一変数留数計算について

Univariate Residue Calculus

九州大学　深作亮也 [*1]
Ryoya Fukasaku
Kyushu University

新潟大学　田島慎一 [*2]
Shinichi Tajima
Niigata University

1 はじめに

有理数全体からなる体 $\mathbb{Q}$ を K, 複素平面 $\mathbb{C}$ を X で表す. $f(x) \in K[x]$ を既約多項式, $m \in \mathbb{Z}$ を非負整数として, $Z_f = \{x \in X : f(x) = 0\}$ とおく. 多項式 $h(x) \in K[x]$ に対して点 $\beta \in Z_f$ での以下の留数を考える:

$$\mathrm{res}_\beta \left(\frac{h(x)}{f(x)^m} dx \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_C \frac{h(x)}{f(x)^m} dx,$$

ただし C はその内部に $\beta \in Z_f$ を含み, その他の極を含まないような単純閉曲線である.

留数値は有理関数自体ではなく, その主要部のみに依存して決まる. そして, 一変数の有理関数の主要部に着目することは一次代数的局所コホモロジー類に着目することに他ならない. 実際, Z_f に台を持つ一次代数的局所コホモロジー群は

$$H^1_{[Z_f]}(K[x]) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{Ext}^1_{K[x]}(K[x]/\langle f(x)^i \rangle, K[x])$$

と定義されるが,

$$H^1_{[Z_f]}(K[x]) \simeq K[x]\langle *Z_f \rangle / K[x]$$

を満たす, ここで $K[x]\langle *Z_f \rangle$ は高々Z_f に台を持つような有理関数全体である. 一次代数的局所コホモロジー群 $H^1_{[Z_f]}(K[x])$ の要素は代数的局所コホモロジー類と呼ばれ, 同一の主要部を定めるような有理関数たちの同値類になっている. 有理関数 $1/f(x)^m$ が定める代数的局所コホモロジー類を $[1/f(x)^m]$ と表し, 有理関数 $f'(x)/f(x)$ が定める代数的局所コホモロジー類を $[f'(x)/f(x)]$ と表すことにする.

代数的局所コホモロジー類 $[1/f(x)^m]$ は, 以下のような $m-1$ 階の微分作用素 S によって, $[1/f(x)^m] = S[f'(x)/f(x)]$ と表すことができる ([4]):

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{m-1-i} s_i,$$

[*1] 〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　E-mail: fukasaku@math.kyushu-u.ac.jp
[*2] 〒 950-2102 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp

ただし各 s_i は多項式 $s_i(x) \in K[x]/f$ が定める零階の微分作用素を意味する．このとき, 留数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C h(x)\left[\frac{1}{f(x)^m}\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C h(x)S\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C h(x)\left(\sum_{i=0}^{m-1}\quad\left(-\frac{d}{dx}\right)^{m-1-i} s_i(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\right)dx
\end{aligned}$$

となるので, 部分積分によって

$$\mathrm{res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C\left(\sum_{i=1}^{m-1} s_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1-i} h(x)\right)\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx$$

のように書き直すことができる．上に現れている微分作用素は S の形式随伴 S^* である, つまり

$$S^* = \sum_{i=1}^{m-1} s_i\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1-i}.$$

従って, 留数を

$$\mathrm{res}_\beta\left(\frac{h(x)}{f(x)^m}dx\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C(S^*h(x))\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx = (S_i^*h)(\beta)$$

のように計算できる．実際に, $f'(x)/f(x)$ は複素数係数を持つ有理関数として以下を満たす:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{\alpha\in Z_f}\frac{1}{x-\alpha}.$$

上のように, $[1/f(x)^m] = S[f'(X)/f(x)]$ を満たす微分作用素 S を計算できさえすれば, あとは留数が簡単な計算によって得られる．こうした観点から [1] で効率的な留数計算アルゴリズムが提案され, [2] ではその更なる効率化が達成された．これらの先行研究 [1, 2] では上のように分母の既約多項式が一つの場合と, 複数の場合でのアルゴリズムが各々示されている．これらのアルゴリズムは $K[x]/f$ での計算を利用できるため, 各ステップで計算された結果の多項式が $\deg f$ 以上の次数を持たない．従って, 効率的に留数を計算できる (その他の利点は節 5 を参照して欲しい)．本稿では, これらの既存の結果を紹介する．そして, 分母の既約多項式が複数の場合のアルゴリズムを新たに提案し, 既存のアルゴリズムと比較する．

2　留数計算公式 (一つの分母既約因子を持つ場合)

$\chi = d/dx$ として, D によって微分作用素環 $K[x,\chi]$ を表すことにする．本節では $f(x) \in K[x]$ を既約とし, $m \in \mathbb{Z}$ を非負とし, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f(x)^m], \delta = [f'(x)/f(x)] \in H^1_{[Z_f]}(K[x])$ を考える．

微分作用素 $P = f(x)\chi + mf'(x)$ とおくと, σ は以下の微分方程式系を満たす:

$$P\sigma = 0, \quad f^m\sigma = 0$$

そこで, 左 D 加群 M, N を, 各々, $M = D/(DP + Df^m), N = D/Df$ によって定めることにする．微分方程式系 M は Z_f に台を持つホロノミック系であり, その代数的局所コホモロジー解の空間は

$$\dim \mathrm{Hom}_D(M, H^1_{[Z_f]}(K[x])) = \deg f$$

を満たすようなベクトル空間となる.

ここで, 以下の自然な準同型に着目していくことにする:

$$\mathrm{Hom}_D(M,N)\times\mathrm{Hom}_D(N,H^1_{[Z_f]}(K[x]))\to\mathrm{Hom}_D(M,H^1_{[Z_f]}(K[x])).$$

D 加群 M から N への D 準同型全体のなす空間 $\mathrm{Hom}_D(M,N)$ はホロノミック系 M に対するネーター作用素の空間に他ならない ([4]). ここで, ネーター作用素 $r\in\mathrm{Hom}_D(M,N)$ が $1 \bmod DP+Df^m$ の r による像 $r(1 \bmod DP+Df^m)\in N$ を定めることで一意的に決まることに注意する. そして, 零でないネーター作用素 $r\in\mathrm{Hom}_D(M,N)$ を定める微分作用素 R を考える. このとき, 解空間 $\mathrm{Hom}_D(M,H^1_{[Z_f]}(K[x]))$ を

$$\mathrm{Hom}_D(M,H^1_{[Z_f]}(K[x]))=\{R(c(x)\delta):c(x)\in K[x]/f\}$$

と表すことができる ([4]). まず, そのような微分作用素 R を特徴付けていく.

補題 1 ([2, 補題 2.1])
$R_i=(-d/dx)^i(f'(x))^i$ とおくと, $\mathrm{Hom}_D(D/Df(x)^m,N)$ は $R_0,R_1,\ldots,R_{m-1}$ で生成される. そこで

$$R=\sum_{i=0}^{m-1}R_{m-1-i}r_i\quad(r_i(x)\in K[x]/f)$$

なる微分作用素 $R\in\mathrm{Hom}_D(M,N)$ を考える, ここで r_i は $r_i(x)\in K[x]/f$ が定める零階微分作用素である. このとき, $PR\in Df$ は, $r_i(x)$ が f を法として以下の漸化式を満たすことと同値である:

$$r_i(x)=-\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i}\left\{\prod_{k=1}^{j}(m-1-i+k)\right\}\frac{mj+i-j}{(j+1)!}f^{(j+1)}(x)(f'(x))^{j-1}r_{i-j}(x).\quad(i=1,2,\ldots,m-1)$$

次に, $\sigma=S\delta$ なる微分作用素 S を特徴付ける.

補題 2 ([2, 補題 2.2])
微分作用素 R が補題 *1* の漸化式を満たすと仮定する. また, $u(x)\in K[x]/f$ が以下の条件を満たすとする:

$$(m-1)!(f'(x))^{2m-1}u(x)=1 \bmod f.$$

このとき, $\sigma=Ru\delta$ が満たされる.

補題 1 と補題 2 をもとにアルゴリズムを与える. 各ステップでの計算が $K[x]/f$ での計算から構成されていて, $\deg f$ 以上の次数を持つ計算結果は各ステップに現れていない.

アルゴリズム 1

入力: 既約多項式 $f(x)\in K[x]$, 非負整数 $m\in\mathbb{Z}$, 多項式 $h(x)\in K[x]$.
出力: 各 $\beta\in Z_f=\{x\in X:f(x)=0\}$ に対し $\varrho(\beta)=\mathrm{res}_\beta(h(x)/f(x)^m dx)$. を満たす多項式 $\varrho(x)\in K[x]$

$r_0(x)\leftarrow 1$
for i from 1 to $m-1$ **do**
  $r_i(x)\leftarrow -\frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i}\left\{\prod_{k=1}^{j}(m-1-i+k)\right\}\frac{mj+i-j}{(j+1)!}f^{(j+1)}(x)(f'(x))^{j-1}r_{i-j}(x) \bmod f$
end for
$R^*h(x)\leftarrow\sum_{i=0}^{\min(m-1,\deg h)}(f'(x))^i r_{m-1-i}(x)h^{(i)}(x) \bmod f$
$u(x)\leftarrow(m-1)!(f'(x))^{2m-1}u(x)=1 \bmod f$ なる $K[x]$ の多項式
$\varrho(x)\leftarrow u(x)\cdot R^*h(x) \bmod f$
return $\varrho(x)$

3 留数計算公式 (複数の分母既約因子を持つ場合)

既約多項式 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\ell(x) \in K[x]$, 非負整数 $m_1, m_2, \ldots, m_\ell \in \mathbb{Z}$, 多項式 $h(x) \in K[x]$ に対して

$$\frac{h(x)}{f_1(x)^{m_1} f_2(x)^{m_2} \cdots f_\ell(x)^{m_\ell}}.$$

と表される有理関数を考え, $Z_k = \{x \in X : f_k(x) = 0\}$ $(1 \leq k \leq \ell)$ とおく. ここで, 前節の場合と同様に

$$\sigma = \left[\frac{1}{f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_\ell^{m_\ell}}\right]$$

のような $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_\ell$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類を考える. ここで, σ が

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\ell} \sigma_k$$

のような直和分解を持つことに注意する, ただし $\sigma_k \in H^1_{[Z_{f_k}]}(K[x])$ である. そして, $\delta_k = [f_k'(x)/f_k(x)]$ とおく. 本節では $\sigma_k = S_k \delta_k$ を満たす $m_k - 1$ 階の微分作用素 $S_k \in D$ を計算するための漸化式を 2 つ紹介する. 最初に新しい漸化式を紹介し, 次に先行研究 [2] で示された漸化式を紹介し, 最後にこれらを比較する.

3.1 新公式

まず, $k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ を固定する. 次に, 以下のように二つの多項式を定める:

$$p_1 = f_k \prod_{1 \leq j \leq \ell}^{j \neq k} f_j^{m_j}, \quad p_2 = f_k' \prod_{1 \leq j \leq \ell}^{j \neq k} f_j^{m_j}.$$

ここで, 以下の微分作用素を考える:

$$P = -(-\chi) p_1 + (m-1) p_2,$$

代数的局所コホモロジー類 σ は以下の微分方程式系を満たす:

$$\begin{cases} P\sigma = 0, \\ (f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_\ell^{m_\ell})\sigma = 0. \end{cases}$$

微分作用素は局所作用素なので $P\sigma = 0$ から $P\sigma_k = 0$ を得る. 各 $\beta \in Z$ で $D/(DP + D(f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_\ell^{m_\ell}))$ は単純だから, $\sigma_k = S_k \delta_k$ であるような S_k を前節と同様に計算できる.

$$f = f_k, \quad m = m_k, \quad g = \prod_{1 \leq j \leq \ell}^{j \neq k} f_j^{m_j}, \quad \sigma = \sigma_k, \quad \delta = \delta_k$$

とする.

$$R = \sum_{i=0}^{m-1} R_{m-1-i} r_i \quad (r_i(x) \in K[x]/f), \qquad R_i = (-\chi)^i (f'g)^i$$

とおく, ここで各 r_i は多項式 $r_i(x) \in K[x]/f$ が定める零階微分作用素である.

定理 3
$PR \in Df$ は, 各 $i \in \{1, \dots, m-1\}$ に対して r_i が f を法として以下の漸化式を満たすことと同値である:

$$r_i = -\frac{1}{i}\left\{\sum_{j=1}^{i}\left((m-1)\binom{m-1-i+j}{j}p_2^{(j)} - \binom{m-1-i+j}{j+1}p_1^{(j+1)}\right)p_2^{j-1}r_{i-j}\right\}.$$

証明 $PR = \sum_{i=0}^{m-1} R_i w_i$ とおく. このとき, $PR = 0 \bmod Df$ は, 各 $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ に対して

$$w_i = 0 \bmod f$$

が満たされることと同値である. まず, 各 PR_{m-1-i} はライプニッツ則から以下のように表すことができる:

$$PR_{m-1-i} = \sum_{j=0}^{m-1-i} R_{m-1-i-j}\left\{(m-1)\binom{m-1-i}{j}p_2^{(j)} - \binom{m-1-i}{j+1}p_1^{(j+1)}\right\} \bmod Df.$$

上の関係を使って各 w_i を求めると $w_{m-1} = 0 \bmod f$ が直ちにわかり, w_{m-1-i} も具体的に書き表すことで

$$w_{m-1-i} = p_2\left\{ir_i + \sum_{j=1}^{i}\left((m-1)\binom{m-1-i+j}{j}p_2^{(j)} - \binom{m-1-i+j}{j+1}p_1^{(j+1)}\right)\right\} \bmod f$$

$$(i = 1, 2, \dots, m-1)$$

となる. そして $p_2 = f'g \neq 0 \bmod f$ なので, 上の漸化式が得られる.

以下の証明でも上の証明のようにライプニッツ則を使う.

定理 4
微分作用素 R は定理 *3* の漸化式を満たすとする. $u \in K[x]$ が

$$(m-1)!(f')^{2m-1}g^m u = 1 \bmod f$$

を満たすならば, $\sigma = Ru\delta$ が満たされる.
証明 $W = Ru$ とおく. $PW = PRu = 0 \bmod Df$ なので代数的局所コホモロジー類 $\tau = W\delta$ は微分方程式

$$P\tau = f^m\tau = 0 \bmod Df$$

を満たす. そして, $f^{m-1}R = (m-1)!(f')^{2m-2}g^{m-1} \bmod Df$ によって以下が仮定から得られる:

$$f'f^{m-1}W = (m-1)!(f')^{2m-1}g^{m-1}u = 1 \bmod Df.$$

微分方程式系 $P\tau = f^m\tau = 0 \bmod Df$ を満たし, 条件 $f'f^{m-1}\tau = \delta$ を満たすような代数的局所コホモロジーは σ のみなので $Ru\delta = \sigma$ が証明された.

上の定理によって, 一般の場合でも, 部分分数分解なしで, 各極における留数を計算できる. 次の節では既存の結果を紹介する.

3.2 既存公式

まず, 以下のように二つの多項式を定める:

$$q_1 = -\prod_{1\le j\le \ell} f_j, \quad q_2 = \sum_{k=1}^{\ell} m_k f_k' \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j.$$

ここで, 以下の微分作用素を考えることにする:

$$Q = q_1(-\chi) + q_2,$$

代数的局所コホモロジー類 σ は以下を満たすので, 前節同様に $\sigma_k = S_k\delta_k$ を満たす S_k を計算できる:

$$\begin{cases} P\sigma = 0, \\ (f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_\ell^{m_\ell})\sigma = 0. \end{cases}$$

以下のように定める:

$$f = f_k, \quad m = m_k, \quad a = \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j, \quad \sigma = \sigma_k, \quad \delta = \delta_k.$$

以下の微分作用素 T を考える:

$$T = \sum_{i=0}^{m-1} T_{m-1-i} t_i \quad (t_i(x) \in K[x]/f), \qquad T_i = (-\chi)^i (f'g)^i,$$

とおく, ここで各 t_i は多項式 $t_i(x) \in K[x]/f$ が定める零階微分作用素である.

定理 5
$PT \in Df$ は, 各 $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ に対して t_i が f を法として以下の漸化式を満たすことと同値である:

$$t_i = -\frac{1}{i}\left\{\sum_{j=1}^{i}\left(\binom{m-1-i+j}{j} q_2^{(j)} + \binom{m-i+j}{j+1} p_1^{(j+1)}\right)(f'a)^{j-1} t_{i-j}\right\}.$$

定理 6
まず $g = \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j^{m_j}$ とする. 微分作用素 T は定理 5 の漸化式を満たすとする. $v \in K[x]$ が

$$(m-1)!(f')^{2m-1} a^{m-1} g v = 1 \bmod f$$

を満たすならば, $\sigma = Tv\delta$ が満たされる.

3.3 比較

比較を行う前に二つのアルゴリズムを与える. まず, 節 3.1 の定理をもとにアルゴリズムを与える.

アルゴリズム 2

入力: 既約多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_\ell \in K[x]$, 非負整数 $m_1, m_2, \ldots, m_\ell \in \mathbb{Z}$, 多項式 $h \in K[x]$

出力: 各 $\beta \in Z_{f_k}$ に対して以下を満たすような多項式 $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\ell \in K[x]$

$$\varrho_k(\beta) = \mathrm{res}_\beta \left(\frac{h}{f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_\ell^{m_\ell}} dx \right)$$

1: **for** k from 1 to ℓ **do**
2: $\quad f \leftarrow f_k$, $m \leftarrow m_k$, $g \leftarrow \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j^{m_j}$, $p_1 \leftarrow fg$, $p_2 \leftarrow f'g$
3: $\quad r_0 \leftarrow 1$
4: $\quad$ **for** i from 1 to $m-1$ **do**
5: $\quad\quad r_i \leftarrow -\frac{1}{i}\left\{\sum_{j=1}^{i}\left((m-1)\binom{m-1-i+j}{j}p_2^{(j)} - \binom{m-1-i+j}{j+1}p_1^{(j+1)}\right)p_2^{j-1} r_{i-j}\right\} \bmod f$
6: $\quad$ **end for**
7: $\quad R^*h \leftarrow \sum_{i=0}^{\min(m-1, \deg h)} (f'g)^i r_{m-1-i} h^{(i)} \bmod f$
8: $\quad u \leftarrow$ 条件 $(m-1)!(f')^{2m-1} g^m u = 1 \bmod f$ を満たす多項式 $u \in K[x]/f$
9: $\quad \varrho_k \leftarrow u \cdot R^*h \bmod f$
10: **end for**
11: **return** $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\ell$

次に, 節 3.1 の定理をもとにアルゴリズムを与える.

アルゴリズム 3

入力: アルゴリズム 2 と同様

出力: アルゴリズム 2 と同様

1: $q_1 \leftarrow -\prod_{1\le j\le \ell}$, $q_2 = \sum_{k=1}^{\ell} m_k f_j' \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j$
2: **for** k from 1 to ℓ **do**
3: $\quad f \leftarrow f_k$, $m \leftarrow m_k$, $a \leftarrow \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j^{m_j}$, $g \leftarrow \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j$, $g \leftarrow \prod_{1\le j\le \ell}^{j\ne k} f_j^{m_j}$
4: $\quad t_0 \leftarrow 1$
5: $\quad$ **for** i from 1 to $m-1$ **do**
6: $\quad\quad t_i \leftarrow -\frac{1}{i}\left\{\sum_{j=1}^{i}\left(\binom{m-1-i+j}{j}q_2^{(j)} + \binom{m-i+j}{j+1}q_1^{(j+1)}\right)(f'a)^{j-1} t_{i-j}\right\} \bmod f$
7: $\quad$ **end for**
8: $\quad T^*h \leftarrow \sum_{i=0}^{\min(m-1, \deg h)} (f'a)^i t_{m-1-i} h^{(i)} \bmod f$
9: $\quad v \leftarrow$ 条件 $(m-1)!(f')^{2m-1} a^{m-1} g v = 1 \bmod f$ を満たす多項式 $v \in K[x]/f$
10: $\quad \varrho_k \leftarrow v \cdot T^*h \bmod f$
11: **end for**
12: **return** $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\ell$

注意 1

上のアルゴリズムは異なる微分作用素 P, Q をもとに与えられているので, 異なる手続きからなっている:

- アルゴリズム 2, ステップ 5 はアルゴリズム 3, ステップ 6 と異なる漸化式を計算する,
- アルゴリズム 2, ステップ 8 はアルゴリズム 3, ステップ 9 と異なる逆元多項式を計算する.

アルゴリズム 3 の q_1, q_2, a はアルゴリズム 2 の p_1, p_2 よりも簡略なので, アルゴリズム 3, ステップ 6 はアルゴリズム 2, ステップ 5 よりも軽い傾向がある. 一方で, アルゴリズム 2 の逆元因子の個数はアルゴリズム 3 よりも少なく, アルゴリズム 2, ステップ 8 はアルゴリズム 3, ステップ 9 よりも軽くなりやすい.

4　実験

数式処理システム SageMath に実装したアルゴリズム 2, 3 の計算時間を比較する．以下の表の二列目は入力の位数 $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$, 三列目は分子既約多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_\ell$ の最大次数 $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$, 四列目は $f_1, f_2, \ldots, f_\ell$ の非零係数の個数 $c_1, c_2, \ldots, c_\ell$ を表す．また, 分子多項式は $h(x) = x^2 - x + 1$ を利用した．

	$m_1, m_2, \ldots, m_\ell$	$d_1, d_2, \ldots, d_\ell$	$c_1, c_2, \ldots, c_\ell$
1	1, 2, 3, 5	323, 232, 111, 88	324, 233, 112, 89
2	1, 2, 3, 3, 5	323, 232, 111, 108, 88	324, 233, 112, 109, 89
3	2, 2, 2	313, 323, 333	314, 324, 334
4	3, 2, 3	313, 323, 333	314, 324, 334
5	2, 2, 3, 2, 2	303, 313, 323, 333, 343	304, 314, 324, 334, 344
6	3, 2, 2	323, 434, 535	324, 434, 535
7	2, 2, 2	323, 434, 535	324, 434, 535
8	2, 2, 2	666, 777, 888	667, 777, 889
9	2, 2, 2, 2, 2	555, 666, 777, 888, 999	555, 668, 777, 889, 1000
10	3, 3, 2	88, 323, 1221	89, 324, 1221
11	100, 500	3, 4	3, 2
12	100, 500	2, 3	3, 3
13	500, 100	2, 3	3, 3
14	500, 5	2, 50	3, 3
15	1000, 5	2, 8	3, 5
16	100, 100, 100	5, 6, 8	3, 4, 5
17	500, 20, 10	5, 6, 8	3, 4, 5
18	500, 100, 10	2, 3, 5	3, 3, 3
19	100, 100, 10	5, 10, 25	3, 6, 3
20	100, 100, 100, 20, 20	3, 4, 5, 6, 8	3, 2, 3, 4, 5

以下の表で, 上の入力に対するアルゴリズム 2, 3 の計算時間を示す (単位: 秒)．実験ではコア 3.2 GHz 6 Core Intel Core i7, メモリ 64 GB の macOS Big Sur 11.6 の計算機を利用した．以下の計算時間の表は前節の注意の内容にも沿った結果となった．つまり, アルゴリズム 2 は分子既約多項式 $f_k(x)$ がかなり複雑な場合でも効率的に計算できる．一方で, アルゴリズム 3 は位数 m_k が大きくても効率的に計算できている．このように各々のアルゴリズムの利点が明確に示されている．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
アルゴリズム 2	51.0	71.9	103.3	154.5	470.3	355.0	283.5	2619.5	13009.6	238.6
アルゴリズム 3	60.4	84.7	134.3	180.6	617.1	429.1	358.4	3377.6	14445.4	267.4

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	41.6	48.0	46.8	25.6	4.8	53.4	133.3	64.5	22.6	16.4
	0.8	0.8	0.8	1.9	3.2	0.2	1.3	0.8	0.3	0.2

5　まとめ

本稿をアルゴリズム 1, 2, 3 の利点で締めくくる．まず, これらアルゴリズムは, 分子多項式に対して再利用可能なプログラムを実装しやすい．例えば, アルゴリズム 1 でステップ 3, 6 の結果を残しておけば, 別の入力分子多項式 h にも利用できる．そして, ステップ 5 の計算は軽いので, 簡単にその入力分子多項式 h に対する留数も計算できる．

次に, 節 1 でも触れたように, アルゴリズム 1, 3 の各ステップで計算される多項式が $\deg f$ 以上の次数を持つことはない．そして, アルゴリズム 2 も同様の利点を持っている．従って, 本稿で扱ったアルゴリズムは, いずれも, 重たい計算を発生させにくく, 効率的に留数を計算できる．

最後に, アルゴリズム 1, 2, 3 のステップ 3, 5, 6 に現れる $1/i$ 以外の有理数は整数であることに着目して欲しい．特に, 与えられた分子多項式がモニックである場合には各係数の $1/i$ に関連する因子が有理数なだけであり, その他の因子は整数である (分子多項式がモニックでない場合の改良については [3] を参照して欲しい)．このため, 複雑な有理数の計算が発生しにくく, 効率的な実装を書きやすいアルゴリズムとして設計されているとも言うことができる．

謝　　辞

本研究は科研費 (18K03320/20K19745) の助成を受けたものである．

参　考　文　献

[1] 加藤涼香, 田島慎一: 有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジ–. 京都大学数理解析研究所講究録 1395 巻, 50 - 56 項. 2004.

[2] 庄司卓夢, 田島慎一: 高速留数計算アルゴリズム. 京都大学数理解析研究所講究録 1456 巻, 133 - 143 項. 2005.

[3] 庄司卓夢, 田島慎一: ネーター作用素計算におけるモニックでない多項式による割り算の効率化. 京都大学数理解析研究所講究録 1572 巻, 72 - 81 項. 2007.

[4] 田島慎一: 一変数流数計算アルゴリズムについて. 京都大学数理解析研究所講究録 1509 巻, 24 - 50 項. 2006.