特異ポテンシャル系の特異点解消とエネルギー固定問題への応用

京都大学大学院情報学研究科　柴山允瑠
Mitsuru Shibayama
Graduate School of Informatics, Kyoto University

概要

特異点をもつポテンシャル系について，指定したエネルギーをもつ周期解の存在を示す研究が古くからなされてきた．本論文では，特異点を正則化し，滑らかなポテンシャル系に変換することによるこの問題への試みについて紹介する．

1　エネルギー固定問題

$D \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$V(q)$ を D 上の滑らかな関数とする．$V(q)$ をポテンシャル関数とするポテンシャル系

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q}(q) \qquad (q \in D) \tag{1}$$

を考える．この各解はエネルギー

$$h = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + V(q)$$

を保存する．そこで，h を固定したときに，その値をエネルギー値としてもつ周期解が存在するか，という問題が考えられ，それに関して多くの研究がなされてきた．定数 $h \in \mathbb{R}$ に対して，

$$S_h = \left\{ (q, \dot{q}) \in D \times \mathbb{R}^N \mid \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + V(q) = h \right\}$$

とおく．そこで，S_h に含まれる周期解の存在について考える．

S_h がコンパクトな場合は，ポテンシャル系に限らない一般のハミルトン系について盛んに研究されてきた．Weinstein は S_h がコンパクトで接触型であれば周期解が存在するであろうと予想し，それは Viterbo[13] や Hofer & Zehnder[5] により肯定的に解決された．ポテンシャル系の場合は S_h は接触型なのでコンパクトであれば周期解が存在する．

そこで, S_h がコンパクトでない場合が問題として考えられる．ここでは, ポテンシャル関数 $V(q)$ が $0 \in \mathbb{R}^N$ を特異点に持つ場合を考え，特異点付近の振る舞いが

$$V(q) \sim -\frac{1}{|q|^a}$$

のように振る舞うとする．「のように振る舞う」の意味は論文ごとに微妙に異なる (90 年代前半までの結果については，[1] に整理されている)．少なくとも，

$$V(q) = -\frac{1}{|q|^a}$$

の摂動系は含まれる．周期固定のもとでの周期解の存在は

$$a > 1 \qquad (N \geq 2)$$

で示されている [2, 10, 12]．一方，エネルギー固定のもとでの周期解の存在は

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3} < a < 2(h < 0), \quad a > 2(h > 0) && (N = 3) \\ &1 < a < 2(h < 0), \quad a > 2(h > 0) && (N \geq 4). \end{aligned}$$

で示されている [3, 4, 9]．変分構造が大きく変わる境目の $a = 2$ の場合については，[11] で周期解の存在が示されている．[8] で，$1 < a < 2(h < 0, N \geq 2)$ の場合に，周期解の存在を示してはいるが，課されている大域的な条件が厳しい．弱い大域的な条件もとで，$1 < a < 2(h < 0, N \geq 2)$ に対して，周期解の存在を示すことがこの分野の問題の 1 つである[*1]．その証明の一つは Jacobi-Maupertuis 計量やその変形版

$$\mathcal{I}(q) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{q}|^2 d\tau \int_0^1 (h - V(q))d\tau \tag{2}$$

の臨界点を求めるという方法であった．

本論文では，自由度が 2 の特異点を持つポテンシャル系を考える．ポテンシャル関数は

$$V(q) = -\frac{1}{|q|^a} + f(q) \quad (q \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) \tag{A1}$$

の形で，$f(q)$ は原点も含め滑らかな $\mathbb{R}^2$ 上の関数で，

$$f(q) \to 0 \quad (|q| \to \infty) \tag{A2}$$

を満たすとする．

本稿では，特異点を正則化し，滑らかなポテンシャル系に置き換え，それによる周期解の存在問題への試みについて紹介する．

2　特異点を解消する変換

対応するラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + \frac{1}{|q|^a} - f(q)$$

である．$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ とし，$q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を $q = q_1 + iq_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とみなして，

$$q = z^\alpha$$

により $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に変換すると，

$$L_1 = \frac{\alpha^2}{2}|z|^{2(\alpha-1)}|\dot{z}|^2 + \frac{1}{|z|^{a\alpha}} - f(z^\alpha)$$

となる．これに対応するハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2\alpha^2|z|^{2(\alpha-1)}}|p_z|^2 - \frac{1}{|z|^{a\alpha}} + f(z^\alpha)$$

*1 $0 < a < 1$ の場合は，$V(q) = -\frac{1}{|q|^a}$ について計算してみると周期解より衝突解の作用積分の方が小さくなるので，変分法により周期解を求めることはさらに難しい．

となる．ここで，$2(\alpha-1)=a\alpha$ となるように

$$\alpha=\frac{2}{2-a}$$

としよう．$f(z^{\alpha})$ が関数として意味を持たないといけないので，次を仮定する．

α は有理数 $k/l(k,l\in\mathbb{N}$ は互いに素) で，

$$f(q)=f(\exp(2\pi ki/l)q) \tag{A3}$$

を仮定する $(i=\sqrt{-1})$.

すると，$g(z)=f(z^{\alpha})$ が一価の関数として定まる．ハミルトニアンは

$$H(z,p_z)=\frac{1}{|z|^{2a/(2-a)}}\left(\frac{1}{2\alpha^2}|p_z|^2-1\right)+g(z) \tag{H}$$

となる．正準方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{1}{\alpha^2|z|^{2a/(2-a)}}p_z\\ \frac{dp_z}{dt}&=\frac{2a}{(2-a)|z|^{4/(2-a)}}\left(\frac{1}{2\alpha^2}|p_z|^2-1\right)z-\nabla g(z)\end{aligned}$$

である．ここで，ハミルトニアン (H) の値を $h<0$ に固定すると，

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{1}{\alpha^2|z|^{2a/(2-a)}}p_z\\ \frac{dp_z}{dt}&=\frac{2a}{(2-a)|z|^{2/(2-a)}}\left(h-g(z)\right)z-\nabla g(z)\end{aligned}$$

と表すことができる．

ここで，

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\alpha^2|z|^{2a/(2-a)}}$$

で独立変数を s に変換すると，

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds}&=p_z\\ \frac{dp_z}{ds}&=\frac{2a\alpha^2}{(2-a)}\left(h-g(z)\right)|z|^{(-2+2a)/(2-a)}z-\alpha^2|z|^{2a/(2-a)}\nabla g(z)\end{aligned}$$

となり，これは，

$$\begin{aligned}\Gamma(z,p_z)&=\alpha^2(|z|^{2a/(2-a)}(H(z,p_z)-h)+1)\\ &=\frac{1}{2}|p_z|^2+\alpha^2|z|^{2a/(2-a)}(g(z)-h)\end{aligned}$$

をハミルトニアンとする正準方程式の $\Gamma=\alpha^2$ を満たす解になる．以上の変換は Kepler 問題に対する Levi-Civita 変換を一般化したものであり，以下ではこの変換や座標も Levi-Civita 変換，Levi-Civita の座標と呼ぶことにする．

$1\le a<2$ ならば $2\le 2a/(2-a)$ なので C^2 級であり，$h<0$ なら $\Gamma=\alpha^2$ を満たす点の集合はコンパクトなので Hofer-Zehnder[5], Viterbo[13] の結果が適用できる．そのことにより次が得られる．

命題 1. $1\le a<2$ とする．Γ をハミルトニアンとするハミルトン系で，$\Gamma=\alpha^2$ を満たす周期解が少なくとも *1* つ存在する．

3　もとの系で対応する軌道

この結果をもとの系に戻したときの対応する解について考える．$q = z^\alpha$ で α は有理数 $k/l (k, l \in \mathbb{N}$ は互いに素) であったので，z でみたときの各軌道について，q では l 個の軌道が対応する．

$q = 0$ は特異点であり，解がこの点に達することを衝突 (collision) と呼ぶことにする．命題 1 で得られた (衝突しない) 周期解が原点 $z = 0$ を通過しなければ，もとの系でも周期解になる．得られた周期解が原点 $z = 0$ を通る場合，対応するもとの解は衝突をもつ．衝突前後では Levi-Civita の座標でみると滑らかにつながっている．以上より，まとめると次の通りである．

定理 2. *ポテンシャル関数が (A1) の形で，f は (A2), (A3) を満たし，$1 \le a < 2$ は有理数とする．このとき，$\alpha = 2/(2-a)$ を $k/l (k, l \in \mathbb{N}$ は互いに素) とすると，そのポテンシャル系には $H = h$ を満たす周期解か，あるいは衝突を持つ解で Levi-Civita の座標でみると滑らかになるような解が少なくとも l 個存在する．*

注意 3.

1. (A1) のポテンシャル系について，ある $T_1 < T_2$ があって，

$$\lim_{t \to T_1 + 0} q(t) = 0, \quad \dot{q}(T_2) = 0$$

を満たす解 $q(t)$ を *collision-brake* 軌道と呼ぶ．*collision-brake* 軌道が少なくとも一つあることは，0 と

$$\{q \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \mid V(q) = h\}$$

を結ぶ曲線のクラスで，(2) の最小点を取ることで比較的容易に示すことができる *([6] を参照)*．定理 *2* で得られた解が *collision-brake* 軌道の可能性もある．

2. $q(t)$ が解であれば，(A3) より $\exp(2\pi ik/l)q(t)$ も解であるから，*1* 個解があれば l 個あるのは自明である．
3. 定理 *2* の解が衝突するかどうかは *Levi-Civita* の座標で $z = 0$ を通るかどうかに依り，判別するのは難しい．
4. 今回は特異点を滑らかにするために仮定 *(A3)* が必要であった．α が自然数の場合，つまり $a = (2k-1)/k (k \in \mathbb{N})$ 型の有理数の場合は $\alpha = k$ となり仮定 *(A3)* は自動的に満たされる．そうでない場合は，この仮定がないと変換後のポテンシャル関数が多価関数になってしまう．
5. 今回用いた特異点の正則化は *2* 次元特有のもので，一般次元化は困難であると思われる．

謝辞

本研究は JST さきがけ (JP1159274) と科研費 (18K03366) の助成を受けた．

参考文献

[1] A. Ambrosetti & V. Coti Zelati, *Periodic solutions of singular Lagrangian systems,* Birkhäuser Boston, 1993.

[2] A. Bahri & P. H. Rabinowitz, A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials, *J. Funct. Anal.*, **82** (1989), 412-428.

[3] V. Benci & F. Giannoni, Periodic solutions of prescribed energy for a class of Hamiltonian systems with singular potentials, *J. Differential Equations*, **82** (1989), 60-70.

[4] C. Greco, Remarks on periodic solutions, with prescribed energy, for singular Hamiltonian systems, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **28** (1987), 661-672.

[5] Hofer, H. & Zehnder, E., Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo, *Invent. Math.*, **90** (1987), 1-9.

[6] P. H. Rabinowitz, A note on periodic solutions of prescribed energy for singular Hamiltonian systems. *J. Comput. Appl. Math.* **52** (1994), 147-154.

[7] H. Seifert, Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. *Math. Z.* **51** (1948), 197–216.

[8] M. Shibayama, Periodic solutions for a prescribed-energy problem of singular Hamiltonian systems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **37** (2017), 2705-2715.

[9] K. Tanaka, A prescribed energy problem for a singular Hamiltonian system with a weak force, *J. Funct. Anal.*, **113** (1993), 351-390.

[10] K. Tanaka, Noncollision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **10** (1993), 215-238.

[11] K. Tanaka, Periodic solutions for singular Hamiltonian systems and closed geodesics on non-compact Riemannian manifolds, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Liéaire* **17** (2000), 1-33.

[12] 田中和永，変分問題入門—非線形楕円型方程式とハミルトン系，岩波書店，2008.

[13] C. Viterbo, A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **4** (1987), 337-356.