

数体に対する Green-Tao の定理

東北大学数学専攻 甲斐亘

Wataru Kai

Mathematical Institute, Tohoku University

目次

1 主定理の主張	1
2 証明の3大要素	4
3 時系列	5
4 重みづけ関数の構成	6
5 擬ランダム性	8
6 重みつき密度の保証	9
7 論文本体と本稿の対応	11

1 主定理の主張

本稿の主定理は Green-Tao の定理の数体版 (定理 1.5) ですが, これを以下のような文脈に位置付けて紹介したいと思います.

一般的な問い. 与えられた有限個の定数でない既約多項式 $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[x]$ について, これが同時に素数値をとることはあるか? (あるとすれば, 無限回同時に素数値をとるか? その頻度の漸近的振舞いは?)

まず, 1 変数の場合を考えてみます. $k = 1$ でも, 問いは十分意味を持ちます. この場合は, 所与の 1 個の多項式が (無限回) 素数値を取りうるかという問題となっています. これについてまずは次のような結果が知られています.

定理 1.1. (1) $f_1 = x$ は無限回素数値をとる (Euclid).

(2) $a, b \in \mathbb{Z}$ は互いに素で $a \neq 0$ とする. このとき $f_1 = ax + b$ は無限回素数値をとる (Dirichlet).

おそらくご存知のように、 $ax + b$ が素数値をとる頻度の漸近的振舞いも知られています (Siegel-Walfisz, 等差数列の素数定理). 1変数の状況を全て解決するはずの、次のような予想があります.

予想 1.2 (Schinzel 予想). $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[x]$ を定数でない既約多項式とする. 次の条件を仮定する :

仮定. 任意の素数 $p > 0$ に対して, 適当な $n_p \in \mathbb{Z}$ をとると, 値 $f_i(n_p)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が全て p と互いに素となる.

このとき, $f_1(n), \dots, f_k(n)$ が全て素数 (正または負の) となるような $n \in \mathbb{Z}$ が無限個存在する.

Schinzel 予想 1.2 は Dirichlet の定理を除く全てのケースで未解決であり, とくに次のようなケースで主張が正しいかどうか知られていません.

例 1.3. (1) $k = 2$ で, $f_1 = x, f_2 = x + 2$ (双子素数予想).

(2) $k = 1$ で, $\deg(f_1) \geq 2$. たとえば $f_1 = x^2 + 1, x^2 \pm x + 41$ など.

多変数のほうが, 多項式を素数値にすることは容易になります. この場合には肯定的な結果がたくさんあります.

例 1.4. (1) (Fermat) $f(x, y) = x^2 + y^2$ は無限個の素数値をとる. (そしてとりうる素数値はちょうど, 2 および $p \equiv 1 \pmod{4}$ をみたす奇素数 $p > 0$ である.)

(2) (Helfgott [H13]) $N \geq 7$ を与えられた奇数とするとき, $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y, f_3(x, y) = N - x - y$ は $f_1, f_2, f_3 > 0$ の範囲で少なくとも 1 回同時に素数値をとる.

(3) (Green-Tao [GT08]) k 個の 2 変数 1 次多項式

$$x, x + y, \dots, x + (k - 1)y$$

は $x \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ の範囲で (無限回) 同時に素数値をとる.

本稿の主定理である, 数体に対する Green-Tao の定理は, 次のように述べられます.

定理 1.5. K を数体とし \mathcal{O}_K をその整数環とする. $S \subset \mathcal{O}_K$ を有限集合とする. このとき次の $\#S$ 個の多項式

$$x + sy \in \mathcal{O}_K[x, y] \quad (s \in S)$$

は $x \in \mathcal{O}_K, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ の範囲で (無限回) 同時に素元値をとる.

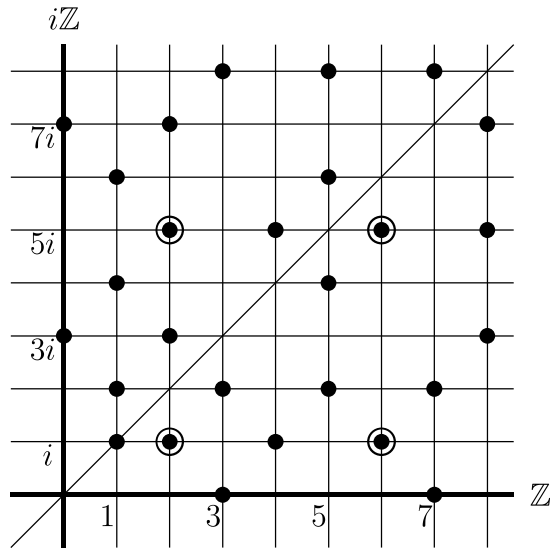


図 1: Gauss 素数でできた正方形

例 1.6 (Gauss 整数環 $\mathbb{Z}[i]$ の場合 (Tao の結果 [Tao06])). よくご存知のように, $\mathbb{Z}[i]$ の素元は次のどちらかの形をしています.

- $p > 0$ が $p \equiv 3 \pmod{4}$ を満たす素数であるとき, $\pm p, \pm ip$ は $\mathbb{Z}[i]$ の素元.
- $a, b \in \mathbb{Z}$ が, $a^2 + b^2$ が素数であるような整数であるとき, $a + bi$ は $\mathbb{Z}[i]$ の素元.

これをプロットすると図 1 のようになります.

定理 1.5 が成り立っている様子を見るために, $S = \{0, 1, i, 1 + i\}$ という正方形の形をした 4 点集合を例にとります. 定理によると, $x + sy$ が全ての $s \in S$ に対して素元となるような $x \in \mathbb{Z}[i], y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ があるはずですが.

目を凝らしてよく探すと, たとえば $x = 2 + i, y = 4$ としたとき,

$$x + Sy = \{2 + i, 6 + i, 2 + 5i, 6 + 5i\}$$

となり, 4 点全てが素元となります.

一般に, $x + sy$ が全ての $s \in S$ に対して素元となるような $x \in \mathcal{O}_K, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を探すことと, S を相似拡大 (非零整数の倍率で) して平行移動して得られる図形を, 素元の集合の中から探ることが同じ問題です. このような図形を S -星座と呼んでいます.

定義 1.7. M をアーベル群, $S \subset M$ を部分集合とする. 適当な $x \in M, a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を用いて $x + aS$ の形に書ける M の部分集合を, S -星座と呼ぶ.

定理 1.5 は, 「任意の有限集合 $S \subset \mathcal{O}_K$ に対して, \mathcal{O}_K の素元の集合は S -星座を (無限個) 含む」とも言い表せます. そこで私達はこの定理を数体の素元星座定理と呼ぶことにしています.

2 証明の3大要素

定理 1.5 の証明は、組合わせ論に由来する大道具「**相対 Szemerédi 定理**」に、「Goldston-Yıldırım 形評価式」と「Chebotarëv 密度定理」を投入することでなされます。

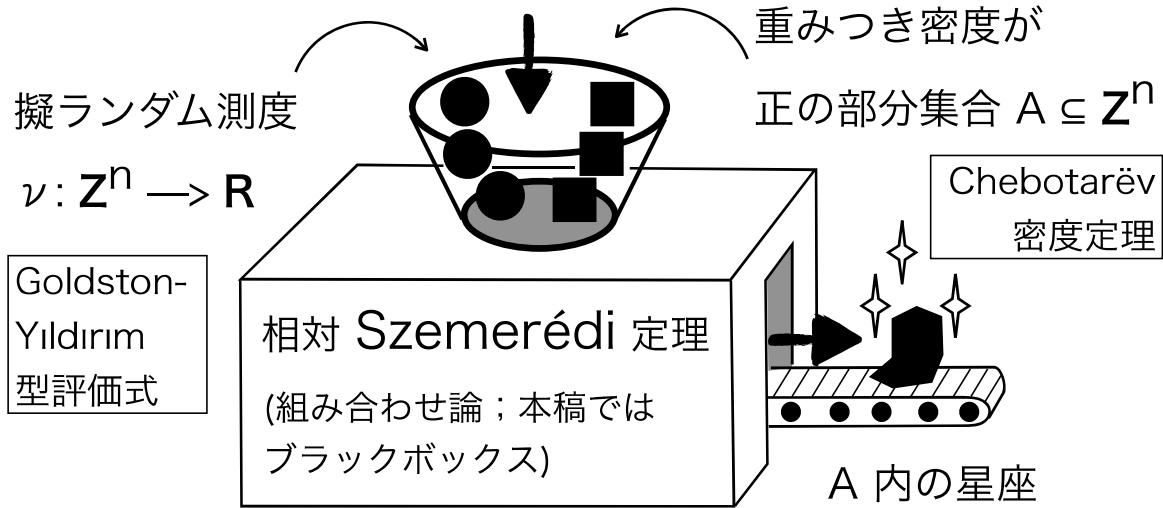


図 2: 証明の 3 大要素

相対 Szemerédi 定理は、組合わせ論の難しい定理で、本稿ではブラックボックスとして扱います。主張を正確に述べるだけでも準備に骨が折れるのでやめておきますが、その役割は、有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^n$ が予め指定してある状態で、2つのデータ「 S -擬ランダム測度 $\nu: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 」および「 ν で測った重みつき密度が正の部分集合 $A \subset \mathbb{Z}^n$ 」が与えられたときに、部分集合 A 内の S -星座を見つけて返すことです (図 2)。

論文 [星座 20, §5] を見ていただければ相対 Szemerédi 定理の正確な主張が載っています。共同研究者の関真一郎さんによる記事 [関 21, §§2–4] にも歴史を含めた解説があります。

用語の若干の解説 関数 ν が S -擬ランダム測度という条件は、関数 ν が定数関数 1 に十分近い (S -星座を見つけるという目的に関する限り) という趣のものです。正確な定式化は [星座 20, §5] に載っています。

部分集合 A の**重みつき密度**とは、記号 $[-N, N] \subset \mathbb{Z}$ で区間を表したとき、比

$$\left(\sum_{\mathbf{x} \in A \cap [-N, N]^n} \nu(\mathbf{x}) \right) / \left(\sum_{\mathbf{x} \in [-N, N]^n} \nu(\mathbf{x}) \right)$$

の極限 ($\limsup_{N \rightarrow +\infty}$) を言います。 ν が S -擬ランダム測度のときは、分母は小さい誤差を除いて $(2N+1)^n \doteq (2N)^n$ と考えてよいです。

相対 Szemerédi 定理は、重みづけ関数が定数関数 1 の場合が古くから知られていました。このとき、主張は

「部分集合 $A \subset \mathbb{Z}^n$ が正の相対密度を持つとき、任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^n$ に対して、 A の中には S -星座が存在する」

となり、加法的整数論の古典的大定理とされています。Szemerédi が \mathbb{Z} の場合 (1975), Furstenberg-Katznelson が \mathbb{Z}^n の場合 (1978) を証明しました。相対密度が正というのは量的な条件なのに、 S -星座という、元どうしの位置関係がキツカリ決まった構造が見つかってしまうというのは、不思議に感じられはしないでしょうか。

重みづけ関数 ν の入った相対 Szemerédi 定理は、Green-Tao が素数の等差数列を見つけるために構想し証明しました [GT08, §§3–8]。私達の論文では、Conlon-Fox-Zhao の 3 氏によって洗練されたバージョン [CFZ15] を土台にしつつ、手元の問題に適用しやすくなるようにインターフェースの微調整もしています。

主定理を示すには 私達は相対 Szemerédi 定理を整数環 $\mathcal{O}_K \cong \mathbb{Z}^n$ に適用します。重みづけ関数 $\nu: \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ としては、解析数論でおなじみの von Mangoldt 関数に、やや手を加えた変種を用います。この関数が S -擬ランダム測度であることを述べた命題は、用いられる計算テクニックのもともとの考案者 (\mathbb{Z} の場合) の名を冠して「Goldston-Yıldırım 型の評価式」と呼ぶことにしています。

部分集合 $A \subset \mathcal{O}_K$ としては私達はもちろん素元のなす集合を考えます (本当は計算の都合で少しだけ違うのですが、大きくは違いません)。「重みつき密度が正」という条件は、あとで説明するように、Chebotarëv 密度定理から保証される仕組みになっています。

そういうわけで、相対 Szemerédi 定理・Goldston-Yıldırım 型評価式・Chebotarëv 密度定理が主定理の証明の 3 大要素です。

3 時系列

ところでこの仕事は次のような経緯をたどって完成しました (図 3)。

2018 秋 Green-Tao の定理の勉強会が東北大学の数学・情報科学のメンバーで開かれ始める。

2019 初夏 Green-Tao の定理の証明までさらう。Tao の Gauss 整数の場合の勉強は夏休みの宿題となる。

2019 秋 数体版ができる可能性が浮上。

2019 年末 定理 1.5 の証明の目処が立つ。

2020 年 証明の合理化。精密化・変種。論文執筆。

2020 年に取り組んでいた定理 1.5 の変種には、例えば次の定理が含まれます。

定理 3.1. $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathbb{Z}[x, y]$ を、原始的 (a, b, c の最大公約数が 1) で、判別式 $b^2 - 4ac$ が平方数でないような 2 次形式とする。

このとき \mathbb{Z}^2 の中で $F(x, y)$ の値が正または負の素数であるような点全体の集合は、任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^2$ に対して S -星座を含む。

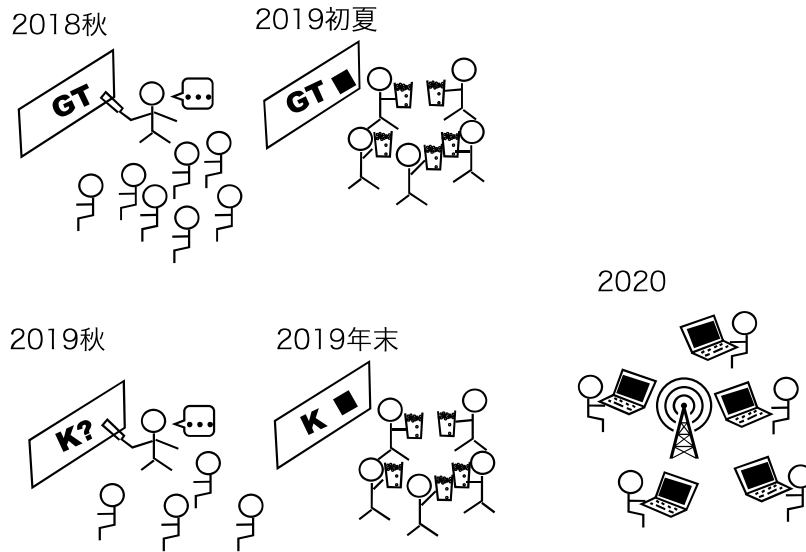


図 3: 時系列

定理 3.1 を証明するには、主張を 2 次体に関するものと解釈して定理 1.5 の証明と同じ議論を適用します。この際、やや文脈を広げて、イデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ とその中の「素元」(元 $\alpha \in \mathfrak{a}$ であって、ある極大イデアル $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ に対して \mathcal{O}_K 加群としての同型 $\mathfrak{a}/\alpha\mathcal{O}_K \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ を持つもの) を考察することになります。けれども証明の難易度は本質的に上がりません。

4 重みづけ関数の構成

ここからは第 2 節で触れた証明の中身を少しだけ解説します。

まずは重みづけ関数 $\nu: \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を構成しなければ話が始まりません。解析数論でおなじみの von Mangoldt 関数を思い出しましょう。Ideal $_K$ という記号で、 \mathcal{O}_K の非零イデアルがなす乗法モノイドを表すことにします。単項イデアルを考えることで、乗法的な写像 $\mathcal{O}_K \setminus \{0\} \rightarrow \text{Ideal}_K$ があります。数体 K の von Mangoldt 関数の自然な定義域は Ideal $_K$ です：

$$\Lambda_K: \text{Ideal}_K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\mathfrak{a} \mapsto \begin{cases} \log N(\mathfrak{p}) & \mathfrak{a} \text{ が素イデアル } \mathfrak{p} \text{ の } 1 \text{ 乗以上の冪の場合} \\ 0 & \text{そうでない場合.} \end{cases}$$

この Λ_K に私達は色々な操作を施して、扱いやすい (= 擬ランダム性を証明しやすい) ものに変形します：

Möbius の反転公式. 乗法モノイド Ideal $_K$ において、通常 Möbius 反転公式と同様のものが成り立ちます。簡単な等式 $\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \Lambda_K(\mathfrak{b}) = \log N(\mathfrak{a})$ にこの反転公式を適用すると、von Mangoldt 関数の別の表示 $\Lambda_K(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu_K(\mathfrak{b}) \log N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$ を得ます。

(「簡単な等式」は、 $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}q^2$ の形のときで検討すれば仕組みが分かります。)

W-trick. 素数を小さい順にいくつか (>1 億個くらい) 掛けた整数 W を適切に取り, $\text{mod } W$ の剰余類をひとつ固定してそこに含まれる素元のみに着目するプロセスです. このため, 第2節で考えるべき部分集合 $A \subset \mathcal{O}_K$ が素元全体の集合からは少しずれます.

Goldston-Yıldırım の打ち切り因数和 (truncated divisor sum). 大きめな境界値 R を適切に決め, Möbius の反転公式に現れる和 $\sum_{b|a}$ の代わりに, ノルムを打切った部分 $\sum_{b|a \text{ s.t. } N(b) \leq R}$ を考えるプロセスです.

Tao の平滑化. 上の打ち切りにおいて, 境界値の前後で単純に打切るのではなく, 予め決めたコンパクト台 C^∞ 関数 χ の値に応じて寄与を減らしていくよう修正することです.

個々の変形の様子を省いて, いきなり完成品に飛んでしまうことにしますが, 結果的に, 次のような重みづけ関数を使うことになります.

定義 4.1. $W > 0$ を, 正の素数を小さい順に有限個掛けて得られる自然数とする. $b \in \mathcal{O}_K$ を, W と互いに素な元とする. $R > 0$ を正の実数とする. $\chi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ を, 区間 $[-1, 1]$ 内に台を持つ C^∞ 関数とし, 規格化のため $\chi(0) = 1$ を仮定する.

上記のデータが与えられたとき, 重みづけ関数 $\nu: \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次のように定める (C はすぐ下で定義する規格化定数):

$$\nu(\alpha) = C \cdot \left(\sum_{\mathfrak{a}|(W\alpha+b)} \mu_K(\mathfrak{a}) \chi \left(\frac{\log N(\mathfrak{a})}{\log R} \right) \right)^2, \quad (1)$$

ただし C は次の規格化定数:

$$C := \text{res}_{s=1}(\zeta_K(s)) \cdot \frac{\#(\mathcal{O}_K/(W))^*}{W^n} \cdot \frac{\log R}{\int_0^1 \chi'(t)^2 dt}. \quad (2)$$

χ の台の条件から, ノルムに関する不等式 $N(\mathfrak{a}) \leq R$ を満たすようなイデアル \mathfrak{a} のみが和に寄与することが見て取れます.

最終目標である定理 1.5 は素元の配置についての主張なのに, 重みづけ関数の定義には単項でないものも含めてあらゆるイデアルが関係してくるのが, やや面白い点かと思えます. あらゆるイデアルを考慮することが, ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ が規格化定数に出現することの理由になっています.

第2節で述べた戦略を機能させるためには, この重みづけ関数が S -擬ランダム測度であり, かつこの重みづけ関数に関して素元たちが正の重みつき密度を持つことを示す必要があります.

5 擬ランダム性

第2節で、相対 Szemerédi 定理を利用するには S -擬ランダム測度が必要である旨を述べました。次の命題が、実質的に私達の重みづけ関数 ν が S -擬ランダム測度であると言っています。

命題 5.1 (Goldston-Yıldırım 型評価式). 正の実数 $w > 0$ が与えられたとき $W := \prod_{p < w} p$ とおくことにする (積は、不等式 $p < w$ を満たす正の素数 p 全体をわたる). $b \in \mathcal{O}_K$ を、 W と互いに素な元とする. $R > 0$ を正の実数とする. $\chi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ を、区間 $[-1, 1]$ 内に台を持ち $\chi(0) = 1$ を満たす C^∞ 関数とする. 以上のデータを用いて定義 4.1 より重みづけ関数 $\nu: \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を定める.

$0 < \rho < 1$ を正の実数とする. $t, m \geq 1$ を自然数とし、 $\phi_i: \mathbb{Z}^t \rightarrow \mathcal{O}_K$ ($i = 1, \dots, m$) を、余核有限な準同型写像で、核どうしの包含関係が無いものとする.

このとき、もしも $1 \ll \log w \ll \sqrt{\log R}$ ならば (つまり、隣合う量の比が十分大きければ)、長さ R^{4m+1} 以上の区間の積であるような任意の部分集合 $B \subset \mathbb{Z}^t$ に対して、評価

$$\left| 1 - \mathbb{E}_{\mathbf{x} \in B} \left(\prod_{i=1}^m \nu(\phi_i(\mathbf{x})) \right) \right| < \rho$$

が成り立つ. ここで \mathbb{E} は期待値 (= 平均値) を表す.

この命題の証明 [星座 20, §6] が、おそらく私達の論文の核心です. 証明は、込み入っているのですが、一言でいうと、Conlon-Fox-Zhao による Green-Tao 定理の分かりやすい解説記事 [CFZ14] を忠実に追うと証明できる、ということになります. ですので ν の定義 4.1 を見出した時点で勝負はついていたとも言えます.

命題の結論部分が、重みづけ関数 ν と定数関数 1 との、ある種の近さを表しているというのはご了解いただけるでしょうか. $\nu \equiv 1$ ならば結論部分が自明に成り立つことのほか、次のような ϕ_i の具体例からもそのような気分を感じ取っていただけたらと思います.

例 5.2. $m = 1$ とし、 \mathcal{O}_K の整基底を選んで同型 $\phi_1: \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_K$ を考えます. この同型を通して、箱形の集合 B を \mathcal{O}_K の部分集合と見なすことにします. 命題 5.1 の結論は、 $|1 - \mathbb{E}_{\alpha \in B} \nu(\alpha)| < \rho$ と書いて、重みづけ関数 ν の平均が、十分大きなスケールでは 1 にくらでも近づけられると述べています.

S -擬ランダム性を定式化するには、命題で所与としている線型写像 ϕ_i のチョイスを特殊化します. この特殊なチョイスは記述しようとするので紙数を食うので省きます.

また、実は、擬ランダム性の正確な定式化には、許容誤差を表すパラメータ $0 < \rho < 1$ と、ランダム性が保証できる箱の最小のサイズ $N > 0$ が絡みます. 私達の論文 [星座 20, §5] では (S, N, ρ) -擬ランダム性と呼んでいます. この用語を使うと、該当する特殊な ϕ_i のチョイスを与えた場合、命題は、 $1 \ll \log w \ll \sqrt{\log R}$ のときに ν が (S, R^{4m+1}, ρ) -擬ランダムである、と言っていることになります.

6 重みつき密度の保証

最後に、定義 4.1 の重みづけ関数 ν に関して、素元たちが正の重みつき密度を持つことを見ます。正確には、第 2 節で予告したように、考える集合 $A \subset \mathcal{O}_K$ は素元全体の集合ではありません。 W -trick を挟んでいるので、 W と互いに素な $b \in \mathcal{O}_K$ を適当に固定した上で、 $\pi := W\alpha + b$ が素元であるような α たちを考えることとなります：

$$A := \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid W\alpha + b \text{ は素元}\}.$$

重みつき密度の計算は、整基底 $\mathcal{O}_K \cong \mathbb{Z}^n$ を決めて、大きなサイズ $N > 0$ の立方体 $[-N, N]^n \subset \mathbb{Z}^n \cong \mathcal{O}_K$ の中で行われます。

重みづけ関数 ν の定義に現れるパラメーターの値をどう固定するのか説明しなければなりません。詳細は省きますが、 C^∞ 関数 χ は何でもいので仮定を満たすように予め固定しておきます。見つけたい星座の形 S に応じて、擬ランダム測度に必要な誤差の精度 $0 < \rho < 1$ が相対 Szemerédi 定理により与えられます。パラメーター w は、この ρ に応じて命題 5.1 (ν の擬ランダム性) から決まる下界よりも大きい値に固定します。パラメーター b は $W = \prod_{p < w} p$ と互いに素ならば何でもよく、たとえば $b = 1$ ととればよいです。本節では、このプロセスを済ませ、 W, b は既に固定されているものとします。

最後のパラメーター R は箱のサイズ N の小さな冪、たとえば $R := N^{1/(4m+1)}$ と定めることとなります。命題 5.1 や、今からおこなう密度保証 (4) は、 R や N が十分大きいことを要請しているので、これを満たすように N を十分大きく決めます。

「箱のサイズ N に伴って、 $R = N^{1/(4m+1)}$ が変わるので、重みづけ関数 ν も変わっていく設定になってしまっているが、いいのか？」と不審に思われた方がいらっしゃるかもしれません。結論から言うと、問題ありません。これは相対 Szemerédi 定理 (§2) の正確な主張を述べなかったことのツケなので、本稿を読む際には気づかなかったことにしてください。

さて $\alpha \in A$, すなわち $\pi := W\alpha + b$ が素元である、と仮定して $\nu(\alpha)$ の値を計算してみます。式 (1) での ν の定義を思い出すと：

$$\nu(\alpha) \stackrel{\text{by def.}}{=} C \cdot \left(\sum_{\mathfrak{a} | (\pi)} \mu_K(\mathfrak{a}) \chi \left(\frac{\log N(\mathfrak{a})}{\log R} \right) \right)^2,$$

ここで和の記号 \sum に現れた (π) は仮定から素イデアルなので、その因数 \mathfrak{a} は (1) と (π) のみです。そのことを踏まえて計算を続行すると：

$$= C \cdot \left(1 - \chi \left(\frac{\log N((\pi))}{\log R} \right) \right)^2.$$

元 α が立方体 $[-N, N]^n$ に属しているとする、 π は緩く見積もって立方体 $[-2WN, 2WN]^n$ に属しています。この箱の中の元のノルムの典型的な大きさは $(WN)^n$ の定数倍程度です。従って、ノルムの絶対値が $R = N^{1/(4m+1)}$ を下回ることは稀です。稀な状況は密度評価においては無視できるので、 $N((\pi)) > R$ と仮定して計算を進めて構いません。この仮定の

下では, χ の台が $[-1, 1]$ に含まれていたことから, $\chi\left(\frac{\log N((\pi))}{\log R}\right) = 0$ です. 従って先ほどの値は:

$$= C$$

と計算されます. 規格化定数 C の中身 (2) のうち, $\log R$ は外に出して $C = C' \log R$ と書くことにしましょう. $R = N^{1/(4m+1)}$ でしたので:

$$= \frac{C'}{4m+1} \log N.$$

つまり, $\alpha \in A = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid W\alpha + b \text{ は素元}\}$ に対して, 稀な場合を除いて

$$\nu(\alpha) = \frac{C'}{4m+1} \log N$$

という具体的な α に依らない値になります. したがって, 集合 A の重みつき密度が正か? という問いは, A が十分な数の元を含むか? という問いと同値になります:

$$\begin{aligned} & \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\alpha \in A \cap [-N, N]^n} \nu(\alpha)}{(2N)^n} > 0? \\ \Leftrightarrow & \#(A \cap [-N, N]^n) \geq \text{const.} \cdot \frac{N^n}{\log N} \\ & \text{for some positive constant and a sequence } N \rightarrow +\infty? \end{aligned}$$

後者の問いに肯定的に答えるために, Chebotarëv 密度定理を使います. W は既に固定してあるので, 少しズルではありますが W -trick の影響は無かったことにして, 本稿では

$$\text{箱 } [-N, N]^n \text{ 中の素元が } \text{const.} \cdot \frac{N^n}{\log N} \text{ 個以上ある} \quad (3)$$

ことを見てみます. 実は, 箱 $[-N, N]^n$ 中の素元の個数評価を, 比例定数までバッチリ決定してしまっている三井の素数定理 [M56] というものが存在するのですが, 私たちの論文 [星座 20] では知名度が高い Chebotarëv 密度定理から導出する方法を紹介しています. 本稿でもこれに倣います. Chebotarëv 密度定理の特別な場合として次が知られています.

定理 6.1 (Chebotarëv 密度定理). $L \rightarrow +\infty$ のとき,

$$\#\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \mid \text{単項な極大イデアルで, } N(\mathfrak{p}) \leq L\} = \frac{1}{h_K} \cdot \frac{L}{\log L} + \text{error}.$$

ただし h_K は K の類数.

この定理を, $c > 0$ を十分小さな係数として $L = cN^n$ の形の L に対して適用します. 単項な極大イデアル \mathfrak{p} が与えられれば, その生成元をとることで素元 π を得ます. この操作を各 \mathfrak{p} に対して行うことにより, 主要項が誤差項を圧倒するくらい N が大きければ,

$$\frac{1}{h_K} \cdot \frac{cN^n}{\log(cN^n)} + \text{error} \geq \text{const.} \cdot \frac{N^n}{\log N} \text{ 個} \quad (4)$$

の素元を手にすることができます。これでほぼ (3) が証明できていますが、最後に少しだけ注意が必要です。

素元 π について、一般にはそのノルムが小さい $N((\pi)) = N(\mathfrak{p}) \leq cN^n$ からといって、その元が原点に近い $\pi \in [-N, N]^n$ とは限りません (c をいくら小さくとっても)。単元的作用で π を取り替えると、ノルムを変えないままいくらでも原点から離れた点を得られるからです。

しかし、同僚類の中で、原点になるべく近い点をとることにした場合、定数 c を十分小さくしておけば、条件 $N((\pi)) \leq cN^n$ から $\pi \in [-N, N]^n$ が従います [星座 20, §4]。これは私は本件に取り組む以前は知りませんでした。数の幾何がらみの古典的事実です。

このように素元の個数保証 (3) が示され、相対 Szemerédi 定理 (§2)、Goldston-Yıldırım 型評価式 5.1 と合わせると主定理 1.5 が証明できたことになります。

7 論文本体と本稿の対応

以上の内容に興味を持ってくださった方のために、本稿の内容が論文本体 [星座 20] のどこに対応するか説明したいと思います。

図 4 に論文の各節の内容とおよその長さが記されています。§1 から §4 まではイントロ

§§1, 2 イントロダクション	約20ページ	§§8, 9 公理的取扱い、 主定理の変種	約30ページ
§3 \mathcal{O}_K のおさらい	約10ページ	§10 2次形式についての 定理3.1	約20ページ
§4 数の幾何	約10ページ		
§5 相対 Szemerédi	約10ページ		
§6 Goldston-Yıldırım 型評価式	約30ページ		
§7 主定理1.5の証明	約10ページ	付録 2次形式と2次体	約5ページ

図 4: 論文 [星座 20] の各節の内容と長さ

ダクションと代数的整数論の初歩の復習です。組合わせ論の人にも読んでもらえるよう、 \mathcal{O}_K の定義から始めています。

§5 からが定理 1.5 の証明の本題です。§5 で、本稿第 2 節で触れた相対 Szemerédi 定理を扱っています。尤も、論文でやっていることは組合わせ論の難しい定理「相対ハイパーグラフ除去補題」を引用して初等的な \mathbb{Z} -線型代数をすることだけです。定理に心底納得す

るには, 相対ハイパーグラフ除去補題の証明 [CFZ15] を学ぶなどする必要があるかもしれません.

§6 では, 本稿第 4, 5 節で説明した, 重みづけ関数 $\nu: \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ の構成とそのランダム性 (命題 5.1 = Goldston-Yıldırım 型評価式) にあたる内容が書かれています.

§7 は本稿第 6 節に対応します. Chebotarëv 密度定理を用いて素元の集合の重みつき密度が正であることを確認し, 定理 1.5 の証明の仕上げを行なっています.

論文 [星座 20] を開いてみると 150 ページもあってびっくりされるかもしれませんが, このように, 代数的整数論を既に知っている方が定理 1.5 の証明を知りたいだけなら, 約 50 ページ読めば (+ ハイパーグラフ除去補題に納得すれば) 十分です.

謝辞

講演と本稿執筆の機会を下さった, 「代数的整数論とその周辺 2021」の関係者の皆様に感謝申し上げます. 本稿は見村万佐人, 宗政昭弘, 関真一郎, 吉野聖人の各氏との共同研究 [星座 20] に基づくものですが, 偶然の成り行きからこの仕事に参画する巡り合わせになったのは幸運でした. 本稿で説明した研究を行なっている間, 科研費 (若手研究) JP18K13382 の支援を受けました.

参考文献

- [CFZ14] David Conlon, Jacob Fox, and Yufei Zhao, *The Green-Tao theorem: an exposition*, EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 249–282. <https://doi.org/10.4171/EMSS/6>
- [CFZ15] David Conlon, Jacob Fox, and Yufei Zhao, *A relative Szemerédi theorem*, Geom. Funct. Anal. **25** (2015), no. 3, 733–762. <https://doi.org/10.1007/s00039-015-0324-9>
- [GT08] Ben Green and Terence Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 2, 481–547. <https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.481>
- [H13] H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true*, 2013. <https://arxiv.org/abs/1312.7748>
- [星座 20] Wataru Kai, Masato Mimura, Akihiro Munemasa, Shin-ichiro Seki, and Kiyoto Yoshino, *Constellations in prime elements of number fields*, 2020. <https://arxiv.org/abs/2012.15669>
- [M56] Takayoshi Mitsui, *Generalized Prime Number Theorem*, Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts **26** (1956), 1–42. https://doi.org/10.4099/jjm1924.26.0_1

- [Tao06] Terence Tao, *The Gaussian primes contain arbitrarily shaped constellations*, J. Anal. Math. **99** (2006), 109–176. <https://doi.org/10.1007/BF02789444>
- [関 21] 関真一郎, 数体の素元星座定理, 第66回代数学シンポジウム報告集, 2021, pp. 184–194. https://www.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp21_files/procalgsymp2021.pdf