \lambda z + 1\}$ が開集合条件を満たすかどうかというのは非常に難しい問題である. そこで \mathcal{M} のある部分集合を次で導入する.

$$\tilde{\mathcal{M}} := \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : \text{ある } f \in \mathcal{F} \text{ が存在して } f(\lambda) = f'(\lambda) = 0 \} (\subset \mathcal{M}).$$

本稿では $A \subset \mathbb{C}$ に対して, $\dim_H(A)$ を通常のノルム $|\cdot|$ に関する A のハウスドルフ次元, \mathcal{L}_d を d 次元ルベグ測度とする. 以下の定理が [12, Theorem 2.2] と [13, Proposition 2.7] から従う.

定理 1.1.

$$\dim_H(A(\lambda)) = \frac{\log 2}{-\log |\lambda|} \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : 0 < |\lambda| < 1/\sqrt{2} \}; \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_2(A(\lambda)) > 0 \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : 1/\sqrt{2} < |\lambda| < 1 \} \setminus \tilde{\mathcal{M}}. \quad (3)$$

注意 1.2. 全ての λ に対して $\dim_H(A(\lambda)) \leq \log 2 / -\log |\lambda|$ が成り立つ ([4, Proposition 9.6] を参照). したがって (2) に関しては下からの評価が本質的な問題である.

(2) で " $<$ " が成り立つ (例外的な) パラメータ集合の評価が以下で与えられる.

定理 1.3. [8, Theorem 8.2] For any $0 < r < R < 1/\sqrt{2}$,

$$\dim_H \left(\left\{ \lambda \in \mathbb{D}^* : r < |\lambda| < R, \dim_H(A(\lambda)) < \frac{\log 2}{-\log |\lambda|} \right\} \right) \leq \frac{\log 2}{-\log R} < 2.$$

上記二つの定理は *transversality method* と呼ばれる手法を用いて示される。この手法に関しては後ほど述べることにする。

1.2 主結果

ここでは $\lambda \in \mathbb{D}^*$ でパラメータ付けされたある集合に関する主結果を述べる。ディジットと呼ばれる実数列 $\{p_j\}_{j=0}^\infty$ で以下の性質を満たすものを固定する。

- 任意の $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で $p_j \geq 1$;
- $p_j \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$;
- $\frac{p_{j+1}}{p_j} \rightarrow 1$ as $j \rightarrow \infty$.

このときパラメータ λ について

$$A_0(\lambda) := \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{0, p_j\} \right\},$$

という集合を考える。まず主結果を述べるに先立ってこの集合を導入するモチベーションを与える。

モチベーション 1. 集合 $A(\lambda)$ の類推物としての $A_0(\lambda)$: 任意の $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で $p_j = 1$ のとき $A_0(\lambda)$ は $A(\lambda)$ に他ならない。しかしながら、 p_j は無限大に発散する設定で考えているため $A_0(\lambda)$ は $A(\lambda)$ の一般化ではないことに注意。

モチベーション 2. 非自励的の反復関数系の極限集合としての $A_0(\lambda)$: 一般に \mathbb{R}^d 上の非自励的の反復関数系 $\Phi = (\{\phi_i^{(j)}\}_{i \in I^{(j)}})_{j=1}^\infty$ (以下 NIFS と呼ぶ) とは、 \mathbb{R}^d 上の一樣縮小的な写像 $\phi_i^{(j)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ の集まり $\{\phi_i^{(j)}\}_{i \in I^{(j)}}$ ($I^{(j)}$ はある有限集合) の列をいう。各 $\lambda \in \mathbb{D}^*$ と $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、写像 $f_{0,\lambda}^{(j)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ と $f_{1,\lambda}^{(j)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f_{0,\lambda}^{(j)}(z) = \lambda z$ と $f_{1,\lambda}^{(j)}(z) = \lambda z + p_j$ で各々与える。 $I^\infty := \{0, 1\}^\infty$ とおく。各 $\lambda \in \mathbb{D}^*$ に対して、 $(\{f_{0,\lambda}^{(j)}, f_{1,\lambda}^{(j)}\}_{j=0}^\infty)$ のアドレスマップ $\pi_\lambda : I^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ を IFS の場合と同様に以下で定義する。

定義 1.4.

$$\pi_\lambda(\omega) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_{\omega_0, \lambda}(f_{\omega_1, \lambda} \cdots (f_{\omega_j, \lambda}(0))) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \omega_j \lambda^j$$

($\omega = \omega_0 \omega_1 \cdots \in I^\infty$).

このとき $A_0(\lambda)$ は以下の意味で $\text{NIFS}(\{f_{0,\lambda}^{(j)}, f_{1,\lambda}^{(j)}\}_{j=0}^\infty)$ の極限集合となる。

$$\pi_\lambda(I^\infty) = A_0(\lambda).$$

さらに Inui 氏 [6] によって Hutchinson 氏 [5] による IFS の”極限集合”の構成を完備距離空間上の NIFS に対して拡張したものがあある弱い条件下で与えられている。集合 $A_0(\lambda)$ は Inui 氏の意味における”極限集合”でもある。

注意することとして、あるコンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}$ で、「全ての j で $f_{1,\lambda}^{(j)}(X) \subset X$ となる」ものは存在しない。なぜなら $\{p_j : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ は非有界だからである。この点において、等角的な枠組みで NIFS の極限集合のハウスドルフ次元の一般論を展開している先行研究である [10] の枠組みに当てはまらない。

以下主結果を二つ与える。これらは定理 1.1 と定理 1.3 の類推物である。

主結果 A.

$$\dim_H(A_0(\lambda)) = \frac{\log 2}{-\log |\lambda|} \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{D}^* : 0 < |\lambda| < 1/\sqrt{2}\};$$

$$\mathcal{L}_2(A_0(\lambda)) > 0 \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{D}^* : 1/\sqrt{2} < |\lambda| < 1\} \setminus \tilde{\mathcal{M}}.$$

主結果 B. For any $0 < R < 1/\sqrt{2}$,

$$\dim_H \left(\left\{ \lambda \in \mathbb{D}^* : 0 < |\lambda| < R, \dim_H(A_0(\lambda)) < \frac{\log 2}{-\log |\lambda|} \right\} \right) \leq \frac{\log 2}{-\log R} < 2.$$

主結果の証明には前出の “*transversality method*” を使用する。

謝辞.

この研究は JSPS 科研費 JP 19J21038 の協力を受けております。京都大学数理解析研究所で本研究に関する講演の機会を頂き誠にありがとうございました。

2 Transversality method

ここでは Transversality method について説明する。そのために実軸上の色々な IFS の極限集合について見ていきたい。まず $\lambda \in (0, 1)$ に対して、

$$L_{0,1}(\lambda) := \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{0, 1\} \right\}$$

とおく。 $L_{0,1}(\lambda)$ は IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1\}$ の極限集合である。因みに $\lambda \in \mathbb{D}^*$ としたバージョンがセクション 1.1 で登場した $A(\lambda)$ である。 $L_{0,1}(\lambda)$ のハウスドルフ次元について調べてみる。図 1 の構成段階の一、二段階目で説明すると、IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1\}$ の作用は線分を λ 縮小して二つのコピーを端に配置するというものに対応し、ちょうど $\lambda = 1/2$ のところで二つの縮小した線分が重なる状況が生まれる。したがって

- $\lambda \in (0, 1/2)$ のとき: IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1\}$ は開集合条件を満たすことがわかり (分離していて), したがって $\dim_H(L_{0,1}(\lambda)) = -\log 2 / \log \lambda$ と計算できる。
- $\lambda \in [1/2, 1)$ のとき: $L_{0,1}(\lambda)$ は区間となるため, 集合としては自明であり, $\dim_H(L_{0,1}(\lambda)) = 1$ と求まる。



図 1. $L_{0,1}(\lambda)$ の構成段階

次に $\lambda \in (0, 1)$ に対して,

$$L_{0,1,2}(\lambda) := \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

とおく. $L_{0,1,2}(\lambda)$ は IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 2\}$ の極限集合である. $L_{0,1,2}(\lambda)$ のハウスドルフ次元について調べてみる. 図 2 の構成段階の一, 二段階目で説明すると, IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 2\}$ の作用は線分を λ 縮小して三つのコピーのうち二つを端に配置し, 残る一つは丁度真ん中に配置するというものに対応し, ちょうど $\lambda = 1/3$ のところで左と真ん中の線分, 真ん中と右の線分が同時に重なる. したがって

- $\lambda \in (0, 1/3)$ のとき: IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 2\}$ は開集合条件を満たすことがわかり, したがって $\dim_H(L_{0,1,2}(\lambda)) = -\log 3 / \log \lambda$ と計算できる.



図 2. $L_{0,1,2}(\lambda)$ の構成段階

- $\lambda \in [1/3, 1)$ のとき: $L_{0,1,2}(\lambda)$ は区間となるため, 集合としては自明であり, $\dim_H(L_{0,1,2}(\lambda)) = 1$ と求まる.

今度は $\lambda \in (0, 1)$ に対して,

$$L_{0,1,3}(\lambda) := \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{0, 1, 3\} \right\}.$$

と置いてみる. $L_{0,1,3}(\lambda)$ は IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 3\}$ の極限集合である. すると,

- $\lambda \in (0, 1/4)$ のとき: IFS $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 3\}$ は開集合条件を満たすことがわかり, したがって $\dim_H(L_{0,1,3}(\lambda)) = -\log 3 / \log \lambda$ と計算できる.



図 3. $L_{0,1,3}(\lambda)$ の構成段階

- $\lambda \in [1/4, 1/3)$ のとき: $\text{IFS}\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 3\}$ は開集合条件を満たさない. しかも区間にならないため集合として自明でない.

先ほどと異なる理由を図 3 の構成段階の一, 二段階目で説明すると, $\text{IFS}\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 3\}$ の作用は線分を λ 縮小して三つのコピーのうち二つを端に配置し, 残る一つは真ん中より左にずれた場所に配置するというものに対応する. したがって $\lambda = 1/4$ のところで左と中の線分が重なるが, 中と右の線分は重ならない. したがってこの場合は $L_{0,1}(\lambda), L_{0,1,2}(\lambda)$ の場合と異なり, 分離しているか, 区間かという簡単な状況ではない. 集合 $L_{0,1,3}(\lambda)$ は上記のように複雑な重複をもつ単純なモデルとなっており, これに関連する問題を $\{0, 1, 3\}$ 問題と呼ばれたりする. 因みに $\lambda \in [2/5, 1)$ ならば $L_{0,1,3}(\lambda)$ は区間となり, $\lambda \in [1/4, 2/5)$ のときに関しては別の議論となるためここでは省いて $\lambda \in [1/4, 1/3)$ のときだけを考える. $\lambda \in [1/4, 1/3)$ のときに対応する $L_{0,1,3}(\lambda)$ のハウスドルフ次元を調べることは容易ではないが, パラメータを連続的に動かすとき $\dim_H(L_{0,1,3}(\lambda))$ がどういう挙動を示すかは興味の対象である. 特に,

問 2.1 (M. Keane at "The dynamics of \mathbb{Z}^n actions" , Warwick, 20-24 September 1993).
関数 $[1/4, 1/3] \ni \lambda \mapsto \dim_H(L_{0,1,3}(\lambda))$ は連続か?

という問が提示された. これに対し, 以下の答えが示された.

命題 2.2 (M. Pollicott and K. Simon, 1995[8]). •

$$\dim_H(L_{0,1,3}(\lambda)) = \frac{\log 3}{-\log \lambda}$$

for \mathcal{L}_1 -a.e. $\lambda \in [1/4, 1/3]$ が成り立ち, さらに

- ある稠密な $[1/4, 1/3]$ の部分集合が存在してそこで

$$\dim_H(L_{0,1,3}(\lambda)) < \frac{\log 3}{-\log \lambda}.$$

特に $\lambda \mapsto \dim_H(L_{0,1,3}(\lambda))$ は連続でない. 下の現象 (次元降下と呼ぶ) に関する事実の証明も重要だが上の典型的な点に関する事実の証明の方が難しくそれが Transversality method である.

Transversality method を用いるためにアドレスマップを用意する. $\text{IFS}\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + 3\}$ のアドレスマップを $\Pi_\lambda : \{0, 1, 3\}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ とおくと, $\Pi_\lambda(\{0, 1, 3\}^\infty) =$

$L_{0,1,3}(\lambda)$ となり, $L_{0,1,3}(\lambda)$ の各点 x に対し, その”住所” $\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \{0,1,3\}^\infty$ が存在し, アドレスマップで $\Pi(\omega) = x$ と対応付けられる. 前述の開集合条件を課すと”ほとんど”各点 $x \in L_{0,1,3}(\lambda)$ と $\omega \in \{0,1,3\}^\infty$ が 1 対 1 となる場合が実現されるが (開集合条件より強い分離条件を課すと真に 1 対 1 となる), 開集合条件を課さない場合 (慣用的に重複がある状況という), すなわち x に対して住所が二つ以上ある場合に Transversality method は本質的に意味を持つ. この場合アドレスマップは以下のシンプルな形をもつ.

$$\Pi_\lambda(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \lambda^{j-1},$$

$\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \{0,1,3\}^\infty$. これを踏まえ, λ 変数の関数のなす空間 \mathcal{F} を導入する.

$$\mathcal{F} := \{\lambda \mapsto \Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau) : \omega, \tau \in \{0,1,3\}^\infty, \omega_1 \neq \tau_1\}.$$

このとき以下の条件を与える.

定義 2.3 (δ -横断性条件). $\delta > 0$ とする. ある区間 $J \subset [0,1]$ が \mathcal{F} に対して δ -横断性条件を満たすとは, もし, $|f(x)| < \delta$ ならば $|f'(x)| > \delta$ が全ての $f \in \mathcal{F}_C$ と全ての $x \in J$ に対して成り立つときにいう.

直感的には任意に $\omega, \tau \in \{0,1,3\}^\infty, \omega_1 \neq \tau_1$ なるアドレスを固定したときに二つの λ 変数の関数 $\Pi_\lambda(\omega)$ と $\Pi_\lambda(\tau)$ が傾き δ で横断的に交わる状況をさす (図 4 参照). 今の場合, J として $(1/4, 1/3)$ と取れる. このとき以下の命題が導かれる.

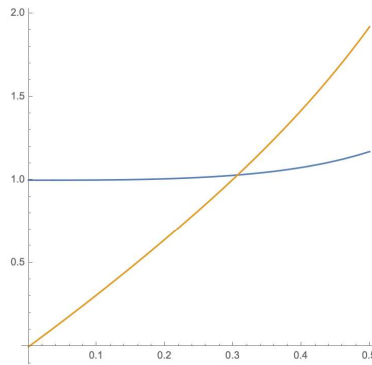


図 4. $\lambda \mapsto \Pi_\lambda(\omega)$ と $\lambda \mapsto \Pi_\lambda(\tau)$ のグラフ

命題 2.4. ある定数 $C > 0$ が存在して全ての $\omega, \tau \in \{0,1,3\}^\infty, \omega_1 \neq \tau_1$ と全ての $r > 0$ に対して,

$$\mathcal{L}_1(\{\lambda \in (1/4, 1/3) : |\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)| \leq r\}) \leq Cr$$

が成り立つ.

$s(\lambda_0) = -\log 3 / \log \lambda_0$ とおく. μ を $\{0,1,3\}^\infty$ 上の $(1/3, 1/3, 1/3)$ -ベルヌーイ測度, $\Pi_\lambda(\mu)$ を測度 μ の写像 Π_λ による \mathbb{R} 上の押しつけ測度とする ($\Pi_\lambda(\mu)(L_{0,1,3}) = 1$ に注意). 命題 2.4

を用いると以下の評価が可能である。任意の $\epsilon > 0$ と $\lambda_0 \in (1/4, 1/3)$ に対してある $a > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} & \int_{(\lambda_0-a, \lambda_0+a)} \left(\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{1}{|x-y|^{s(\lambda_0)-\epsilon}} d(\Pi_\lambda(\mu) \times \Pi_\lambda(\mu)) \right) d\mathcal{L}_1(\lambda) \\ &= \int_{(\lambda_0-a, \lambda_0+a)} \left(\int \int_{\{0,1,3\}^\infty \times \{0,1,3\}^\infty} \frac{1}{|\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)|^{s(\lambda_0)-\epsilon}} d(\mu \times \mu) \right) d\mathcal{L}_1(\lambda) \\ &= \int \int_{\{0,1,3\}^\infty \times \{0,1,3\}^\infty} \left(\int_{(\lambda_0-a, \lambda_0+a)} \frac{1}{|\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)|^{s(\lambda_0)-\epsilon}} d\mathcal{L}_1(\lambda) \right) d(\mu \times \mu) < \infty. \end{aligned}$$

上の評価と以下の補題

補題 2.5. [4, Theorem 4.13] $\nu : \mathbb{R}^m$ 上のボレル測度, $A \subset \mathbb{R}^m$ を $\nu(A) > 0$ なるボレル部分集合とする。もし

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{|x-y|^s} d\nu(x) d\nu(y) < \infty$$

がある $s \geq 0$ で成り立つならば $\dim_H(A) \geq s$.

から、以下の命題をえる。

命題 2.6. 任意の $\epsilon > 0$ と $\lambda_0 \in (1/4, 1/3)$ に対してある $a > 0$ が存在して、

$$\dim_H(L_{0,1,3}(\lambda)) \geq s(\lambda_0) - \epsilon$$

が \mathcal{L}_1 に関してほとんど全ての $\lambda \in (\lambda_0 - a, \lambda_0 + a)$ で成立。

以上が Transversality method を用いた議論の大まかな流れである。

注意 2.7. 一般的な関数のクラスを考察する場合、定義 2.3 よりもむしろそれから導かれる命題 2.4 を横断性条件と呼ぶことが多い ([11] 参照)。

3 主結果の証明の概要

ここでは集合 $A_0(\lambda)$ に関する主結果の証明の概要を与える。まずは $\lambda \in \mathbb{D}^* = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < 1\}$ に対して写像の列 $\{\pi_{n,\lambda}\}_{n=0}^\infty$ を以下で与える。

定義 3.1. 各 $\lambda \in \mathbb{D}^*$ と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、写像 $\pi_{n,\lambda} : I^\infty = \{0,1\}^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\pi_{n,\lambda}(\omega) := \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+j} \omega_j \lambda^j$$

($\omega = \omega_0 \omega_1 \cdots \in I^\infty$) で与える。

このとき

$$\pi_{n,\lambda}(I^\infty) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{0, p_{n+j}\} \right\}.$$

特に, $A_0(\lambda) = \pi_{0,\lambda}(I^\infty)$. 以下 $A_n(\lambda) := \pi_{n,\lambda}(I^\infty)$ とおく. 注意として, $\pi_{0,\lambda}$ とセクション 1 で与えたアドレスマップ π_λ は一致する. 非自励的な設定の場合, 単独のアドレスマップだけでなく, このようにアドレスマップの列を考察することが有効である. このとき以下のシンプルな命題が従う.

命題 3.2. 各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $\phi_{n,\lambda}(z) := \lambda z, \varphi_{n,\lambda}(z) := \lambda z + p_n$ とおくと,

$$A_n(\lambda) = \phi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda)) \cup \varphi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda)).$$

証明.

$$\begin{aligned} \phi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda)) \cup \varphi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda)) &= \left\{ \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_{n+j+1} \omega_j \lambda^j \right) + 0 : \omega_j \in \{0, 1\} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_{n+j+1} \omega_j \lambda^j \right) + p_n : \omega_j \in \{0, 1\} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+j} \omega_j \lambda^j : \omega_j \in \{0, 1\} \right\} = A_n(\lambda). \end{aligned}$$

□

すると系として以下をえる.

系 3.3. 任意の $n \in \mathbb{N}$ とパラメータ λ に対して,

$$\dim_H(A_0(\lambda)) = \dim_H(A_n(\lambda));$$

$$\mathcal{L}_2(A_0(\lambda)) \geq |\lambda|^{2n} \mathcal{L}_2(A_n(\lambda)).$$

証明. 命題 3.2 より, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} \dim_H(A_n(\lambda)) &= \max \{ \dim_H(\phi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda))), \dim_H(\varphi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda))) \} \\ &= \max \{ \dim_H(A_{n+1}(\lambda)), \dim_H(A_{n+1}(\lambda)) \} = \dim_H(A_{n+1}(\lambda)) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(A_n(\lambda)) &\geq \mathcal{L}_2(\phi_{n,\lambda}(A_{n+1}(\lambda))) \\ &= |\lambda|^{2n} \mathcal{L}_2(A_{n+1}(\lambda)) \end{aligned}$$

をえる.

□

次に $\tilde{\mathcal{M}}$ を近似する集合列で上述のアドレスマップの列に適合したものを構成する. 各 $j \in \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$G_{n,j} := \bigcup_{m \geq n} \left\{ \frac{-p_{m+j}}{p_m}, 0, \frac{p_{m+j}}{p_m} \right\} \cup \{-1, 1\}.$$

とおく. さらに,

定義 3.4. 各 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &:= \left\{ f(\lambda) = \pm 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} \lambda^j : a_{n,j} \in G_{n,j} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{M}}_n &:= \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : \text{ある } f \in \mathcal{F}_n \text{ が存在して } f(\lambda) = f'(\lambda) = 0 \}, \\ \mathcal{F} &:= \left\{ f(\lambda) = \pm 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^j : a_j \in \{-1, 0, 1\} \right\}, \\ \tilde{\mathcal{M}} &:= \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : \text{ある } f \in \mathcal{F} \text{ が存在して } f(\lambda) = f'(\lambda) = 0 \}.\end{aligned}$$

とおく. 注意として, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して集合 \mathcal{F}_n と \mathcal{F} は \mathbb{D} 上の正則写像全体の集合にコンパクト開位相を入れた空間のコンパクト部分集合である. このとき以下の補題が成り立つ.

補題 3.5.

$$\bigcap_{n \geq 0} \tilde{\mathcal{M}}_n = \tilde{\mathcal{M}}.$$

さて本格的にハウスドルフ次元の考察を行う. まず上からの評価であるが,

命題 3.6. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. このとき任意の $\lambda \in \mathbb{D}^*$ に対して,

$$\dim_H(A_n(\lambda)) \leq \frac{\log 2}{-\log |\lambda|}$$

が成り立つ. 特に $\dim_H(A_0(\lambda)) \leq -\log 2 / \log |\lambda|$.

が言える. 証明はやや煩雑だが, 比較的標準的なフラクタル幾何学の方法で示されるため省略. 次にハウスドルフ次元の下からの評価を考察する. まずこれもやはりやや煩雑だが標準的な方法で,

命題 3.7. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. このとき任意の $\lambda \in \mathbb{D}^* \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ に対して,

$$\dim_H(A_n(\lambda)) = \frac{\log 2}{-\log |\lambda|}$$

が成り立つ. 特に $\dim_H(A_0(\lambda)) = -\log 2 / \log |\lambda|$.

が言える. 問題は上記の”=” がより広い範囲 $\mathbb{D}^* \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ で a.e. に成り立つことを導くことである. アドレスマップ $\pi_{n,\lambda}$ と定義 3.4 の $\mathbb{D}^* \setminus \tilde{\mathcal{M}}_n$ を有効に用い, セクション 2 において用いた Transversality method を使用すれば,

定理 3.8. 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して,

(i)

$$\dim_H(A_n(\lambda)) \geq \frac{\log 2}{-\log |\lambda|} \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{D}^* : 0 < |\lambda| < 1/\sqrt{2} \} \setminus \tilde{\mathcal{M}}_n.$$

(ii)

$$\mathcal{L}_2(A_n(\lambda)) > 0 \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{D}^* : 1/\sqrt{2} < |\lambda| < 1\} \setminus \tilde{\mathcal{M}}_n.$$

をえる。これと系 3.3 と補題 3.5 より,

系 3.9.

$$\dim_H(A_0(\lambda)) \geq \frac{\log 2}{-\log |\lambda|} \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{D}^* : 0 < |\lambda| < 1/\sqrt{2}\} \setminus \tilde{\mathcal{M}};$$
$$\mathcal{L}_2(A_0(\lambda)) > 0 \text{ for } \mathcal{L}_2\text{-a.e. } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{D}^* : 1/\sqrt{2} < |\lambda| < 1\} \setminus \tilde{\mathcal{M}}.$$

をえる。これと命題 3.7 から, ほぼ主結果 A の主張を得た。主結果 B に関しては, 主結果 A を導いた議論と本質的に同様の議論をすれば導かれる。主結果の証明の詳細は [7] を参照。

参考文献

- [1] C. Bandt: *On the Mandelbrot set for pairs of linear maps*, Nonlinearity 15 (2002), 1127-47.
- [2] M. F. Barnsley and A. N. Harrington: *A Mandelbrot set for pairs of linear maps*, Physica 150 (1985), 421-432.
- [3] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [4] K. Falconer: *Fractal geometry-Mathematical foundations and applications(Third edition)*, WILEY, 2014.
- [5] J. Hutchinson, *Fractals and Self-Similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30, no. 5 (1981), 713-747.
- [6] K. Inui: *Study of the fractals generated by contractive mappings and their dimensions*, Ph.D. Thesis, Kyoto University, 2020, under the supervision of Hiroki Sumi. (<https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/253370>)
- [7] Y. Nakajima: *The Hausdorff dimension of some planar sets with unbounded digits*. To appear in Osaka Journal of Mathematics.
- [8] Y. Peres and W. Schlag: *Smoothness of projections, Bernoulli convolutions and the dimension of exceptions*, Duke Math J. 102 (2000), 193-251.
- [9] M. Pollicott and K. Simon: *The Hausdorff dimension of λ -expansions with deleted digits*, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (3) (1995), 967-983.
- [10] L. Rempe-Gillen and M. Urbański: *Non-autonomous conformal iterated function systems and Moran-set constructions*, Trans. Amer. Math. Soc., 368 (3) (2016), 1979-2017.
- [11] K. Simon, B. Solomyak and M. Urbański: *Hausdorff dimension of limit sets for parabolic IFS with overlaps*, Pacific J. Math. 201 (2001), 441-478.

- [12] B. Solomyak: *Measure and dimension for some fractal families*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 124 (1998), 531-46.
- [13] B. Solomyak and H. Xu: *On the 'Mandelbrot set' for a pair of linear maps and complex Bernoulli convolutions*, Nonlinearity 16 (5) (2003), 1733-1749.