

# 有理関数による補間に対する重心形式の 数式処理における利用について

## An application of barycentric-type formulae of rational interpolation for computer algebra

東京都立大学・数理科学専攻 村上弘<sup>\*1</sup>

HIROSHI MURAKAMI

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY

### Abstract

Barycentric-type formulae for rational function interpolations are studied from the view-point of computer algebra. In order to determine the interpolation by a rational function of a given degree, we avoid solving the system of equations for the numerator and denominator coefficients of the rational function representing the conditions at the set of interpolation points. Instead, we use a barycentric-type form to represent in advance the rational functions that satisfy the conditions at the set of interpolation points. As an example of the use of this method, we present the design of the transfer-function of a filters to approximate those eigenpairs of a generalized eigenproblem whose eigenvalues are lower-exterior.

## 1 準備

有理関数による補間式の構成法として、次数を指定した一般係数の多項式の比として表しておき、値が各分点において一致するように多項式の係数を決めるのではなくて、最初から各分点での条件を取り入れた重心形式による表現を用いることを試みる。本論文では例題として、固有値問題の下端付近の固有対を求めるためのフィルタの設計をとりあげる。用いるフィルタはレゾルベントの線型結合の Chebyshev 多項式であり、レゾルベントの線型結合の伝達関数は有理関数になるので、有理関数による補間を用いて特性の良いフィルタの設計を行う。

## 2 重心形式による有理関数補間

### 2.1 Lagrange 補間の多項式とその重心形式による表現

関数  $f(t)$  の Lagrange 補間多項式  $p(t)$  は、相異なる  $n$  個の分点  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  に対して各分点での値が関数  $f(t)$  と一致するものとして唯一に決まり、次数  $(n-1)$  の  $t$  の多項式で式 (1) で表される。

$$p(t) \equiv \sum_{j=1}^n c_j \frac{L(t)}{t - x_j} f_j, \quad \text{ただし } L(t) \equiv \prod_{k=1}^n (t - x_k), \quad f_j \equiv f(x_j), \quad c_j \equiv 1/L'(x_j). \quad (1)$$

---

<sup>\*1</sup> 〒 191-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 E-mail: mrkmhrsh@tmu.ac.jp

Lagrange 補間による定数関数 1 の補間は厳密に 1 に等しくなるので式 (2) がなりたつ.

$$1 \equiv \sum_{j=1}^n c_j \frac{L(t)}{t - x_j}. \quad (2)$$

$L(t)$  を除去するべく式 (1) と式 (2) の比をとると, 重心形式と呼ばれる表示式 (3) が得られる [1].

$$p(t) \equiv \frac{\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{t - x_j} f_j}{\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{t - x_j}}. \quad (3)$$

これは一見すると  $t$  の有理関数のようであるが, 重心形式の Lagrange 補間の係数  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  が式 (2) を満たすものであることから式 (3) は必ず  $(n - 1)$  次以下の多項式を表している.

もしも式 (3) で係数  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  を自由に選ぶなら, その場合には  $p(t)$  は一般には  $t$  の多項式にならずに有理関数になる. その場合にも係数  $c_k$  が零でなければ  $p(t)$  の分点  $t = x_k$  での値は  $f_k$  になる.

## 2.2 有理関数補間の重心形式を用いた構成

いま  $n$  個の相異なる分点を  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  とする. そのとき式 (4) の有理関数  $R(t)$  は, 分子と分母に加える多項式の自由度を省いた簡単な形である. そうして係数  $c_k$  が非零であれば, 分点  $x_k$  で  $R(x_k) = f_k$  を満たす. さらに  $\sum_{i=1}^n c_i$  が非零のとき, 無限遠で式 (5) で表される有限な値を持つ.

$$R(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t - x_i} f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t - x_i}}. \quad (4)$$

$$R(\infty) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i f_i}{\sum_{i=1}^n c_i}. \quad (5)$$

式 (4) の  $R(t)$  の分子と分母に多項式  $\prod_{i=1}^n (t - x_i)$  を乗じると, それぞれ  $t$  の高々  $(n - 1)$  次の多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  になる. よって  $t$  の有理関数  $R(t)$  の次数は高々  $(n - 1)$  である. もしも  $N(t)$  と  $D(t)$  に共通する因子があれば  $R(t)$  の次数はそれだけ下がる.

## 2.3 無限遠での値を独立に指定する方法

関数  $R(t)$  が無限遠でとる値  $f_\infty$  を自由に指定するには, 非零の定数  $c_\infty$  を追加して式 (6) とする. そのときは  $\sum_{i=1}^n c_i$  が非零という条件は必要ない.

$$R(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t - x_i} f_i + c_\infty f_\infty}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t - x_i} + c_\infty}. \quad (6)$$

式 (6) の  $R(t)$  の分子と分母に多項式  $\prod_{i=1}^n (t - x_i)$  を乗じると, それぞれ  $t$  の高々  $n$  次の多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  になる. よって  $t$  の有理関数  $R(t)$  の次数は高々  $n$  であり,  $N(t)$  と  $D(t)$  に共通する因子があれば  $R(t)$  の次数はそれだけ下がる.

### 3 重心形式による有理関数補間の方法の1つの拡張

有理関数  $R(t)$  が最大・最小になる点の座標が指定できれば、たとえば最良近似の構成に便利であるので、重心形式の拡張を試みる。

#### 3.1 分点 $t = \alpha$ で微分の値を零に指定する場合の形式

いま  $P(t)$  と  $Q(t)$  は  $t = \alpha$  の近傍で値が有界な任意の関数（たとえば有理関数）であるとして、式 (7) の形の関数  $r(t)$  を考える。ここで係数  $d_\alpha$  と  $c_\alpha$  は未定常数である。

簡単な変形により式 (8) が導ける。すると係数  $d_\alpha$  と  $c_\alpha$  の少なくともどちらかが非零であれば  $r(\alpha) = f_\alpha$  となることがわかる。さらに係数  $d_\alpha$  が非零であれば  $r(t)$  の  $t = \alpha$  での微分の値が零になることもわかる。

$$r(t) = \frac{\left\{ \frac{d_\alpha}{(t-\alpha)^2} + \frac{c_\alpha}{t-\alpha} \right\} f_\alpha + P(t)}{\left\{ \frac{d_\alpha}{(t-\alpha)^2} + \frac{c_\alpha}{t-\alpha} \right\} + Q(t)}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{\{d_\alpha + c_\alpha(t-\alpha)\} f_\alpha + P(t)(t-\alpha)^2}{\{d_\alpha + c_\alpha(t-\alpha)\} + Q(t)(t-\alpha)^2} \\ &= f_\alpha + \frac{(t-\alpha)^2 \{P(t) - f_\alpha Q(t)\}}{d_\alpha + c_\alpha(t-\alpha) + Q(t)(t-\alpha)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

#### 3.2 分点 $t = \alpha$ で2階までの微分の値を零に指定する場合の形式

同様に  $P(t)$  と  $Q(t)$  をそれぞれ  $t = \alpha$  の近傍で値が有界な任意の関数とし、関数  $r(t)$  を式 (9) の形とする。

簡単な変形により式 (10) が導ける。すると係数  $e_\alpha$ ,  $d_\alpha$ ,  $c_\alpha$  のどれかが非零であれば  $r(\alpha) = f_\alpha$  となることがわかる。さらに係数  $e_\alpha$  が非零であれば  $r(t)$  の  $t = \alpha$  での1階と2階の微分の値は両方とも零になる。もしも係数  $e_\alpha$  が零である場合には（前の場合に帰着するが）、係数  $d_\alpha$  が非零であれば  $r(t)$  の  $t = \alpha$  での微分の値が零になる。

$$r(t) = \frac{\left\{ \frac{e_\alpha}{(t-\alpha)^3} + \frac{d_\alpha}{(t-\alpha)^2} + \frac{c_\alpha}{t-\alpha} \right\} f_\alpha + P(t)}{\left\{ \frac{e_\alpha}{(t-\alpha)^3} + \frac{d_\alpha}{(t-\alpha)^2} + \frac{c_\alpha}{t-\alpha} \right\} + Q(t)}. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{\{e_\alpha + d_\alpha(t-\alpha) + c_\alpha(t-\alpha)^2\} f_\alpha + P(t)(t-\alpha)^3}{\{e_\alpha + d_\alpha(t-\alpha) + c_\alpha(t-\alpha)^2\} + Q(t)(t-\alpha)^3} \\ &= f_\alpha + \frac{(t-\alpha)^3 \{P(t) - f_\alpha Q(t)\}}{e_\alpha + d_\alpha(t-\alpha) + c_\alpha(t-\alpha)^2 + Q(t)(t-\alpha)^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

同様に、分点  $t = \alpha$  での値が  $f_\alpha$  で、指定した階数以下の微分の値をすべて零に指定する場合の形式も容易に得られる。

### 3.3 各分点での微分の値を零に指定できる重心形式

有限の位置にある相異なる  $n$  個の分点を  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  とする. 有理関数  $R(t)$  の式 (11) はその分子と分母に  $t$  の多項式部を含まない簡単なものである.

副節 3.1 と 3.2 の議論から容易に分かるように, 係数  $d_i$  または  $c_i$  の少なくともどちらかが非零であれば  $R(t)$  の  $t = x_i$  での値は  $f_i$  であり, さらに  $d_i$  が非零であれば  $R(t)$  の  $t = x_i$  での微分の値は零になる. そうして  $\sum_i d_i$  が零でなければ  $R(t)$  の無限遠での値は有限になる.

全部で  $n$  個の分点のうち  $m$  個で微分の値を零に指定する場合には,  $t$  の有理関数  $R(t)$  を 2 つの  $t$  の多項式の比で表した場合の分子と分母の多項式の次数は高々  $(n + m - 1)$  になる.

$$R(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d_i}{(t-x_i)^2} + \frac{c_i}{t-x_i} \right\} f_i}{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d_i}{(t-x_i)^2} + \frac{c_i}{t-x_i} \right\}} \quad (11)$$

### 3.4 無限遠での値を独立に指定する場合

以前と同様に, 無限遠での値  $f_\infty$  を独立に指定する場合には, 非零の定数  $c_\infty$  を追加した式 (12) の形を用いることができる. この場合には  $\sum_i d_i$  が非零という条件は不要である.

係数  $d_i$  または  $c_i$  が非零であれば  $R(t)$  の  $t = x_i$  での値は  $f_i$  であり, さらに無限遠での値は  $f_\infty$  である. またさらに係数  $d_i$  が非零であれば  $R(t)$  の  $t = x_i$  での微分の値は零になる.

いま指数  $p_i$  の値を  $d_i$  が非零の場合には 2,  $d_i$  は零で  $c_i$  が非零の場合には 1,  $d_i$  も  $c_i$  も零の場合には 0 と定義するとき, 式 (12) の分子と分母に  $\prod_i (t-x_i)^{p_i}$  を乗じて得られる多項式をそれぞれ  $N(t)$  と  $D(t)$  とすると, 分点  $n$  個のうち  $m$  個に対して微分の値を零に指定する場合には,  $D(t)$  は常に  $(n+m)$  次になる.  $N(t)$  は  $f_\infty$  が非零ならば  $(n+m)$  次で,  $f_\infty$  が零ならば高々  $(n+m-1)$  次になる. 一般的には  $R(t)$  は  $t$  の  $(n+m)$  次の有理関数になるが, もしも  $N(t)$  と  $D(t)$  に共通する因子があれば次数はそれだけ下がる.

$$R(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d_i}{(t-x_i)^2} + \frac{c_i}{t-x_i} \right\} f_i + c_\infty f_\infty}{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d_i}{(t-x_i)^2} + \frac{c_i}{t-x_i} \right\} + c_\infty}. \quad (12)$$

## 4 有理関数補間による固有値問題の近似解法に用いるフィルタの設計

今回 (拡張された) 重心形式による有理関数補間を適用する対象は, 固有値問題の近似解法に用いるフィルタ作用素をその伝達関数から逆構成する際に必要となる有理関数を適切に決める問題である. そのため本節ではそれについての説明を行う.

### 4.1 フィルタ作用素の構成

実対称定値一般固有値問題  $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$  の固有対で固有値が固有値分布の下端付近にあるものの近似を, フィルタ作用素を利用して求めることにする.

固有値分布から離れた複素数  $\rho_i$  をシフトとする  $k$  個のレゾルベントを  $\mathcal{R}(\rho_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  とし, それらと恒等演算子  $I$  の線形結合である線形作用素を  $\mathcal{Y}$  とする. そうして  $\mathcal{Y}$  の Chebyshev 多項式により線

形作用素であるフィルタ  $\mathcal{F}$  を構成する (式 (13)). ここで複素数  $\rho$  に対してシフトが  $\rho$  のレゾルベントは  $R(\rho) \equiv (A - \rho B)^{-1} B$  として定義され, それのベクトル  $\mathbf{x}$  に対する作用  $\mathbf{z} \leftarrow R(\rho)\mathbf{x}$  の計算は, シフト行列を  $C(\rho) \equiv (A - \rho B)$  と定義するとき, それを係数行列とする連立 1 次方程式  $C(\rho)\mathbf{z} = B\mathbf{x}$  を解いて  $\mathbf{z}$  を求めることになる.

実対称定値一般固有値問題  $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$  の任意の固有対を  $(\lambda, \mathbf{v})$  とするとき, そのベクトル  $\mathbf{v}$  は線形作用素  $\mathcal{Y}$  と  $\mathcal{F}$  の固有ベクトルにもなる. そこで  $\mathcal{F}\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}$  により定義される  $\mathcal{F}$  の伝達関数  $f(\lambda)$  の引数  $\lambda$  をそれに対応する規格化座標  $t$  に変えたものが伝達関数  $g(t) \equiv f(\lambda)$  である. 今回のフィルタの伝達関数  $g(t)$  は無限遠で値が有界な有理関数  $y(t)$  の Chebyshev 多項式であるとする (式 (14)). 対応関係を逆にたどれば, 式 (14) の形で表される関数  $g(t)$  を与えたときに, それを伝達関数とするフィルタ作用素  $\mathcal{F}$  が式 (13) の形で決まる.

$$\begin{cases} \mathcal{Y} &= \sum_{i=1}^k \gamma_i \mathcal{R}(\rho_i) + \beta \mathcal{I}, \\ \mathcal{F} &= g_s T_n(\mathcal{Y}). \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} y(t) &= \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{t - \tau_i} + \beta, \\ g(t) &= g_s T_n(y(t)). \end{cases} \quad (14)$$

## 4.2 伝達関数 $g(t)$ の特性に対する形状の要請

下端付近の固有値に対応する区間  $\lambda \in [a, b]$  を変換  $\lambda = a + (b - a)t$  で区間  $t \in [0, 1]$  に対応させることにより, 座標  $\lambda$  に対する規格化座標  $t$  を定義する.

理想的なフィルタの伝達特性は  $g(t)$  の値が  $0 \leq t \leq 1$  では 1 で,  $1 < t$  では 0 となるものだが, それは連続関数ではないので実現することができない. そこで  $\mu$  を 1 より少し大きい値として,  $g(t)$  は領域  $0 \leq t \leq 1$  では 1 付近の値をとり, 領域  $\mu \leq t$  では 0 に極めて近い値をとり, それらの中間の領域  $1 < t < \mu$  では途中の値を連続的に (できれば単調減少で) とるものとする.

そこで形状パラメタの 3 つを  $\mu, g_p, g_s$  ( $\mu > 1, 1 > g_p > g_s > 0$ ) とする. 伝達関数  $g(t)$  は非負領域  $t \in [0, \infty)$  では連続であって, 式 (15) の条件を満たすものとする.

$$\begin{cases} 1 \geq g(t) \geq g_p & (0 \leq t \leq 1) & \text{通過域 (pass band),} \\ g_p > g(t) > g_s & (1 < t < \mu) & \text{遷移域 (transition band),} \\ g_s \geq |g(t)| & (\mu \leq t < \infty) & \text{阻止域 (stop band).} \end{cases} \quad (15)$$

関数値の連続性から  $g(1) = g_p, g(\mu) = g_s$  である. さらに  $y(t)$  も非負領域  $0 \leq t < \infty$  では連続とする. また  $g$  と  $y$  の対応関係  $g = g_s T_n(y)$  に基づいて, 式 (16) で  $y_h$  と  $y_\ell$  をそれぞれ定義する.

$$y_h \equiv \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s}\right), \quad y_\ell \equiv \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}\right). \quad (16)$$

そうして  $g(t)$  の値域の区分に対応させて有理関数  $y(t)$  の値域の区分を式 (17) のように定める.

$$\begin{cases} y_h \geq y(t) \geq y_\ell & (0 \leq t \leq 1) & \text{通過域,} \\ y_\ell > y(t) > 1 & (1 < t < \mu) & \text{遷移域,} \\ 1 \geq |y(t)| & (\mu \leq t < \infty) & \text{阻止域.} \end{cases} \quad (17)$$

### 4.3 無限遠で値が有界な有理関数 $y(t)$ の部分分数分解

いま  $N(t)$  と  $D(t)$  がそれぞれ  $t$  の多項式で  $\deg N \leq \deg D$  であるとする. すると  $y(t) = N(t)/D(t)$  は無限遠で有界な有理関数になる. さらに分母の多項式  $D(t)$  は次数が  $K$  で重複する因子を持たないとする. そのとき  $y(t)$  の部分分数分解 (PFD) は式 (18) で与えられる. ただし分母  $D(t)$  の複素数の範囲での重複の無い零点の全体を  $\tau_i, i = 1, 2, \dots, K$  とする.

$$y(t) = \sum_{i=1}^K \frac{\alpha_i}{t - \tau_i} + \beta, \quad \alpha_i \equiv \frac{N(\tau_i)}{D'(\tau_i)}, \quad \beta \equiv y(\infty). \quad (18)$$

複素数の範囲で極に重複が無くして無限遠での値が有界である有理関数  $y(t)$  は, 必ずこの形の部分分数分解を持つ. 分解に対応して (複素シフトの) レゾルベントと恒等作用素の線形結合  $\mathcal{Y}$  を構成すれば, その伝達関数は  $y(t)$  に一致する.

### 4.4 レゾルベントのシフトが実数の場合と虚数の場合の違いの考慮

作用素  $\mathcal{Y}$  の中に現れるレゾルベントのシフトは有理関数  $y(t)$  の極に対応していて, 実数のシフトは実数の極に虚数のシフトは虚数の極にそれぞれ 1 対 1 に対応する. 実対称定値一般固有値問題の固有値はすべて実数なので, レゾルベントのシフトが固有値に一致あるいは非常に近接した実数であれば, 必要な範囲の固有値を持つ複数の固有対間でフィルタによる伝達率の大きさに極端な違いが生じるので, 数値の精度に限りのある計算では得られる近似固有対の精度に極端な不均一さが生じるので望ましくない. ただし必要な固有値が固有値分布の端付近である場合には, 実数のシフトが固有値の分布に対して一致や極端な近接を起こさないようにすることも可能で, そのような場合にはシフトとして実数を利用して構わない. たとえば, 下端付近の固有値を持つ固有対を求めるときに, レゾルベントのシフトとして最小固有値よりも小さい実数を選べばレゾルベントは特異にあるいは特異に近くはならない. そのことを  $y(t)$  の極について述べると, もしも最小固有値  $\lambda_0$  の正規化座標  $t_0$  が非負であるならば, 負の実数である  $y(t)$  の極  $t = \tau_i$  に対応するレゾルベントのシフト  $\lambda = \rho_i$  は, 最小固有値よりも小さい実数なので, すべての固有値から離れている.

#### 4.4.1 レゾルベントのシフトに実数を用いる場合の利点

レゾルベントのシフトが実数であれば, レゾルベントの作用の計算は数値も演算も実数だけを扱うことになるので, シフトが虚数で複素数を扱う場合に比べて必要な記憶の量が少ないうえに, 複素数の算術演算は実数の算術演算から構成されるが, 乗加算を基本とする線形計算では同じ形の計算式は, 実数演算で計算する場合に比べて複素演算で計算すると必要な演算量が約 4 倍になる.

また連立 1 次方程式を行列分解を用いて解くことにすると, 一般固有値問題が実対称定値のものである場合には, シフト  $\rho$  が最小固有値よりも小さい実数のときには, シフト行列  $C = A - \rho B$  は実対称正定値になるのでその Cholesky 分解の計算はピボット選択をしなくても数値安定である. シフト  $\rho$  が虚数のときには  $C$  は複素対称行列になる.

さらに一般的な複素 Hermite 定値の一般固有値問題である場合には, シフト  $\rho$  が最小固有値よりも小さい実数のときにはシフト行列  $C$  は複素 Hermite 正定値になるので, Hermite 対称性を利用して  $C$  の Cholesky 分解を計算するときピボット選択をしなくても数値安定である. しかしシフトが虚数のときには行列  $C$  の分解で利用できる対称性は無い.

#### 4.4.2 レゾルベントのシフトに実数を用いる場合の欠点

シフトを実数に制限することは選択できる範囲を狭めたことになるので、実現可能なフィルタの特性は必ず悪くなる。それにより生じる近似固有対の精度の低下傾向を補うためには、使用するレゾルベントの数を増す、Chebyshev 多項式の次数を上げる、フィルタを適用するベクトルの数を増す、フィルタを反復する回数を増す、などが必要となる可能性がある。そのため、近似固有対を高い精度で求めたい場合には、シフトを実数にする場合と虚数にする場合の得失の評価は容易でない。

ただし下端側ではなくて中間の固有値を持つ固有対を求めようとする場合には、すべてのシフトを虚数に選ぶ必要がある。

なお、一般固有値問題が実対称定値の場合に、ある実ベクトルに対して互いに複素共役な虚数をシフトとするレゾルベントを作用させる一対の計算は、どちらか片方についてだけ行えばよく、もう片方の結果は複素共役対称性によりほぼ計算をせずに求まる。次数の等しいシフト行列の実対称 Cholesky 分解と複素対称 Cholesky 分解を比較すると、後者の演算量は前者の 4 倍であるが、複素共役なシフトに対する複素コレスキ分解やその後の前進後退代入操作を省略できるので、計算の手間は実数のシフトの場合の 4 倍ではなくてむしろその半分の 2 倍であるといえる。

## 5 伝達関数の設計への有理関数補間の応用例

### 5.1 有理関数 $y(t)$ が 1 次するとき

有理関数が 1 次の場合に、 $y(t)$  を重心形式を使わずに直接決定してみる。いま  $y(t)$  を式 (19) の形であるとして、係数  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  を決める。

$$y(t) = \frac{\alpha}{t + \sigma} + \beta. \quad (19)$$

ただし  $y(t)$  が非負領域  $0 \leq t < \infty$  で単調減少であるためには、 $\sigma > 0$  かつ  $\alpha > 0$  であることが必要である。

#### 5.1.1 4 つの値 $(n, g_s, g_p, \mu)$ を指定する場合

式 (19) の  $y(t)$  が分点と無限遠で満たしているべき条件は式 (20) である。

$$\begin{cases} t = 0 & \text{で} & y = y_h, \\ t = 1 & \text{で} & y = y_\ell, \\ t = \mu & \text{で} & y = 1, \\ t = \infty & \text{で} & y = \beta. \end{cases} \quad (20)$$

これを解くとその解は、 $E \equiv \mu(y_h - y_\ell) - (y_h - 1)$  とおくと式 (21) で与えられる。

$$\begin{cases} \sigma & = & \mu(y_\ell - 1)/E, \\ \alpha & = & \mu(\mu - 1)(y_h - 1)(y_\ell - 1)(y_h - y_\ell)/E^2, \\ \beta & = & 1 - (y_h - 1)(y_\ell - 1)/E. \end{cases} \quad (21)$$

前提とする条件から  $\mu > 1$ ,  $y_h > y_\ell > 1$  であるので、 $\sigma$  と  $\alpha$  が共に正となるためには  $E > 0$  が必要十分であり、さらに  $\beta \geq -1$  を満たすことが必要である。

### 5.1.2 3つの値 $(n, \mu, g_p/g_s)$ を指定して, $g_s$ を最小に選ぶ場合

まず式 (16) の右側の関係を用いて  $n$  と  $g_p/g_s$  の値から  $y_\ell$  の値を求める. そうして式 (22) を計算する.

$$\begin{cases} \beta \leftarrow -1, \\ \sigma \leftarrow \{(2\mu - 1) - y_\ell\}/(y_\ell - 1), \\ \alpha \leftarrow 2(\mu - 1)(y_\ell + 1)/(y_\ell - 1). \end{cases} \quad (22)$$

そうしてさらに  $y_h \leftarrow \{(2\mu - 1)y_\ell - 1\}/\{(2\mu - 1) - y_\ell\}$ ,  $g_s \leftarrow 1/\cosh(n \cosh^{-1} y_h)$  とする. ただし  $\sigma > 0$  であることが必要である.

### 5.1.3 3つの値 $(n, \mu, g_s)$ を指定して, $g_p$ を最大に選ぶ場合

まず式 (16) の左側の関係を用いて  $n$  と  $g_s$  の値から  $y_h$  の値を求める. そうして式 (23) を上から順に計算する.

$$\begin{cases} \beta \leftarrow -1, \\ \sigma \leftarrow 2\mu/(y_h - 1), \\ \alpha \leftarrow (y_h + 1)\sigma. \end{cases} \quad (23)$$

そうしてさらに  $y_\ell \leftarrow \{(2\mu - 1)y_h + 1\}/\{(2\mu - 1) + y_h\}$ ,  $g_p \leftarrow g_s \cosh(n \cosh^{-1} y_\ell)$  とする.

### 5.1.4 3つの値 $(n, g_s, g_p)$ を指定して, $\mu$ を最小に選ぶ場合

まず式 (16) を用いて  $n$  と  $g_s$  と  $g_p$  の値から  $y_h$  と  $y_\ell$  の値を求める. そうして式 (24) を計算する.

$$\begin{cases} \beta \leftarrow -1, \\ \sigma \leftarrow (y_\ell + 1)/(y_h - y_\ell), \\ \alpha \leftarrow (y_h + 1)\sigma. \end{cases} \quad (24)$$

それから  $\mu \leftarrow (y_h - 1)\sigma/2$  とする.

## 5.2 2次の有理関数 $y(t)$ の構成 (最大点の座標 $z$ を指定)

いま  $\mu, z, g_s, g_p$  を与えたとき, 伝達関数  $g(t)$  が式 (25) を満たすとする. ただし  $z$  は通過領域  $[0, 1]$  内で  $g(t)$  が最大値 1 をとる点の  $t$  座標とする.

$$g(z) = 1, g'(z) = 0, g(1) = g_p, g(\mu) = g_s. \quad (25)$$

式 (16) を用いて  $n$  と  $g_s$  と  $g_p$  の値から  $y_h$  と  $y_\ell$  の値を求める (すると  $1 > g_p > g_s > 0$  より,  $y_h > y_\ell > 1$  となる) そうして3つの分点 ( $z < 1 < \mu$ ) での有理関数  $y(t)$  に対する条件を

$$\begin{cases} t = z \quad \text{で} \quad y = y_h, y' = 0, \\ t = 1 \quad \text{で} \quad y = y_\ell, \\ t = \mu \quad \text{で} \quad y = 1. \end{cases} \quad (26)$$

とする (条件  $y(\infty) = \beta$  は後で追加することにする).



これら4つの条件と対応する重心形式は（一般性を失わずに  $c_\mu = 1$  であるとして）式(27)になる。

$$y(t) = \frac{\left\{ \frac{d_z}{(t-z)^2} + \frac{c_z}{t-z} \right\} \times y_h + \frac{c_1}{t-1} \times y_\ell + \frac{1}{t-\mu} \times 1}{\left\{ \frac{d_z}{(t-z)^2} + \frac{c_z}{t-z} \right\} + \frac{c_1}{t-1} + \frac{1}{t-\mu}} \quad (27)$$

この重心形式の式を変数  $t$  の2つの多項式の比の形で  $N(t)/D(t)$  と表すと、 $N(t)$  と  $D(t)$  は一般には  $t$  の3次式であり、それらの  $t$  の各次数の項の係数は未定常数  $d_z$ ,  $c_z$ ,  $c_1$  を含む。そこで多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  をどちらも  $t$  について2次以下にするために、 $t$  の3次の項の係数の式を零とする等式を2つ課して、さらに  $y(\infty) = \beta$  とするために  $N(t)$  と  $D(t)$  の  $t$  の2次の項の係数の比が  $\beta$  に等しいという式を課す。それら全部で3つの等式を連立して3つの未定常数  $d_z$ ,  $c_z$ ,  $c_1$  について解くと以下の式(28)が得られる。

$$\begin{cases} d_z = \frac{\{(\mu-z)\beta - (\mu-1)\}(y_h - y_\ell) + (1-z)\{y_h(y_\ell - 1) - \beta(y_h - 1)\}}{(y_h - y_\ell)(y_h - \beta)}, \\ c_z = \frac{y_\ell - 1}{y_h - y_\ell}, \\ c_1 = -\frac{y_h - 1}{y_h - y_\ell}. \end{cases} \quad (28)$$

この式(28)を  $N(t)/D(t)$  の式に代入すると、 $y(t)$  が式(29)の形の2次の有理関数として決まる。

$$y(t) = \frac{p_2 t^2 + p_1 t + p_0}{q_2 t^2 + q_1 t + q_0}. \quad (29)$$

その6つの係数を5つのパラメタ  $\mu$ ,  $z$ ,  $y_h$ ,  $y_\ell$ ,  $\beta$  の多項式で具体的に表せば式(30)になる。

$$\begin{cases} p_2 = (\mu-1)(y_h-1)(y_h-y_\ell)\beta, \\ p_1 = (\mu-z)^2 y_h^2 - [(1-z)^2 y_h + (\mu-1)\{(\mu-1) + 2(1-z)\}] y_h y_\ell \\ \quad - \left[ \left\{ 2(\mu-1)z - \{(\mu^2-1) + (1-z)^2\} y_h \right\} y_\ell \right. \\ \quad \left. + \left\{ (\mu^2-1)y_h + \{(\mu-z)^2 - (\mu^2-1)\} \right\} y_h \right] \beta, \\ p_0 = -(\mu-z)^2 y_h^2 + \{\mu(1-z)^2 y_h + (\mu-1)(\mu-z^2)\} y_h y_\ell \\ \quad + \left[ \mu(\mu-1)y_h^2 + \{(\mu-z)^2 - \mu(\mu-1)\} y_h \right. \\ \quad \left. + \left\{ -\{(\mu-1)z^2 + (\mu-z)^2\} y_h + (\mu-1)z^2 \right\} y_\ell \right] \beta, \\ q_2 = (\mu-1)(y_h-1)(y_h-y_\ell), \\ q_1 = -2(\mu-1)z y_h^2 + \{(\mu^2-1) + (1-z)^2\} y_h \\ \quad - [\{(\mu-z)^2 - (\mu^2-1)\} y_h + (\mu^2-1)] y_\ell \\ \quad + [-\{(\mu-1)\{(\mu-1) + 2(1-z)\} y_h + (\mu-z)^2 y_\ell - (1-z)^2\}] \beta, \\ q_0 = [(\mu-1)z^2 y_h - \mu\{(1-z)^2 + (\mu-1)\}] y_h \\ \quad + [\{(\mu-z)^2 - (\mu-1)\mu\} y_h + (\mu-1)\mu] y_\ell \\ \quad + \{(\mu-1)(\mu-z^2)y_h - (\mu-z)^2 y_\ell + \mu(z-1)^2\} \beta. \end{cases} \quad (30)$$

### 5.2.1 2次の有理関数 $y(t)$ の構成例（極2つが負の実数になる場合）

有理関数  $y(t)$  が2次で、その極2つが両方とも負の実数になる9通りの各例について設定したパラメタを表1に示す。各例で得られた伝達関数  $g(t)$  の対数プロットのグラフをそれぞれ図1から図9に示す。

表 1: 2 次の有理関数の例題のパラメタ設定

例	$n$	$\mu$	$g_s$	$g_p$	$z$	$\beta$
1	25	1.5	1E-10	1E-3	0.3	-1.0
2	25	1.5	1E-10	1E-4	0	-1.0
3	30	1.5	1E-10	1E-3	0.25	-1.0
4	30	1.75	1E-10	1E-2	0.3	-1.0
5	35	1.7	1E-10	1E-2	0.3	-1.0
6	40	1.7	1E-11	1E-2	0.36	-1.0
7	45	1.5	1E-12	1E-3	0.35	-1.0
8	45	1.7	1E-12	1E-2	0.4	-1.0
9	50	1.5	1E-12	1E-3	0.3	-1.0

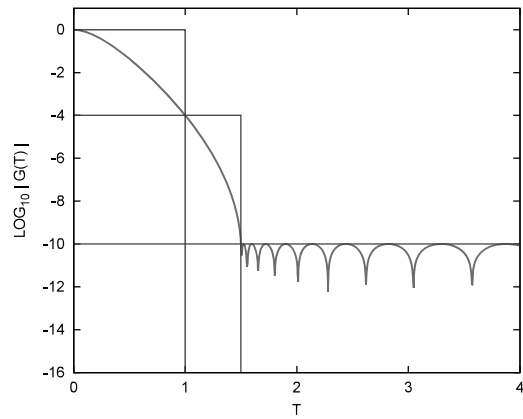
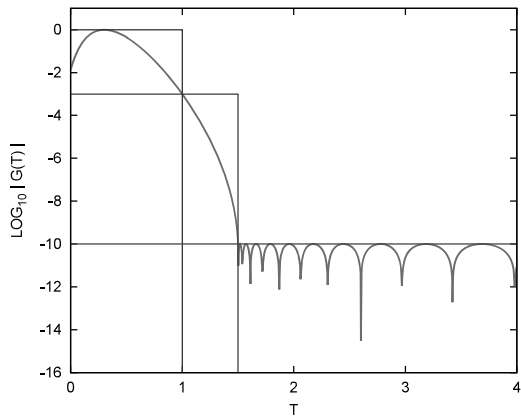


図 1: 2 次 of 例 1: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

図 2: 2 次 of 例 2: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

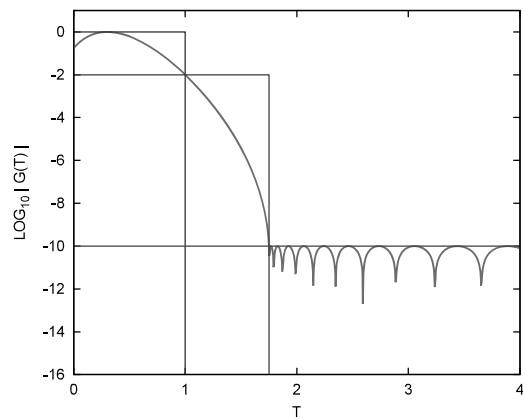
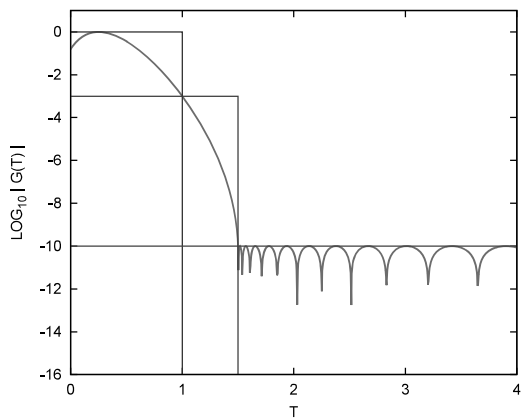


図 3: 2 次 of 例 3: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

図 4: 2 次 of 例 4: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

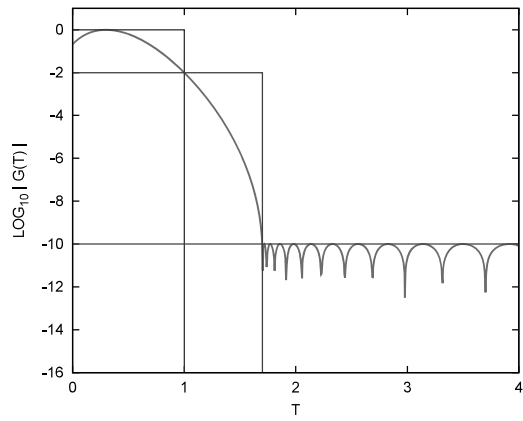


図 5: 2 次の例 5: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

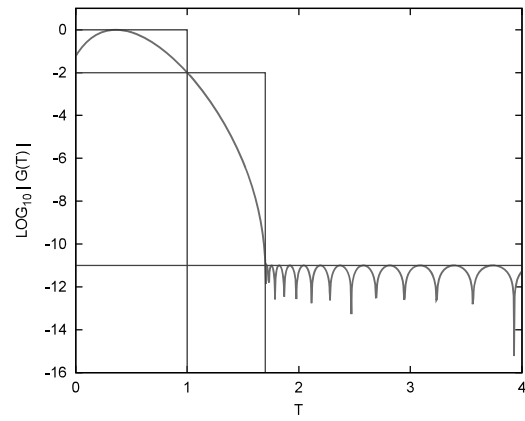


図 6: 2 次の例 6: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

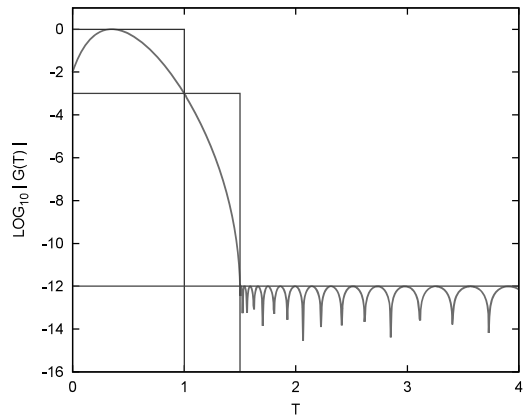


図 7: 2 次の例 7: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

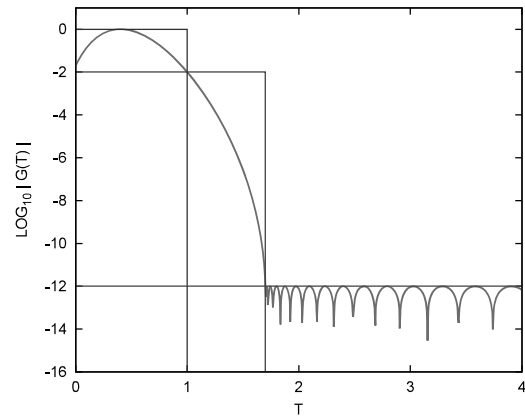


図 8: 2 次の例 8: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

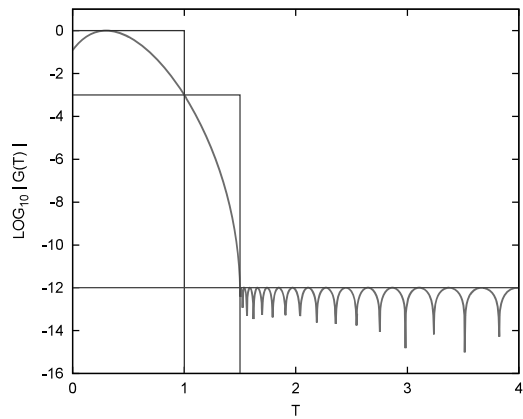


図 9: 2 次の例 9: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

### 5.3 3次の有理関数 $y(t)$ の場合（極小点 $z_2$ と極大点 $z_1$ を指定）

いま  $z_2, z_1, g_s, g_p, \mu$  を与えて、伝達関数  $g(t)$  は条件 (31) を満たすとする。ただし各分点の  $t$  座標は  $z_2 < z_1 < 1 < \mu$  で、 $g(t)$  は  $t = z_2$  で極小値  $g_p$  を、 $t = z_1$  で極大値 1 をとることを想定している。

$$\begin{cases} t = z_2 & \text{で} & g = g_p, & g' = 0, \\ t = z_1 & \text{で} & g = 1, & g' = 0, \\ t = 1 & \text{で} & g = g_p, \\ t = \mu & \text{で} & g = g_s. \end{cases} \quad (31)$$

実験の各例では極大極小点の座標  $z_1, z_2$  などは、 $g(t)$  の振る舞いが適切となるように人の手で調整して決めたものである（有理関数  $y(t)$  が 4 次、5 次、6 次の各場合の例についても同様である）。たとえば  $t$  の非負領域に実数の極が出ないことや、阻止域  $\mu \leq t$  の全体で常に  $|g(t)| \leq g_s$  となることつまり  $|y(t)| \leq 1$  が成り立つこと、通過域  $0 \leq t \leq 1$  では  $g_p \leq g(t) \leq 1$  となることなども  $g(t)$  や  $y(t)$  のグラフを描くなどにより確かめておく必要がある。

前と同様に、式 (16) を用いて  $n$  と  $g_s$  と  $g_p$  の値から  $y_h$  と  $y_\ell$  の値をそれぞれ求める。条件  $1 > g_p > g_s > 0$  より  $y_h > y_\ell > 1$  である。

すると有理関数  $y(t)$  に対する条件は式 (32) とする。

$$\begin{cases} t = z_2 & \text{で} & y = y_\ell, & y' = 0, \\ t = z_1 & \text{で} & y = y_h, & y' = 0, \\ t = 1 & \text{で} & y = y_\ell, \\ t = \mu & \text{で} & y = 1. \end{cases} \quad (32)$$

ただし条件  $y(\infty) = \beta$  を後で追加する。なお  $-1 \leq \beta < 1$  とする。

条件 (32) に対応する重心形式は式 (33) で与えられる（ただし一般性を失わずに  $c_\mu = 1$  としている）。

$$y(t) = \frac{\left\{ \frac{d_{z_2}}{(t-z_2)^2} + \frac{c_{z_2}}{t-z_2} \right\} \times y_\ell + \left\{ \frac{d_{z_1}}{(t-z_1)^2} + \frac{c_{z_1}}{t-z_1} \right\} \times y_h + \frac{c_1}{t-1} \times y_\ell + \frac{1}{t-\mu} \times 1}{\left\{ \frac{d_{z_2}}{(t-z_2)^2} + \frac{c_{z_2}}{t-z_2} \right\} + \left\{ \frac{d_{z_1}}{(t-z_1)^2} + \frac{c_{z_1}}{t-z_1} \right\} + \frac{c_1}{t-1} + \frac{1}{t-\mu}}. \quad (33)$$

式 (33) を  $t$  の多項式の比に直して  $N(t)/D(t)$  と表せば、多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  はそれぞれ一般には  $t$  の 5 次式であり、 $t$  の各次の項の係数は 5 つの常数  $d_s, c_s, d_z, c_z, c_1$  について線形の式である。そこで  $N(t)$  と  $D(t)$  が  $t$  について 3 次以下になるように、それぞれの  $t$  の 5 次と 4 次の項の係数の式を零とする 4 つの等式を課す。また条件  $y(\infty) = \beta$  に対応して  $N(t)$  と  $D(t)$  の  $t$  の 3 次の項の係数の比が  $\beta$  に等しいとする式を課す。それらの合計 5 つの等式からなる連立 1 次方程式を解くと 5 つの未定常数  $d_{z_2}, c_{z_2}, d_{z_1}, c_{z_1}, c_1$  が決定できる。そこで求めた 5 つの常数の値を  $N(t)/D(t)$  の式に代入すると、 $t$  の 3 次の有理関数である  $y(t)$  が得られて、その部分分数分解から  $\tau_i, \alpha_i, i = 1, 2, 3$  が求まる（式 (34)）。

$$y(t) = \frac{p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0}{q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{t - \tau_i} + \beta. \quad (34)$$

#### 5.3.1 3次の有理関数 $y(t)$ の例 1

この例 1 で指定したパラメータは  $n = 10, \mu = 1.25, g_s = 1.0\text{E}-16, g_p = 0.1, z_2 = 0.41, z_1 = 0.87, \beta = -1.0$  である。それに対応する数値を  $y(t)$  の式に入れて求めた 3 次の有理関数の係数とその部分分数分解を表 2 と表 3 に示す。この場合には 3 つの極のうちで 1 つだけが負の実数であり、他の 2 つは虚数である。得られた伝達関数  $g(t)$  の対数プロットによるグラフを図 10 に示す。

### 5.3.2 3 次の有理関数 $y(t)$ の例 2

この例 2 で指定したパラメータは  $n = 15$ ,  $\mu = 1.15$ ,  $g_s = 1.0E-16$ ,  $g_p = 0.1$ ,  $z_2 = 0.44$ ,  $z_1 = 0.89$ ,  $\beta = -1.0$  である. それに対応する数値を  $y(t)$  の式に入れて求めた 3 次の有理関数とその部分分数分解を表 4 と表 5 に示す. この場合も, 3 つの極のうちで 1 つだけが負の実数であり, 他の 2 つは虚数である. 得られた伝達関数  $g(t)$  の対数プロットによるグラフを図 11 に示す.

表 2: 3 次の例 1: 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
3	-1.00000 00000 00000	1.00000 00000 00000
2	8.87700 07326 83797	-1.40392 72744 63322
1	-21.21946 64405 7549	-0.20471 83225 59561 6
0	14.80564 83132 7852	0.69491 31769 25712 6

表 3: 3 次の例 1: 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-0.6359898398935537	11.50434122526359
2	( 1.019958557178438 , 0.2287635854651418 )	( -2.015633883521559 , -1.083732529217626 )
3	( 1.019958557178438 , -0.2287635854651418 )	( -2.015633883521559 , 1.083732529217626 )

表 4: 3 次の例 2: 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
3	-1.00000 00000 00000	1.00000 00000 00000
2	7.64294 19619 22245	-0.78940 38610 25417 9
1	-15.86566 26155 3032	-1.72569 35695 96496
0	9.76951 06311 03962	1.61857 35791 28598

表 5: 3 次の例 2: 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-1.35831929331533	8.049774292691211
2	( 1.073861577170374 , 0.1960141339846608 )	( -0.5981180958971929 , -0.09593457580394409 )
3	( 1.073861577170374 , -0.1960141339846608 )	( -0.5981180958971929 , 0.09593457580394409 )

### 5.3.3 3 次の有理関数 $y(t)$ の例 3

この例 3 で指定したパラメータは  $n = 20$ ,  $\mu = 1.1$ ,  $g_s = 1.0E-16$ ,  $g_p = 0.1$ ,  $z_2 = 0.49$ ,  $z_1 = 0.91$ ,  $\beta = -1.0$  である. それに対応する数値を  $y(t)$  の式に入れて求めた 3 次の有理関数とその部分分数分解の係数を表 6 と表 7 に示す. この場合にも, 3 つの極のうちで 1 つだけが負の実数であり, 他の 2 つは虚数である. 得られた伝達関数  $g(t)$  の対数プロットによるグラフを図 12 に示す.

表 6: 3 次の例 3 : 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
3	-1.00000 00000 00000	1.00000 00000 00000
2	8.48869 18543 98398	0.19191 94123 76542
1	-16.85893 90389 2766	-3.99850 59588 49998
0	9.67899 64293 65586	2.90961 46961 25738

表 7: 3 次の例 3 : 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-2.382636079972674	9.206593442508938
2	( 1.095358333798066 , 0.1461668051958959 )	( -0.2629910878669987 , 0.03873020885291506 )
3	( 1.095358333798066 , -0.1461668051958959 )	( -0.2629910878669987 , -0.03873020885291506 )

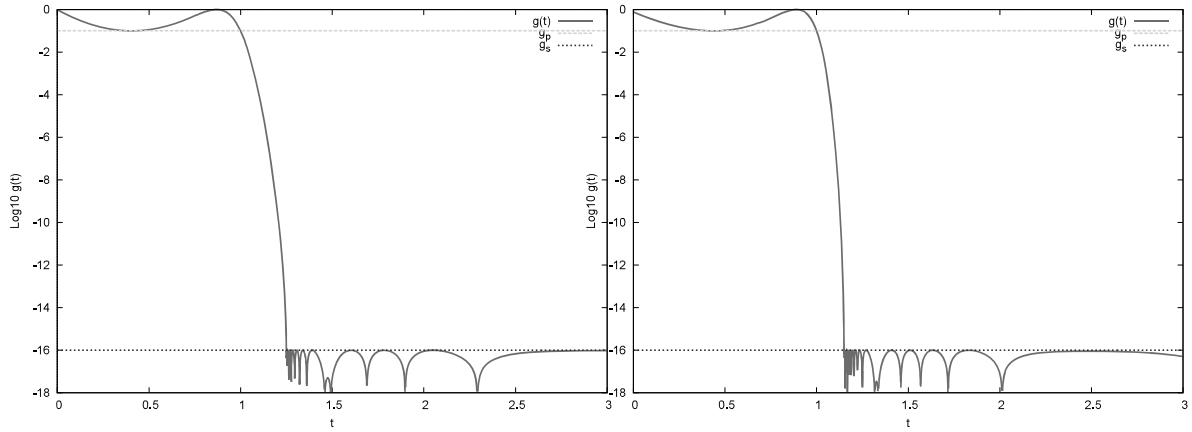


図 10: 3 次の例 1: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

図 11: 3 次の例 2: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

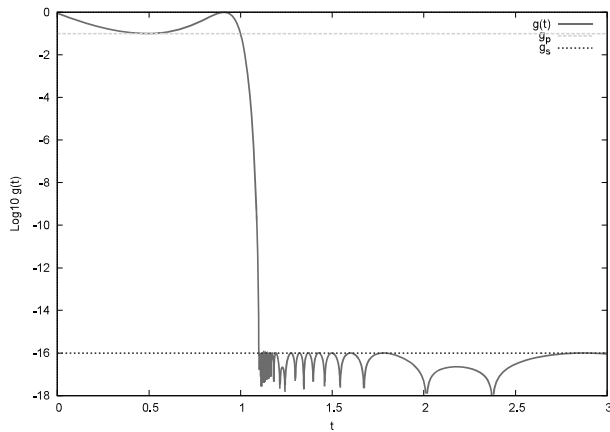


図 12: 3 次の例 3: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

## 5.4 4 次の有理関数 $y(t)$ の構成例

3 次の場合と同様の方法で 4 次の有理関数  $y(t)$  を求めた。分点の  $t$  座標は  $z_3 > z_2 > z_1 > 1 > \mu$  であり、 $y(t)$  は  $t = z_3$  で極大値  $y_h$  をとり、 $t = z_2$  で極小値  $y_\ell$  をとり、 $t = z_1$  で極大値  $y_h$  をそれぞれとることを想定している。  $t$  の 4 次有理関数  $y(t)$  が得られたら、その部分分数分解で  $\tau_i, \alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$  が求まる (式 (35))。

$$y(t) = \frac{p_4 t^4 + p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0}{q_4 t^4 + q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0} = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{t - \tau_i} + \beta. \quad (35)$$

### 5.4.1 4 次有理関数 $y(t)$ の例 1

この例 1 で指定したパラメータは  $n = 6, \mu = 1.2, g_s = 1.0\text{E}-14, g_p = 0.1, z_3 = 0.0, z_2 = 0.6, z_1 = 0.919, \beta = -1.0$  である。得られた  $y(t)$  の式に数値を入れて求めた 4 次有理関数とその部分分数分解の係数をそれぞれ表 8 と表 9 に示す。この例では 4 つの極すべてが虚数である。得られた伝達関数  $g(t)$  の対数プロットによるグラフを図 13 に示す。

表 8: 4 次例 1: 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
4	-1.00000 00000 00000 0	1.00000 00000 00000 0
3	0.51748 61492 82410 9	-1.84892 09528 21333 0
2	23.24250 92246 9172	1.04376 66027 16690
1	-55.62118 17587 6584	-0.45999 99473 87165 2
0	34.57118 89983 8557	0.28591 16728 10922 4

表 9: 4 次例 1: 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	( -0.05793277975354995 , 0.5371498091494078 )	( 4.583653752781563 , -29.49711324620393 )
2	( -0.05793277975354995 , -0.5371498091494078 )	( 4.583653752781563 , 29.49711324620393 )
3	( 0.9823932561642166 , 0.1201459823859164 )	( -5.249371154551032 , -4.081708977526219 )
4	( 0.9823932561642166 , -0.1201459823859164 )	( -5.249371154551032 , 4.081708977526219 )

### 5.4.2 4 次有理関数 $y(t)$ の例 2

この例 2 で指定したパラメータは  $n = 15, \mu = 1.25, g_s = 1.0\text{E}-17, g_p = 0.1, z_3 = -0.1, z_2 = 0.5, z_1 = 0.9, \beta = -1.0$  である。得られた  $y(t)$  の式に数値を入れて求めた  $t$  の 4 次有理関数とその部分分数分解の係数をそれぞれ表 10 と表 11 に示す。この例では、4 つの極のうち 2 つが負の実数であり、他の 2 つは虚数である。得られた伝達関数  $g(t)$  の対数プロットによるグラフを図 14 に示す。

## 5.5 5 次有理関数 $y(t)$ の構成例

同様に、 $t$  の有理関数  $y(t)$  で 5 次ものを求めた例を示す。分点の  $t$  座標は  $z_4 > z_3 > z_2 > z_1 > 1 > \mu$  で、 $y(t)$  は  $t = z_4$  で極小値  $y_\ell$  を、 $t = z_3$  で極大値  $y_h$  を、 $t = z_2$  で極小値  $y_\ell$  を、 $t = z_1$  で極大値  $y_h$  をそれぞれとることを想定している。

表 10: 4 次の例 2: 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
4	-1.00000 00000 00000	1.00000 00000 00000
3	8.45849 46850 61911	-0.64121 93119 078641
2	-13.66941 19412 8372	-1.38660 47801 91975
1	3.04879 76106 23172	0.59033 59425 967925
0	3.76418 83344 95153	0.53544 56306 537263

表 11: 4 次の例 2: 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-0.5381435195241323	-3.587949920127177
2	-0.8966862455101313	12.34156106715983
3	( 1.038024538471064 , 0.1792523208796211 )	(-0.4681678869392991 , -0.1790403121804012 )
4	( 1.038024538471064 , -0.1792523208796211 )	(-0.4681678869392991 , 0.1790403121804012 )

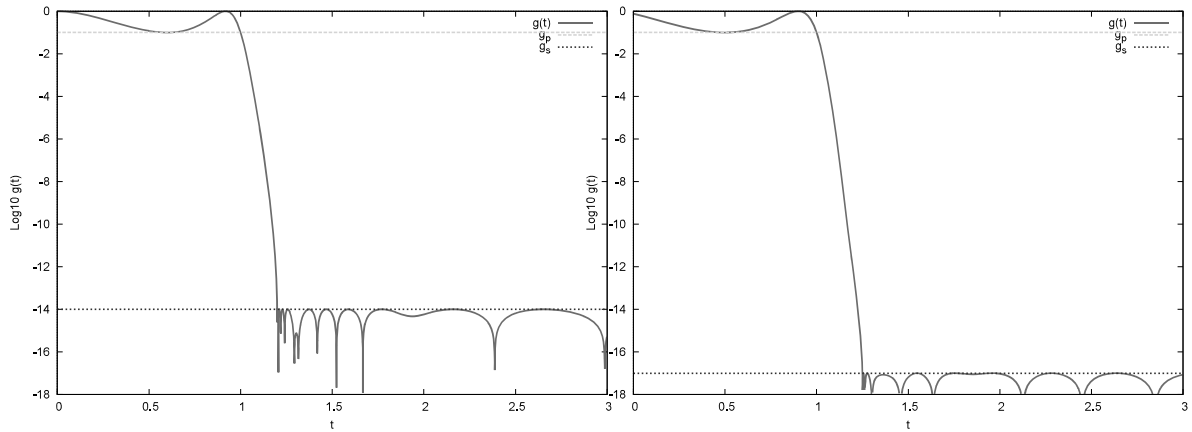


図 13: 4 次の例 1: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット 図 14: 4 次の例 2: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

### 5.5.1 5 次の有理関数 $y(t)$ の例 1

この例 1 で指定したパラメータは  $n = 6$ ,  $\mu = 1.25$ ,  $g_s = 1.0E-12$ ,  $g_p = 0.1$ ,  $z_4 = -0.02$ ,  $z_3 = 0.328$ ,  $z_2 = 0.565$ ,  $z_1 = 0.884$ ,  $\beta = -1.0$  である。求めた  $t$  の 5 次の有理関数  $y(t)$  とその部分分数分解の係数をそれぞれ表 12 と表 13 に示す。この例では  $y(t)$  の 5 つの極のうちで 1 つが負の実数であり、他の 4 つは虚数である。伝達関数  $g(t)$  の対数プロットのグラフを図 15 に示す。

### 5.5.2 5 次の有理関数 $y(t)$ の例 2

この例 2 で指定したパラメータは  $n = 10$ ,  $\mu = 1.25$ ,  $g_s = 1.0E-17$ ,  $g_p = 0.3$ ,  $z_4 = -0.1$ ,  $z_3 = 0.15$ ,  $z_2 = 0.56$ ,  $z_1 = 0.8993$ ,  $\beta = -1.0$  である。求めた 5 次の有理関数  $y(t)$  とその部分分数分解の係数をそれぞれ表 14 と表 15 に示す。この場合も  $y(t)$  の 5 つの極のうちで負の実数のものは 1 つであり、他の 4 つは虚数である。伝達関数  $g(t)$  の対数プロットのグラフを図 16 に示す。



表 12: 5 次の例 1 : 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
5	-1.00000 00000 00000	1.00000 00000 00000
4	14.97124 42750 8843	-1.75317 17138 4277
3	-47.88150 22112 4358	0.14806 21192 48758 1
2	56.40826 45351 502	1.20604 31565 32641
1	-25.95833 95720 1086	-0.69128 58745 17612 5
0	4.52880 23926 6024	0.11829 14398 67033 5

表 13: 5 次の例 1 : 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-0.8763050980537005	21.55431876707667
2	( 0.347945328467698 , 0.1360453023563609 )	( -0.5860469671030677 , -1.730137620550229 )
3	( 0.347945328467698 , -0.1360453023563609 )	( -0.5860469671030677 , 1.730137620550229 )
4	( 0.9667930774805371 , 0.180162106311405 )	( -3.58207613581243 , -3.307003672155497 )
5	( 0.9667930774805371 , -0.180162106311405 )	( -3.58207613581243 , 3.307003672155497 )

表 14: 5 次の例 2 : 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
5	-1.00000 00000 00000	1.00000 00000 00000
4	11.29232 14123 7796	-1.52656 71733 46036
3	-25.83057 70185 2381	-0.02191 92128 97787 56
2	15.03603 37817 9158	0.58108 67520 43068 1
1	0.88748 29013 97982 5	-0.01316 01703 75115 32
0	1.56573 62010 72761	0.06245 90843 96722 42

表 15: 5 次の例 2 : 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-0.6068529002486593	10.73046751192035
2	( 0.002116639462734922 , 0.2957994948609118 )	( 1.929091546559897 , -0.5631984298239632 )
3	( 0.002116639462734922 , -0.2957994948609118 )	( 1.929091546559897 , 0.5631984298239632 )
4	( 1.064593397334613 , 0.2070714409438467 )	( -2.4114481830041 , -0.8703966235870116 )
5	( 1.064593397334613 , -0.2070714409438467 )	( -2.4114481830041 , 0.8703966235870116 )

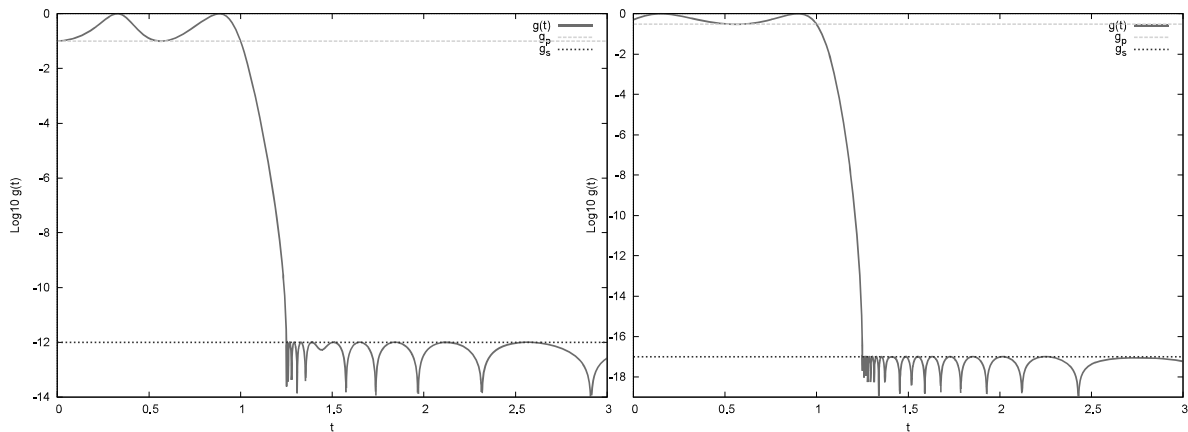


図 15: 5 次の例 1: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

図 16: 5 次の例 2: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

## 5.6 6 次の有理関数 $y(t)$ の構成例

同様にして有理関数  $y(t)$  として 6 次のものを求めた例を示す.  $y(t)$  は  $t = z_5$  で極大で値  $y_h$  を,  $t = z_4$  で極小で値  $y_l$  を,  $t = z_3$  で極大で値  $y_h$  を,  $t = z_2$  で極小で値  $y_l$  を,  $t = z_1$  で極大で値  $y_h$  を, それぞれとるものと想定している. この場合には, 最初からパラメタ  $\mu, y_h, y_l, z_5, z_4, z_3, z_2, z_1, \beta$  を記号としてではなくて最初から浮動小数点数で与えて連立条件式を構成し, それを解いて有理関数  $y(t)$  の係数の値などを求めたので, ある程度の誤差が見られる (たとえば  $\beta$  として  $-1$  を指定しているのであるから, 係数  $q_6$  を 1 に正規化した表現では係数  $p_6$  は  $-1$  になるべきであるが, 実際には少し値が違うなど). 用いる浮動小数点数を可変多倍長に変更して精度を上げるようなことはしていない.

### 5.6.1 6 次の有理関数 $y(t)$ の例 1

この例 1 で指定したパラメータは  $n = 15, \mu = 1.15, g_s = 1.0E-18, g_p = 0.3, z_5 = -0.1, z_4 = 0.0, z_3 = 0.15, z_2 = 0.585, z_1 = 0.9163, \beta = -1.0$  である. 求めた 6 次の有理関数  $y(t)$  をその部分分数分解の係数をそれぞれ表 16 と表 17 に示す. この場合は  $y(t)$  の 6 つの極のうちで負の実数は 2 つであり, 他の 4 つは虚数である. 伝達関数  $g(t)$  の対数プロットのグラフを図 17 に示す.

表 16: 6 次の例 1: 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
6	-1.00000 00000 01142	1.00000 00000 00000
5	9.51730 31683 84158	-1.02200 25226 86416
4	-17.64735 26053 5631	-1.00382 35914 64308
3	5.95599 18354 53911	0.67914 55274 91078
2	3.74676 74314 96563	0.42113 79516 191177
1	0.09533 67767 74513 16	0.01239 46278 03795 46
0	0.02126 16636 11517 11	0.00276 42051 24928 316

表 17: 6 次の例 1: 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	-0.5192445113146765	-17.08886991290969
2	-0.6444287559386372	26.93590165182323
3	( -0.009282734190950697 , 0.08111676183564782 )	( -0.01117056037112008 , 0.05499093435653132 )
4	( -0.009282734190950697 , -0.08111676183564782 )	( -0.01117056037112008 , -0.05499093435653132 )
5	( 1.102120629160816 , 0.156715007825358 )	( -0.6646949862373658 , 0.03231254661124405 )
6	( 1.102120629160816 , -0.156715007825358 )	( -0.6646949862373658 , -0.03231254661124405 )

### 5.6.2 6 次の有理関数 $y(t)$ の例 2

この例 2 で指定したパラメータは  $n = 15, \mu = 1.1, g_s = 1.0E-18, g_p = 0.3, z_5 = 0.0, z_4 = 0.25, z_3 = 0.39, z_2 = 0.705, z_1 = 0.9425, \beta = -1.0$  である. 求めた 6 次の有理関数  $y(t)$  とその部分分数分解の係数をそれぞれ表 18 と表 19 に示す. この場合は  $y(t)$  の 6 つの極は全て虚数である. 伝達関数  $g(t)$  の対数プロットのグラフを図 18 に示す.

表 18: 6 次の例 2 : 有理関数の係数

$i$	$p_i$	$q_i$
6	-0.99999 99999 98194 8	1.00000 00000 00000
5	6.02880 53898 71287	-2.26115 12752 61973
4	-6.72060 47745 99361	2.00527 80359 99219
3	-6.07631 59076 29432	-1.82669 86708 13747
2	12.61196 04480 1579	1.66548 78755 96829
1	-5.46507 07113 67828	-0.65612 05485 04405 2
0	0.75968 88662 25923 4	0.09120 60432 38201 45

表 19: 6 次の例 2 : 部分分数分解の係数 ( $\beta = -1.0$ )

$i$	$\tau_i$	$\alpha_i$
1	( 0.3007706936160109 , 0.1022197891156138 )	( 0.05406449627983023 , 0.01994550611000993 )
2	( 0.3007706936160109 , -0.1022197891156138 )	( 0.05406449627983023 , -0.01994550611000993 )
3	( -0.2410112929427375 , 0.8501221617103861 )	( 2.274917861238962 , -3.430723134710482 )
4	( -0.2410112929427375 , -0.8501221617103861 )	( 2.274917861238962 , 3.430723134710482 )
5	( 1.070816236957713 , 0.1044786239777243 )	( -0.4451553002120929 , 0.03676307909308231 )
6	( 1.070816236957713 , -0.1044786239777243 )	( -0.4451553002120929 , -0.03676307909308231 )

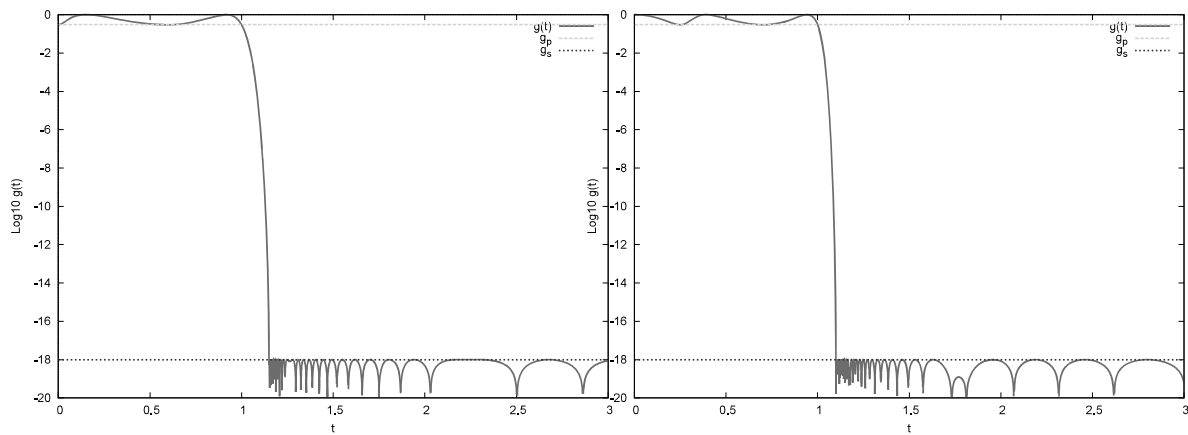


図 17: 6 次の例 1: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット    図 18: 6 次の例 2: 伝達関数  $g(t)$  の片対数プロット

## 6 おわりに

数式処理を用いてパラメタ  $z_1, z_2, z_3, \mu, y_h, y_l, \beta$  を記号として扱って計算を行う場合に、有理関数  $y(t)$  を通常のように 2 つの一般多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  の比の形において各分点での条件を満たすようにそれらの係数を定める場合には、分点  $x_p$  で  $y(t)$  の値が定数  $y_p$  になるという条件  $N(x_p) - y_p \cdot D(x_p) = 0$  は多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  それぞれの  $t$  の各次の項の係数について線型の関係式になる。しかしある分点  $t = z_q$  で  $y(t)$  の微分の値が零になるという条件  $N'(z_q)D(z_q) - N(z_q)D'(z_q) = 0$  は分子と分母の多項式の係数の積を含み、非線形の関係式になる。非線形の関係式を連立させて解くことは容易ではない。数式処理システム Maxima を用いて有理関数  $y(t)$  を一般多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  の比としてそれらの係数を厳密計算で決める方法では  $y(t)$  が 5 次や 6 次の場合には計算時間が長くなって完了しなかった。

他方で重心形式を用いて表現すれば最初から各分点での条件を満たす  $y(t)$  の厳密な式を手でもって書き下せる。そうして重心形式の含む未定常数を有理関数  $y(t)$  の次数をなるべく下げるように決めたい場合に

は、その条件式は未定常数について線形の関係になるので（係数行列はパラメタを含んでいるが）連立1次方程式を解いて未定常数を決めれば良いので、有理関数  $y(t)$  として5次のを求める場合でもパラメタに数値を入れる前の厳密な式を Maxima で計算することができた。

重心形式を用いる場合にはさらに以下のような数値・数式融合的な計算方法も利用できる。重心形式で表現された  $y(t)$  が含むパラメタ  $z_1, z_2, z_3, \mu, y_h, y_\ell, \beta$  をそれらの浮動小数点数数値で置き換えれば記号として未定常数  $c_{z_1}, c_{z_2}, c_{z_3}, d_{z_1}, d_{z_2}, d_{z_3}, c_1$  だけを含んだ  $t$  の有理式になる。そうしてこの重心形式の  $y(t)$  を  $t$  の2つの多項式  $N(t)$  と  $D(t)$  の比の形に変形する。  $N(t)$  と  $D(t)$  それぞれの各次の項の係数は、未定常数についての浮動小数点数係数の線形な式である。そうして各多項式の高次側の係数を零に等しいとおいて得られる（単なる浮動小数点数係数の）連立1次方程式を解いて未定常数の数値を決定する。そうしてその未定常数の数値を  $N(t)$  と  $D(t)$  に代入して整理すれば、零に等しくすることを要請しなかった低次側の各係数が数値で決まる。このような方法で計算すると数式の項の膨張を抑えて非常に早く計算することができた。しかし数値誤差による影響に対する考慮が必要になる。たとえば誤差の影響により、 $y(t)$  の重心形式である浮動小数点数数値や未定常数を含む  $t$  の有理式を2つの  $t$  の多項式の比に変換する段階において既に、それら2つの多項式の次数が正しく出ないなどの困難を回避するように処理の内容を少しだけ工夫する必要があった（その詳細については省略する）。

## 謝 辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

## 参 考 文 献

- [1] Jean-Paul Berrut and Lloyd N. Trefethen: "Barycentric Lagrange Interpolation", *SIAM Review*, Vol.46, No.3 (2004), pp.501–517.