

面積保存ツイスト写像の不変曲線が存在しないための十分条件

京都大学工学部情報学科 東浜有輝

Yuki Higashihama

Undergraduate School of Informatics and Mathematical Science,
Faculty of Engineering, Kyoto University

京都大学大学院情報学研究科 柴山允瑠

Mitsuru Shibayama

Graduate School of Informatics, Kyoto University,

概要

本論文では、 $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の面積保存ツイスト写像の不変曲線が、与えられた領域に存在しないための十分条件を与える。この十分条件を用いて、standard map と、それに高周波の摂動項を加えた写像について不変曲線が存在しないような摂動パラメータに関する条件を求める。

1 面積保存写像の変分構造

時間について T 周期的なハミルトン系の流れを $\varphi^{t,t_0}(q_0, p_0)$ と表すと、 $(q_0, p_0) \mapsto \varphi^{T,0}(q_0, p_0)$ はシンプレクティック写像である。また、自励的なハミルトン系において、エネルギーを固定したもとのポアンカレ写像をとると、シンプレクティック写像になる。したがって、シンプレクティック写像はハミルトン系の離散版といえる。2次元の相空間上のシンプレクティック写像は面積保存写像である。

面積保存写像 ϕ が可積分である (保存量をもつ) とき、ある正準座標 $(\theta, I) \in \mathbb{T} \times \mathcal{U}(\subset \mathbb{R})$ が存在して、ある写像 $h: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ によって、 $\phi(\theta, I) = (\theta + h(I), I)$ と表される (詳しくは [5] などを参照)。 I を $I_0 \in \mathcal{U}$ に固定すれば、 ϕ の不変円 $\mathbb{T} \times \{I_0\}$ が得られる。後で述べるツイスト条件を満たせば、KAM 定理により十分可積分に近い面積保存写像は多くの不変曲線を持つ。したがって、面積保存写像の不変曲線がないことは、可積分系から離れ、カオス的な領域が広がっていることを意味する。本稿では、ツイスト条件の下で面積保存写像の不変曲線が存在しないための十分条件を与える。

Ω を \mathbb{R}^2 の開集合または曲面とし、 C^2 級的面積保存写像 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ を考える。 $(X, Y) = f(x, y)$ とかくと、

$$f^*(dY \wedge dX) = dy \wedge dx$$

が成り立つ。

以下、 $\frac{\partial X}{\partial y} > 0$ を仮定する (ツイスト条件)。

$$d(YdX - ydx) = 0$$

であるから、 $dS = YdX - ydx$ となる $S(x, X)$ が少なくとも局所的には存在する。 S は

$$D_1 S(x, X) = -y, \quad D_2 S(x, X) = Y$$

を満たすものである。この S を $f(x, y)$ の母関数という。 (x_0, \dots, x_N) に対して、

$$H(x_0, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N S(x_{i-1}, x_i)$$

とおく. H を作用という.

x_0, x_N をそれぞれ a_0, a_N に固定したもとの, $(x_0, \dots, x_N) = (a_0, \dots, a_N)$ が H の臨界点となるとき (つまり, この点で $\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 (i = 1, \dots, N-1)$),

$$D_1 S(a_l, a_{l+1}) + D_2 S(a_{l-1}, a_l) = 0 \quad (l = 1, \dots, N-1)$$

だから

$$b_l = -D_1 S(a_l, a_{l+1}) \quad (l = 0, \dots, N-1) \quad (1)$$

とすると,

$$b_{l+1} = D_2 S(a_l, a_{l+1}) \quad (l = 1, \dots, N) \quad (2)$$

が成り立つ. よって, $f(a_l, b_l) = (a_{l+1}, b_{l+1}) (l = 0, \dots, N-1)$ を満たす. つまり, 写像の軌道が得られる.

segment (x_j, \dots, x_k) が minimal とは, $x_j = x_j^*, x_k = x_k^*$ を満たす任意の (x_j^*, \dots, x_k^*) に対して

$$H(x_j, \dots, x_k) \leq H(x_j^*, \dots, x_k^*)$$

を満たすことをいう. (x_j, \dots, x_k) が minimal なら, 臨界点である. また, $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ が minimal であるとは, 任意の $j < k$ に対して (x_j, \dots, x_k) が minimal であることをいう. minimal な $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ の集合を $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S)$ と書く.

例 1. $\omega(y)$ を関数とし,

$$F : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}; (x + \omega(y), y)$$

とする. これは面積保存写像である. $\omega'(y) > 0$ を満たすと仮定する (ツイスト条件). $(X, Y) = (x + \omega(y), y)$ より, g を $\omega(y)$ の逆関数とすると, 母関数は

$$S(x, X) = h(X - x)$$

と表される. ここで, $h(u) = \int g(u) du$ である.

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義凸 $h'' = \frac{1}{\omega'} > 0$ である. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ が臨界点であることと,

$$h'(x_i - x_{i-1}) = h'(x_{i+1} - x_i) \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

は同値になる. この場合, h' は単調増加だから単射であり, ある定数 r により $x_i = x_0 + ir$ とかける. なお, $y_i = h'(x_{i+1} - x_i) = g(x_{i+1} - x_i)$ で, 軌道 (x_i, y_i) は決まる. y_i は一定である. また, このとき, $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ であることもわかる.

2 Aubry-Mather 理論の概略

面積保存写像の不変曲線について論じた Aubry-Mather 理論の概略を述べる. 詳細については Bangert[2] を参照されたい. $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の面積保存写像に対応する作用 $H(x_j, \dots, x_k) = \sum_{i=j}^{k-1} S(x_i, x_{i+1})$ を考える. 各 $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$ に対し,

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} \frac{x_i}{i}$$

は ($\pm\infty$ で) 同じ値に収束する. この極限値を \mathbf{x} の回転数という.

$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\mathcal{M}_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{x} \text{ の回転数は } \alpha\}$$

とおく.

定理 2. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ である.

$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ に対し, $\pi_0(\mathbf{x}) = x_0, \pi_1(\mathbf{x}) = x_1$ とする. \mathcal{M}_α に対して,

$$C_\alpha = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{M}_\alpha \text{ s.t. } x_0 = \pi_0(\mathbf{x}), y_0 = -D_1 S(\pi_0(\mathbf{x}), \pi_1(\mathbf{x}))\}$$

とすると, C_α は f の不変集合である.

定理 3. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ なら, C_α は $\mathbb{T} \times \{0\}$ にホモトープな閉曲線あるいは *Cantor* 集合である.

定理 4. $\alpha \in \mathbb{Q}$ なら, C_α に周期軌道が存在する. また, C_α は周期軌道とその間のヘテロクリニック軌道からなる.

定理 5 (Birkhoff [3]). $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の面積保存写像 f がツイスト条件を満たし, $\{0\} \times \mathbb{T}$ にホモトープな不変曲線 Γ をもつとすると, Γ は *Lipschitz* グラフで表される. つまり, ある *Lipschitz* 関数 φ があって,

$$\Gamma = \{(s, \varphi(s)) \mid s \in \mathbb{T}\}$$

と表される.

定理 6 (Mather [13]). $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の面積保存写像 f が $\mathbb{T} \times \{0\}$ にホモトープな不変曲線 Γ をもつとすると, それはある α に対する C_α に含まれる.

3 standard map に対する KAM 理論と逆 KAM 理論

standard map $f(x, y) = (x + y - \varepsilon \sin x, y - \varepsilon \sin x)$ に対する不変曲線の存在/非存在について, 徹底的に研究されてきた. 黄金数の逆数を $\alpha_g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とし, 以下は α_g に対する不変曲線の存在/非存在の結果である.

Greene(1975) [7] 数値計算による観察では $0 < \varepsilon < \varepsilon_c := 0.97163540324$ で存在, $\varepsilon > \varepsilon_c$ で非存在

Celletti & Chierchia(1988) [4] $0 < \varepsilon < 0.68$ で存在証明

de la Llave & Rana (1990-91) [10, 11] $0 < \varepsilon < 0.91$ で存在証明

Figueras, Haro & Luque (2017) [6] $0 < \varepsilon < 0.9716$ で存在証明

Mather (1984) [13] $\varepsilon > 1.33$ で非存在証明

Aubry (1983) [1] $\varepsilon > 1.23$ で非存在証明

Mackay & Percival (1985)[12] $\varepsilon > 0.984$ で非存在証明

Jungreis (1991) [9] $\varepsilon > 0.9718$ で非存在証明



図 1 Standard map

4 主定理

segment (x_1, \dots, x_n) に対して

$$\nabla^2 H(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} \end{pmatrix} H(x_1, \dots, x_n)$$

とおく.

$y_a < y_b$ を固定する. $f(x, y) = (s(x, y), t(x, y))$ とし, 次の定理の x_1, x_3, \dots, x_n は x_2 と $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in [y_a, y_b]$ が与えられれば $s(x_1, y_1) = x_2, s(x_2, y_2) = x_3, \dots, s(x_{n-1}, y_{n-1}) = x_n$ を満たすように一意に定まる.

定理 7. $\mathbb{T} \times [y_a, y_b]$ に不変曲線が存在するならば $\forall n \in \mathbb{N} (\geq 3)$ と $\forall x_2$ に対して, $\exists y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in [y_a, y_b]$ があって, $\nabla^2 H(x_1, \dots, x_n)$ の固有値はすべて非負である.

定理において $n = 4$ とすると, 次の命題が得られる.

命題 8. ある実数 ξ_2 が存在して, 任意の $y_1, y_2, y_3 \in [y_a, y_b]$ に対して,

$$\frac{s_x(\xi_2, y_2)}{s_y(\xi_2, y_2)} + \frac{t_y(\xi_1, y_1)}{s_y(\xi_1, y_1)} < 0 \quad (3)$$

または

$$\left\{ \frac{t_y}{s_y}(\xi_1, y_1) + \frac{s_x}{s_y}(\xi_2, y_2) \right\} \left\{ \frac{t_y}{s_y}(\xi_2, y_2) + \frac{s_x}{s_y}(\xi_3, y_3) \right\} + \frac{t_x}{s_y}(\xi_2, y_2) < 0 \quad (4)$$

ならば, $\mathbb{T} \times [y_a, y_b]$ に ϕ の不変曲線は存在しない. ただし, ξ_1, ξ_3 は

$$s(\xi_1, y_1) = \xi_2, \quad s(\xi_2, y_2) = \xi_3$$

を満たす.

証明. 正方行列の首座小行列式とは, 同じ列番号と行番号に制限したものの行列式である. 行列の全ての固有値が非負であれば全ての首座小行列式は非負である. 定理において $n = 4$ とし, $\nabla^2 H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ の首座小行列式を計算すれば, (3) または (4) という条件が得られることを示す.

以下では, 関数 $F(u_1, u_2, \dots, u_m)$ に対して,

$$D_i F(u_1, u_2, \dots, u_m) := \frac{\partial}{\partial u_i} F(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

$$D_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} F(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (i, j \leq m)$$

と定める. 特に, $i = j$ のとき, $D_{ij} := D_i^2$ とかく.

$$dS = D_1 S dx + D_2 S dX$$

であるから,

$$D_1 S(x, X) = -y \quad (5)$$

$$D_2 S(x, X) = Y \quad (6)$$

である. x, X を独立変数, y, Y を従属変数とみなすと,

$$s_x + s_y y_x = 0 \quad (7)$$

$$s_y y_X = 1 \quad (8)$$

$$t_y y_X = Y_X \quad (9)$$

ツイスト条件より, $s_y > 0$ であるから, (5), (7) より,

$$D_1^2 S(x, X) = -y_x = \frac{s_x}{s_y}$$

(6), (8), (9) より,

$$D_2^2 S(x, X) = Y_X = \frac{t_y}{s_y}$$

(5), (8) より,

$$D_{12} S(x, X) = -y_X = -\frac{1}{s_y}$$

(6) より,

$$D_{21} S(x, X) = Y_x = t_x$$

が成り立つ. これらの式を用いて,

$$D_2^2 H(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = D_1^2 S(\xi_2, \xi_3) + D_2^2 S(\xi_1, \xi_2) = \frac{s_x(\xi_2, y_2)}{s_y(\xi_2, y_2)} + \frac{t_y(\xi_1, y_1)}{s_y(\xi_1, y_1)}$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned} & (D_2^2 S D_3^2 S - D_{23} S D_{32} S)(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ &= \{D_2^2 S(\xi_1, \xi_2) + D_1^2 S(\xi_2, \xi_3)\} \{D_2^2 S(\xi_2, \xi_3) + D_1^2 S(\xi_3, \xi_4)\} \\ & \quad - D_{12} S(\xi_2, \xi_3) D_{21} S(\xi_2, \xi_3) \\ &= \left\{ \frac{t_y}{s_y}(\xi_1, y_1) + \frac{s_x}{s_y}(\xi_2, y_2) \right\} \left\{ \frac{t_y}{s_y}(\xi_2, y_2) + \frac{s_x}{s_y}(\xi_3, y_3) \right\} + \frac{t_x}{s_y}(\xi_2, y_2) \end{aligned}$$

となるから, 定理より主張が成立する. □

5 例

standard map について, $n = 3$ として適用すると, $\varepsilon > 2$ のとき不変曲線が存在しないことがいえる. $n = 4$ とすると, 赤い領域では不変曲線が存在しないことがわかる.

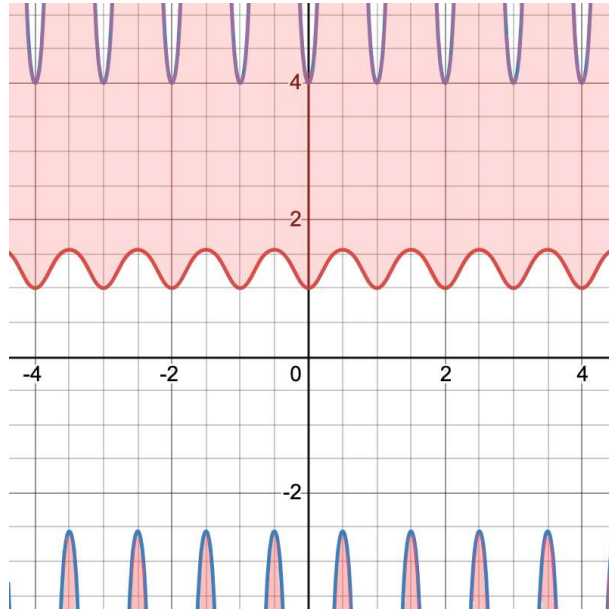


図2 $\Delta_2 < 0$ となるような (y_2, ϵ)

横軸は y_2 . 青線は $E_1(y_2)$, 赤線は $E_2(y_2)$.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + \frac{\epsilon_1}{2\pi} \sin 2\pi x + \frac{\epsilon_2}{4\pi} \sin 4\pi x \\ y + \frac{\epsilon_1}{2\pi} \sin 2\pi x + \frac{\epsilon_2}{4\pi} \sin 4\pi x \end{pmatrix}$$

の場合,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} = 2\epsilon_2 \cos^2 2\pi x_2 + \epsilon_1 \cos 2\pi x_2 - \epsilon_2 + 2$$

が負となるような実数 x_2 が存在するのは, 次の場合で不変曲線は存在しない.

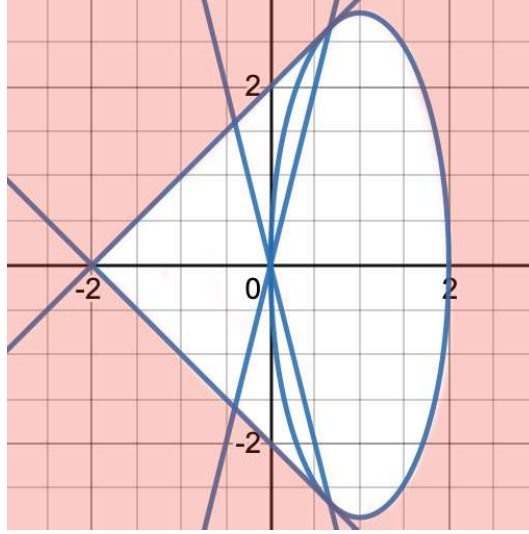


図3 $\Delta_3(\xi_2) < 0$ となる実数 ξ_2 が存在するような (ϵ_1, ϵ_2)

横軸は ϵ_2 , 縦軸は ϵ_1 .

$$\begin{aligned} \epsilon_2 = 0, & \quad |\epsilon_1| > 2 \\ \epsilon_2 > 0, & \quad \begin{cases} \epsilon_1 \leq -4\epsilon_2, \epsilon_1 < -\epsilon_2 - 2 \\ -4\epsilon_2 \leq \epsilon_1 \leq 4\epsilon_2, \frac{\epsilon_1^2}{8} + (\epsilon_2 - 1)^2 > 1 \\ \epsilon_1 \geq 4\epsilon_2, \epsilon_1 > \epsilon_2 + 2 \end{cases} \\ \epsilon_2 < 0, & \quad \begin{cases} \epsilon_1 \leq 0, \epsilon_1 < -\epsilon_2 - 2 \\ \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_1 > \epsilon_2 + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

次で表される ϕ を考える:

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(x, y) \\ t(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + f(x) \\ y + f(x) \end{pmatrix}$$

ただし, $f(x+1) = f(x)$ とする. このとき,

$$\frac{s_x(\xi_2, y_2)}{s_y(\xi_2, y_2)} + \frac{t_y(\xi_1, y_1)}{s_y(\xi_1, y_1)} = 2 + f'(\xi_2) =: \Delta_1(\xi_2, \epsilon)$$

であり,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{t_y}{s_y}(\xi_1, y_1) + \frac{s_x}{s_y}(\xi_2, y_2) \right\} \left\{ \frac{t_y}{s_y}(\xi_2, y_2) + \frac{s_x}{s_y}(\xi_3, y_3) \right\} + \frac{t_x}{s_y}(\xi_2, y_2) \\ & = (2 + f'(\xi_2))(2 + f'(\xi_3)) + f'(\xi_2) \\ & =: \Delta_2(\xi_2, y_2, \epsilon) \end{aligned}$$

となる. ただし, $\xi_3 = \xi_2 + y_2 + f(\xi_2)$ である.

(i) $f(x) = \frac{\epsilon}{2\pi} \sin 2\pi x$ のとき, ϕ を standard map という. このとき,

$$\Delta_1(\xi_2, \epsilon) = 2 + \epsilon \cos 2\pi \xi_2$$

である. m を整数とすると, $\epsilon > 2$ のとき, $\Delta_1(\frac{1}{2} + m, \epsilon) < 0$, $\epsilon < -2$ のとき, $\Delta_1(m, \epsilon) < 0$ となるから, 命題 3 より, $|\epsilon| > 2$ のとき, $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の任意の領域に ϕ の不変曲線は存在しない.

また,

$$\Delta_2(\xi_2, y_2, \epsilon) = (2 + \epsilon \cos 2\pi\xi_2) \left(2 + \epsilon \cos 2\pi \left(\xi_2 + y_2 + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin 2\pi\xi_2 \right) \right) + \epsilon \cos 2\pi\xi_2$$

である. この場合, $\Delta_2(\xi_2, y_2, \epsilon) < 0$ となるような, y_2 に依存しない ξ_2 が存在する ϵ の範囲を全て調べるのは難しい. そこで, $\xi_2 = \frac{1}{2}$ のとき, $\Delta_2(\xi_2, y_2, \epsilon) < 0$ となるような y_2 と ϵ の関係を求める. このとき,

$$\Delta_2(\xi_2, y_2, \epsilon) = (2 - \epsilon) \left(2 + \epsilon \cos 2\pi \left(\frac{1}{2} + y_2 \right) \right) - \epsilon$$

となり, $y_2 = \frac{1}{4} + l$ または $y_2 = \frac{3}{4} + l$ ($l \in \mathbb{Z}$) のとき, $\epsilon > \frac{4}{3}$ とすると, $\Delta_2 < 0$ となる.

$y_2 \neq \frac{1}{4} + l$ かつ $y_2 \neq \frac{3}{4} + l$ のとき, $(\frac{1}{4} + l, \frac{3}{4} + l)$ に対して,

$$\epsilon < 1 + \frac{-3 - \sqrt{(2 \cos 2\pi (\frac{1}{2} + y_2) - 3)^2 + 16 \cos 2\pi (\frac{1}{2} + y_2)}}{2 \cos 2\pi (\frac{1}{2} + y_2)} =: E_1(y_2)$$

または

$$\epsilon > 1 + \frac{-3 + \sqrt{(2 \cos 2\pi (\frac{1}{2} + y_2) - 3)^2 + 16 \cos 2\pi (\frac{1}{2} + y_2)}}{2 \cos 2\pi (\frac{1}{2} + y_2)} =: E_2(y_2)$$

とし, $(\frac{3}{4} + l, \frac{5}{4} + l)$ に対して,

$$E_2(y_2) < \epsilon < E_1(y_2)$$

とすると, $\Delta_2 < 0$ となる. このことを図示すると図 2 のようになる. 図 2 の横軸は y_2 である. 青線は $E_1(y_2)$, 赤線は $E_2(y_2)$ である. ただし, $E_2(y_2)$ は $y_2 = \frac{1}{4} + l$ または $y_2 = \frac{3}{4} + l$ では定義されていない. $E_2(y_2)$ の最大値は $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, 最小値は 1 である. $E_1(y_2)$ の極小値は 4 である. 図 2 の赤色の領域は $\Delta_2 < 0$ となるような (y_2, ϵ) の組を表す.

$y_2 = \pm \frac{1}{4} + l$ のときの議論と図 2 から, 命題 3 より, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < \epsilon < 4$ のとき, $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の任意の領域に ϕ の不変曲線は存在しないことがわかる.

以上より, $\epsilon > \frac{-1+\sqrt{17}}{2} = 1.56\dots$ のとき, $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の任意の領域に standard map の不変曲線は存在しない.

(ii) $f(x) = \frac{\epsilon_1}{2\pi} \sin 2\pi x + \frac{\epsilon_2}{4\pi} \sin 4\pi x$ のとき,

$$\begin{aligned} & \frac{s_x(\xi_2, y_2)}{s_y(\xi_2, y_2)} + \frac{t_y(\xi_1, y_1)}{s_y(\xi_1, y_1)} \\ &= 2\epsilon_2 \cos^2 2\pi\xi_2 + \epsilon_1 \cos 2\pi\xi_2 - \epsilon_2 + 2 \\ &=: \Delta_3(\xi_2) \end{aligned}$$

となる. $\Delta_3(\xi_2) < 0$ となるような実数 ξ_2 が存在するのは,

$$\begin{aligned} & \epsilon_2 = 0 \quad \text{かつ} \quad |\epsilon_1| > 2 \\ & \epsilon_2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} \epsilon_1 \leq -4\epsilon_2, & \epsilon_1 < -\epsilon_2 - 2 \\ -4\epsilon_2 \leq \epsilon_1 \leq 4\epsilon_2, & \epsilon_1^2/8 + (\epsilon_2 - 1)^2 > 1 \\ \epsilon_1 \geq 4\epsilon_2, & \epsilon_1 > \epsilon_2 + 2 \end{cases} \\ & \epsilon_2 < 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} \epsilon_1 \leq 0, & \epsilon_1 < -\epsilon_2 - 2 \\ \epsilon_1 \geq 0, & \epsilon_1 > \epsilon_2 + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

のときである. これを図示すると図 3 のようになる.

図 3 の赤色の領域は $\Delta_3(\xi_2) < 0$ となる実数 ξ_2 が存在するような (ϵ_1, ϵ_2) を表す. $\Delta_3(\xi_2)$ は y_2 に依存しないから, 命題 3 より, 図 3 の赤色の領域の (ϵ_1, ϵ_2) に対して, $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の任意の領域に ϕ の不変曲線は存在しない.

6 今後の展望

本稿の定理で与えた十分条件を手計算で扱うのは一般に困難であるが、数値計算であれば、定理の y_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) が $[y_a, y_b]$ を動くときに、 $\nabla^2 H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ の少なくとも 1 つの首座小行列式が負となるような ξ_2 を見つけることができるかもしれない。ただし、数値計算では、 y_i の値を有限個しかとることができないため、 $[y_a, y_b]$ の任意の y_i に対して定理の条件を満たすということを主張するには、さらなる議論が必要である。

また、本稿では $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上の面積保存ツイスト写像について考察したが、応用上は、しばしば \mathbb{R}^2 上の写像が扱われることがある。例えば、[8] においては、画像暗号化のアルゴリズムに Henon-Chebyshev map と呼ばれる

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a \cos^2(w \cos^{-1} x) + y \\ bx \end{pmatrix}, \quad (a, b, w \in \mathbb{R}, a \neq 0, w > 2)$$

というカオス写像が扱われている。この写像は $b = -1$ のとき、面積保存ツイスト写像になる。本稿の定理を $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ 上から \mathbb{R}^2 上へ拡張できれば、このような写像の不変曲線が存在しないための十分条件を与えることができる。さらに、常微分方程式系に帰着させることによって面積保存写像を構成するとき、本稿の定理を適用するためには、 $t(x, y)$ は x に関して周期 1 の周期関数でなければならなかったが、 \mathbb{R}^2 上へ拡張できれば、一般の任意関数 t_0 によって構成された $t(x, y)$ に対して定理を適用できるようになる。

謝辞

著者の一人柴山は、科研費 (18K03366) の助成を受けた。

参考文献

- [1] S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase. *Phys. D* **7** (1983), 240–258.
- [2] V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, *Dynamics reported, Dynam. Report.*, Vol. **1** (1988), 1-56.
- [3] G. D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.* **43** (1922), 1–119.
- [4] A. Celletti and L. Chierchia, Construction of Analytic KAM Surfaces and Effective Stability Bounds, *Comm. Math. Phys.* **118**(1988) 119–161.
- [5] M. Bruschi, O. Ragnisco, P.M. Santini, and G. Tu, Integrable symplectic maps, *Physica D Nonlinear Phenomena* **49** (1991), 273-294.
- [6] J.-L. Figueras, A. Haro and A. Luque, Rigorous computer assisted application of KAM theory: a modern approach, preprint: arXiv:1601.00084.
- [7] J.M. Greene, A method for determining a stochastic transition, *J. Math. Phys.*, **20** (1975) 1183–1201.
- [8] S. Huang, X. Kang, T. Li, F. Qi and H. Yang, 2D Henon-Chebyshev Chaotic Map for Image Encryption, *2019 IEEE 21st International Conference on High Performance Computing and Communications; IEEE 17th International Conference on Smart City; IEEE 5th International Conference on Data Science and Systems* (2019), 774-781.
- [9] I. Jungreis, A method for proving that monotone twist maps have no invariant circles, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **11** (1991) 79–84.
- [10] R. de la Llave and D. Rana, Accurate strategies for small divisor problems, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **22**(1990) 85–90.

- [11] R. de la Llave and D. Rana, Accurate strategies for K.A.M. bounds and their implementation. In *Computer aided proofs in analysis (Cincinnati, OH, 1989), volume 28 of IMA Vol. Math. Appl.*, pages 127–146. Springer, New York (1991).
- [12] R.S.MacKay and I.C.Percival, Converse KAM: theory and practice, *Comm.Math.Phys.* **98** (1985) 469–512.
- [13] J.N. Mather, Non-existence of invariant circles. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **4**(1984), 301–309.