Hilbert の第 12 問題の最近の進展について
Recent progress on Hilbert's 12th problem

佐野 昂迪（大阪市立大学）
Takamichi Sano (Osaka City University)

概要

最近 Dasgupta と Kakde により，総実体の最大アーベル拡大の明示的な構成が得られた．本記事では彼らの結果を概説する．

1 序

Hilbert の第 12 問題とは，いわゆる類体の構成問題であり，有理数体と虚 2 次体の場合にはそれぞれ Kronecker–Weber の定理，虚数乗法論としてよく知られている．それ以外の代数体の場合は，これまで大きな進展はほぼ全くなかったようだが，最近 Dasgupta と Kakde は [DK20] において **Brumer–Stark 予想**（の 2 部分以外）を証明し，その応用として [DK21] において総実体の最大アーベル拡大の明示的な構成を与えた．本記事では [DK21] の内容の概説をする．

Brumer–Stark 予想は **Stark 予想**の特別な場合[*1]だが，Stark 予想と Hilbert の第 12 問題との関係は Stark によって [Sta76] において考察されていた．その大雑把な内容は，「Stark 予想が正しければ，**Stark 単数**を添加することでアーベル拡大が構成できる」ということである．今回の Dasgupta–Kakde による総実体の最大拡大の構成は，基本的にこの Stark のアイデアを用いるものである．ただし，Brumer–Stark 予想は Stark 自身によって定式化された予想ではなく，Stark のアイデアを用いて Tate により [Tat84] において定式化された予想であり，Stark 自身が考えていたものとは少し違うということに注意しておく．

本記事では，§2 で Brumer–Stark 予想によりその存在が予想される **Brumer–Stark 単数**に関する基本事項をまとめ，§3 でそれを用いて総実体の最大アーベル拡大の明示的な構成を与える．構成を早く知りたい読者は，§3 だけ読んでもよい（Brumer–Stark 単数の存在を認めれば，構成はかなり初等的である）．

なお，Hilbert の第 12 問題の歴史について本記事では全く触れないが，興味のある読者は例えば [Sch98] を読まれたい．Hilbert 自身による予想の statement や，誤りなどについて詳しく論じられている．

2 Brumer–Stark 単数

F を総実体とする．H/F を有限次アーベル拡大とし，そのガロア群を G とする．F の無限素点全体の集合を $S_\infty(F)$ で表し，H で分岐する F の素点全体の集合を $S_{\mathrm{ram}}(H/F)$ で表す．F の素点の有限集合 S を

$$S := S_\infty(F) \cup S_{\mathrm{ram}}(H/F)$$

とおく．$\#S \geq 2$ と仮定しておく[*2]．さらに，F の素点の有限集合 T で，$S \cap T = \emptyset$ かつ

$$H_T^\times := \{a \in H^\times \mid \mathrm{ord}_w(a-1) > 0,\ \forall w \in T_H\} \tag{1}$$

[*1] より正確には，Stark 予想の精密化である **Rubin–Stark 予想**の特別な場合である．注意 2.6 参照.

[*2] $\#S = 1$ となるのは $F = H = \mathbb{Q}$ のときのみである．

が torsion-free となるものをとる．ここで T_H は T の素点の上にある H の素点全体の集合を表し，$\mathrm{ord}_w : H \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ は w における正規加法付値を表す．例えば，剰余標数が異なる 2 つの素点を T が含んでいれば，この torsion-free という条件は満たされる．以下，この T は固定されたものとし，T に依存するものを記号で表すときに T をしばしばつけないこととする．

F の素点 $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ で H で完全分解するものをとる．H の $(\mathfrak{p}, T)$ 単数群を

$$U_{\mathfrak{p}} = U_{H,\mathfrak{p}} := \ker \left(H_T^\times \xrightarrow{\bigoplus \mathrm{ord}_w} \bigoplus_{w \nmid \mathfrak{p}} \mathbb{Z} \right)$$

とおく．ここで w は $\mathfrak{p}$ を割らない H の有限素点全体を走る．$\mathfrak{p}$ の上にある H の素点 $\mathfrak{P}$ を固定し，写像

$$\mathrm{Ord}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ord}_{H,\mathfrak{p}} : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}} \to \mathbb{Q}[G];\ a \mapsto \sum_{\sigma \in G} \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\sigma a)\sigma^{-1} \tag{2}$$

を考える（これは $\mathbb{Q}[G]$ 加群の準同型写像である）．

$\theta_H = \theta_{H/F,S,T} \in \mathbb{Z}[G]$ を Stickelberger 元とする．この元は次で特徴づけられる[*3]：

$$\forall \chi \in \widehat{G},\ \chi(\theta_H) = L_{S,T}(\chi^{-1}, 0).$$

ここで $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ で，$\chi \in \widehat{G}$ に対して $L_{S,T}(\chi, s)$ は (S, T) で修正した L 関数

$$L_{S,T}(\chi, s) := \prod_{v \in T} (1 - \chi(\mathrm{Fr}_v)\mathrm{N}v^{1-s}) \prod_{v \notin S} (1 - \chi(\mathrm{Fr}_v)\mathrm{N}v^{-s})^{-1}$$

である（$\mathrm{Fr}_v \in G$ は v の Frobenius 自己同型，$\mathrm{N}v$ は v の剰余体の位数を表す）．

L 関数の $s = 0$ での位数に関して，次が知られている（[Tat84, Chap. I, Proposition 3.4] 参照）：

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_{S,T}(\chi, s) = \begin{cases} \#\{v \in S \mid v \text{ は } H^{\ker \chi} \text{ で完全分解する }\} & \chi \neq 1 \text{ のとき,} \\ \#S - 1 & \chi = 1 \text{ のとき.} \end{cases} \tag{3}$$

特に，H が実素点を持てば右辺は常に 1 以上となることから[*4]，**H が総虚でなければ $\theta_H = 0$ である**ことがわかる．

以下，**H は総虚体とする**．このとき，「マイナスべき等元」$e^- \in \mathbb{Q}[G]$ を，任意の $\chi \in \widehat{G}$ に対して

$$\chi(e^-) = 1 \Leftrightarrow H^{\ker \chi} \text{ は総虚体}$$

で特徴づけられるものとする．単数定理を用いると，写像 (2) は同型

$$\mathrm{Ord}_{\mathfrak{p}} : e^-(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} e^-\mathbb{Q}[G]$$

を誘導することがわかる．(3) より，

$$\theta_H \in e^-\mathbb{Q}[G]$$

であることに注意する．

以上の準備の下で，Brumer–Stark 予想は次のように述べられる．

予想 2.1 (Brumer–Stark 予想). 次を満たす $u_{\mathfrak{p}} = u_{H,\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$ がただ一つ存在する：

(i) $e^- u_{\mathfrak{p}} = u_{\mathfrak{p}}$ in $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$,

---

[*3] θ_H が $\mathbb{Z}[G]$ に入ることは，Deligne–Ribet, Cassou-Noguès によるよく知られている結果である．

[*4] $\#S \geq 2$ としていたことに注意する．

(ii) $\mathrm{Ord}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = \theta_H$.

上の $u_{\mathfrak{p}}$ を **Brumer–Stark 単数**と呼ぶ.

注意 2.2. 予想 2.1 を次のように述べてもよい：

$$u_{\mathfrak{p}} = u_{H,\mathfrak{p}} := \mathrm{Ord}_{\mathfrak{p}}^{-1}(\theta_H) \in e^-(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}})$$

と定義したとき,

$$u_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$$

が成り立つ.

このように述べると，予想を仮定しなくても Brumer–Stark 単数は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$ の元として存在しているとみなせる，という利点がある.

注意 2.3. $\mathfrak{p}$ の上の H の素点 $\mathfrak{P}$ を固定していたが，$u_{\mathfrak{p}}$ は実際には $\mathfrak{P}$ のとり方によるので，$u_{\mathfrak{P}}$ と表すべきである．しかし，$\mathfrak{P}'$ を別の $\mathfrak{p}$ の上の素点とすると，$\mathfrak{P}' = \sigma(\mathfrak{P})$（$\sigma \in G$）と書くとき

$$u_{\mathfrak{P}'} = \sigma(u_{\mathfrak{P}})$$

が成り立つことがわかる．よって，$\mathfrak{P}$ をとりかえても本質的に違いがないと言えるので，$\mathfrak{P}$ は固定されたものとして $u_{\mathfrak{P}}$ と表すべきものを $u_{\mathfrak{p}}$ と表すことにするわけである．また，予想 2.1 の正当性は $\mathfrak{P}$ のとり方によらないこともわかる.

注意 2.4. H が総虚でないときは便宜上

$$u_{\mathfrak{p}} := 0$$

とおく.（乗法的な記号を使えば $u_{\mathfrak{p}} := 1$ ということである.）

注意 2.5. $F = \mathbb{Q}$ のとき，予想 2.1 は正しいことが「Stickelberger の定理」として古典的に知られている．このとき，Brumer–Stark 単数はガウス和として具体的に記述できる（[Tat84, Chap. IV, Proposition 6.7], [Pop11, Corollary 4.3.11] 参照).

注意 2.6. 予想 2.1 は $(H/F, S \cup \{\mathfrak{p}\}, T, \{\mathfrak{p}\})$ に対する Rubin–Stark 予想（[Rub96, Conjecture B′] または [BKS16, Conjecture 5.1] 参照）と同値であり，Brumer–Stark 単数 $u_{\mathfrak{p}}$ はこの場合の Rubin–Stark 元と一致する.

本節では最後に, Brumer–Stark 単数の基本性質をいくつか述べる．以下, 注意 2.2 のように, Brumer–Stark 単数 $u_{\mathfrak{p}}$ を（予想を仮定せずに）$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$ の元と考える.

命題 2.7 (ノルム関係式). H/F の任意の中間体 H' に対して[*5]，ノルム写像

$$\mathrm{N}_{H/H'} : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}}$$

による $u_{H,\mathfrak{p}}$ の像は

$$\left(\prod_{\mathfrak{q}} (1 - \mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}) \right) u_{H',\mathfrak{p}}$$

である．ここで $\mathfrak{q}$ は H' で不分岐な S に含まれる有限素点を走る.

[*5] H' は総虚でなくてもよい．H' が総虚でないとき，主張は $\mathrm{N}_{H/H'}(u_{H,\mathfrak{p}}) = 0$ ということである.

特に $S_{\mathrm{ram}}(H/F) = S_{\mathrm{ram}}(H'/F)$ のとき，

$$\mathrm{N}_{H/H'}(u_{H,\mathfrak{p}}) = u_{H',\mathfrak{p}}$$

が成り立つ．

証明. $G' := \mathrm{Gal}(H'/F)$ とおく．自然な全射 $\mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[G']$ による $\theta_H = \theta_{H/F,S,T}$ の像は

$$\left(\prod_{\mathfrak{q}\in S\setminus S'} (1 - \mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1})\right) \theta_{H'/F,S',T}$$

であることが Stickelberger 元の特徴づけよりわかる．ここで $S' := S_\infty(F) \cup S_{\mathrm{ram}}(H'/F)$ である．これに注意すると，命題の主張は Brumer–Stark 単数の定義と可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}} \arrow[r, "\mathrm{Ord}_{H,\mathfrak{p}}"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{H/H'}"'] & \mathbb{Q}[G] \arrow[d] \\ \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}} \arrow[r, "\mathrm{Ord}_{H',\mathfrak{p}}"'] & \mathbb{Q}[G'] \end{tikzcd}$$

から従う． □

次の命題は専門家にとって well-known と思われるが，はっきり書いてある文献はあまりないようである[*6]．

命題 2.8. H' を H に含まれる最大 CM 部分体とする[*7]．このとき，

$$u_{H,\mathfrak{p}} = \frac{1}{[H:H']} \cdot \left(\prod_{\mathfrak{q}} (1 - \mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1})\right) u_{H',\mathfrak{p}} \text{ in } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が成り立つ．ここで $\mathfrak{q}$ は H' で不分岐な S に含まれる有限素点を走る．

特に，

$$u_{H',\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}} \Rightarrow u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が成り立つ．すなわち，Brumer–Stark 予想の 2 部分以外は H が CM 体の場合に帰着される．

証明. $G' := \mathrm{Gal}(H'/F)$ とし，$c \in G'$ を（ただ一つの）複素共役とする．写像

$$\nu : \mathbb{Q}[G'] \to \mathbb{Q}[G];\ x \mapsto \frac{1}{[H:H']} \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(H/H')} \sigma\widetilde{x}$$

を考える．ここで $\widetilde{x} \in \mathbb{Q}[G]$ は $x \in \mathbb{Q}[G']$ の持ち上げを表す．（写像 ν は $\widetilde{x}$ のとり方によらない．）すると，

$$e^- = \nu\left(\frac{1-c}{2}\right)$$

であることがわかる（特に $e^- \in \mathbb{Z}[1/2][G]$ がわかる）．また，

$$\theta_H = \theta_{H/F,S,T} = \nu\left(\left(\prod_{\mathfrak{q}\in S\setminus S'} (1 - \mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1})\right) \theta_{H'/F,S',T}\right)$$

[*6] [DK21] にも書いていないが，暗黙に使われているように思う．

[*7] CM 体とは，総虚体で，ある総実体の 2 次拡大となっている体のことである．最大 CM 部分体 $H' \subset H$ は実際に次のように定義できる：$v \in S_\infty(F)$ に対する複素共役を $c_v \in G$ と表すとき，H' は G の部分群

$$\langle c_v c_{v'} \mid v, v' \in S_\infty(F)\rangle$$

に対応する H/F の中間体である．特に，この群の exponent は 2 なので，$[H:H']$ は 2 べきであることに注意する．

もわかる．ここで $S' := S_\infty(F) \cup S_{\mathrm{ram}}(H'/F)$ である．以上のことに注意すると，命題の主張は可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}} \arrow[r, "\mathrm{Ord}_{H,\mathfrak{p}}"] & \mathbb{Q}[G] \\
\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}} \arrow[r, "\mathrm{Ord}_{H',\mathfrak{p}}"'] \arrow[u, "\frac{1}{[H:H']}\times"] & \mathbb{Q}[G'] \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

から従う． □

次の命題は，イデアル類群の annihilation との関係である．H の T 射類群（T-ray class group）を

$$\mathrm{Cl}_H^T := \mathrm{coker}\left(H_T^\times \xrightarrow{\bigoplus \mathrm{ord}_w} \bigoplus_{w \notin S_\infty(H) \cup T_H} \mathbb{Z} \right)$$

と定義する．（$H_T^\times$ は (1) で定義したことを思い出す．）すなわち，Cl_H^T は $\prod_{w \in T_H} w$ を modulus とする H の射類群である．

命題 2.9.

(i) 予想 2.1（Brumer–Stark 予想）が H で完全分解する任意の $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ に対して成り立つならば，

$$\theta_H \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_H^T)$$

が成り立つ．

(ii) 2 を可逆にすると，(i) の逆も成り立つ．すなわち，

$$\theta_H \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_H^T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$$

が成り立つならば，

$$u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が H で完全分解する任意の $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ に対して成り立つ．

証明. (i) Chebotarev 密度定理より，Cl_H^T の任意の元は $\mathfrak{P}$ で代表される．ここで $\mathfrak{P}$ は H で完全分解する F の素点 $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ の上にある H の素点である．この $\mathfrak{p}$ に対する Brumer–Stark 予想を仮定すると，Brumer–Stark 単数の性質

$$\mathrm{Ord}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = \theta_H$$

より，$\theta_H \cdot \mathfrak{P}$ は単項イデアル $(u_{\mathfrak{p}})$ であることがわかる．$u_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}} \subset H_T^\times$ より，これは $\theta_H \cdot \mathfrak{P}$ が Cl_H^T の中で 0 であることを意味する．以上より $\theta_H \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_H^T)$ が成り立つ．

(ii) $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ を H で完全分解する F の素点とし，$\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{p}$ の上の H の素点とする．$\theta_H \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_H^T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ を仮定すると，

$$2^m \theta_H \cdot \mathfrak{P} = 0 \text{ in } \mathrm{Cl}_H^T$$

を満たす自然数 m が存在する．これより，

$$2^m \theta_H \cdot \mathfrak{P} = (\varepsilon)$$

となる $\varepsilon \in U_{\mathfrak{p}}$ が存在する．これを言いかえると

$$\mathrm{Ord}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon) = 2^m \theta_H$$

であり，Brumer–Stark 単数の定義より，

$$u_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2^m} \cdot e^{-}\varepsilon \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$$

となる．命題 2.8 の証明より $e^{-} \in \mathbb{Z}[1/2][G]$ なので，$u_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$ がわかる． □

注意 2.10. [DK20] では Brumer–Stark 予想は

$$\theta_H \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_H^T)$$

の形で定式化されているが，命題 2.9 より，2 部分だけは本記事で定式化した Brumer–Stark 予想（予想 2.1）の方が強い．

Dasgupta–Kakde は [DK20] において，H が CM 体の場合に

$$\theta_H \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_H^T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$$

を証明した．よって，命題 2.8, 2.9(ii) をあわせると，次がわかる．

定理 2.11 (Dasgupta–Kakde)**.** 任意の有限次アーベル拡大 H/F に対して[*8]

$$u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が成り立つ．

3 総実体の最大アーベル拡大の構成

F を総実体とし，F の最大アーベル拡大を F^{ab} と表す．F^{ab} は大雑把に

$$F^{\mathrm{ab}} = F(\{\text{ 簡単な元たち }\}, \{\text{Brumer–Stark 単数たち }\})$$

という形で構成される．

まず，「簡単な元たち」が何かについて述べよう．$n := [F : \mathbb{Q}]$ とおき，$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ を F の実素点全体（すなわち，埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{R}$ 全体）とする．符号写像

$$\mathfrak{S} : F^{\times} \to \{\pm 1\}^n;\ a \mapsto (\mathrm{sign}(\sigma_1(a)), \ldots, \mathrm{sign}(\sigma_n(a)))$$

を考える．これは全射であることがわかり，よって元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ を

$$\langle \mathfrak{S}(\alpha_1), \ldots, \mathfrak{S}(\alpha_{n-1}), (-1, \ldots, -1) \rangle = \{\pm 1\}^n$$

となるようにとることができる．「簡単な元たち」は $\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_{n-1}}$ のことである．

次に，Brumer–Stark 単数について前節の内容を復習する．F の素点の有限集合 T で，ある条件を満たすものを固定すると，任意の有限次アーベル拡大 H/F と H で完全分解する F の素イデアル $\mathfrak{p} \notin T$ に対して，Brumer–Stark 単数 $u_{H,\mathfrak{p}}$ が定義できる．Brumer–Stark 予想が正しければ，$u_{H,\mathfrak{p}}$ は $H^{\times}$ の元になる．Dasgupta–Kakde によって Brumer–Stark 予想の 2 部分以外が解かれたので，$u_{H,\mathfrak{p}}^m \in H^{\times}$ となる 2 べき m が存在する（定理 2.11 参照）．

さて，特に $\mathcal{O}_F$ の 0 でない各イデアル $\mathfrak{n}$ に対して，$\mathfrak{n}$ を modulus とする F の狭義射類体（narror ray class field）$F(\mathfrak{n})$ に対する Brumer–Stark 単数を考える．すなわち，$F(\mathfrak{n})$ で完全分解する F の素イデアル $\mathfrak{p}(\mathfrak{n}) \notin T$

[*8] H が総虚でないときは $u_{H,\mathfrak{p}} := 0$ とおいたので，主張は自明である．

に対して[*9]，元 $u_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})}$ を考える．このままだと $F(\mathfrak{n})$ の元になるかどうかわからないが，2 べき $m(\mathfrak{n})$ をうまく選べば

$$u_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})} \in F(\mathfrak{n})^\times$$

となるようにできる（Brumer–Stark 予想が正しければ $m(\mathfrak{n})=1$ ととれる）．

以上の準備の下で，F の最大アーベル拡大 F^{ab} は次のように構成される．

定理 3.1 (Dasgupta–Kakde, [DK21, Theorem 1.9])**.**

$$F^{\mathrm{ab}} = F(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_{n-1}},\{u_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})} \mid \mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F : 0 \text{ でないイデアル }\})$$

注意 3.2. Hilbert の第 12 問題を（ある意味で）「解決した」と主張するためには，アーベル拡大が「明示的に」構成できなければならない．よって，Brumer–Stark 単数 $u_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})}$ がどのくらい明示的にわかるのか，ということが重要な点である．実際，論文 [DK21] の大半は「Brumer–Stark 単数が明示的である」ということを証明するのに費やされている．これが具体的にどういう意味なのか説明しよう．

$u_{H,\mathfrak{p}}$ を（一般の有限次アーベル拡大 H/F と H で完全分解する素イデアル $\mathfrak{p}\notin T$ に対する）Brumer–Stark 単数とする．まず，Dasgupta は [Das08] において，

$$u_{H,\mathfrak{p}} = \text{“}\mathfrak{p}\text{ 進積分” in } F_{\mathfrak{p}}^\times \tag{4}$$

という公式を予想として定式化した．この右辺は $F_{\mathfrak{p}}^\times$ の元として定義できるものであり，左辺の $u_{H,\mathfrak{p}}$ は（Brumer–Stark 予想を仮定して）包含 $H\subset H_{\mathfrak{P}}=F_{\mathfrak{p}}$ により $F_{\mathfrak{p}}^\times$ の元とみなす．この予想が $F_{\mathfrak{p}}^\times/(F_{\mathfrak{p}}^\times)_{\mathrm{tors}}$ の中で正しいことを弱い仮定[*10]の下で示したことが [DK21] の実質的な主結果である．公式にある「$\mathfrak{p}$ 進積分」は具体的に計算可能であり，明示的なものであるので，その意味で Brumer–Stark 単数は「明示的」と言えるわけである．

少し不満点を述べると，上の予想 (4) は “modulo torsion”で正しいことが示されただけで，完全に解かれたわけではない．また，Brumer–Stark 予想も 2 部分は解かれておらず[*11]，そのために F^{ab} の記述に謎の 2 べき $m(\mathfrak{n})$ が現れて，きれいではない．このようにまだ微妙な点があるにも関わらず，Hilbert の第 12 問題を解決したかのように主張するのは，多少答えを急いだ感が否めない．また，上の公式を用いる Brumer–Stark 単数の計算は p 進解析的であり，Hilbert が期待していたような複素解析的なものではない．この点に関しては [DK21, p. 8] において「Hilbert がこの解答を受け入れるかどうかはわからない」という意味のコメントがある．

注意 3.3. 定理 3.1 の証明（以下で述べる）を見るとわかるが，F^{ab} を構成するのに，各 $\mathfrak{n}$ に対して狭義射類体 $F(\mathfrak{n})$ の構成をしているわけではない．この点も（Kronecker–Weber の定理や虚数乗法論に比べると）不満な点である．ただし，狭義 Hilbert 類体 $F(1)$ については，$F(1)$ が CM 体ならば

$$F(1) = F(u_{F(1),\mathfrak{p}(1)}^{m(1)})$$

であることがわかる．（証明は，下の補題 3.4 の証明を真似すればできる．）これを利用して，公式 (4) を用いた実 2 次体の狭義 Hilbert 類体の計算例がたくさんある（[DK21, §2.3] 参照）．

以下，定理 3.1 の証明を与える．記号は前節のものを用いる．

次の補題が鍵である．

[*9] 類体論より，この条件は $\mathfrak{n}$ を modulus とする F の狭義射類群（narrow ray class group）の中で $\mathfrak{p}(\mathfrak{n})=0$ であることと同値である．すなわち，$\mathfrak{p}(\mathfrak{n})$ は mod $\mathfrak{n}$ で 1 となる総正な元で生成される素イデアルをとればよい．

[*10] $\mathfrak{p}$ の下の素数 p が奇数で，p が F で不分岐ならば仮定は満たされる．p は奇素数なので，Brumer–Stark 予想（の 2 部分）を仮定する必要はない．

[*11] 2022 年 3 月現在.

補題 3.4 (Stark [Sta76], Tate [Tat84, Chap. IV, Remarque 2.3], [DK21, Lemma 2.3])**.** H/F を有限次巡回拡大とし，H は CM 体とする．$S := S_\infty(F) \cup S_{\mathrm{ram}}(H/F)$ とおく．$\mathfrak{p} \notin S \cup T$ を H で完全分解する F の素点とする．

$$u_\mathfrak{p} = u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} U_{H,\mathfrak{p}}$$

を Brumer–Stark 単数とし（注意 2.2 参照），$u_\mathfrak{p}^m \in U_{H,\mathfrak{p}} \subset H^\times$ となる 0 でない整数 m をとる．（定理 2.11 より，m は 2 べきにとれる．）このとき，

$$H = F(u_\mathfrak{p}^m)$$

が成り立つ．

証明. H/F は巡回拡大なので，$G := \mathrm{Gal}(H/F)$ の忠実な指標 χ が存在する．（すなわち，χ は単射準同型 $G \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ のことである．）H は CM 体で $S = S_\infty(F) \cup S_{\mathrm{ram}}(H/F)$ なので，(3) より $L_{S,T}(\chi, 0) \neq 0$ であることに注意する．

任意の $\tau \in \mathrm{Gal}(H/F(u_\mathfrak{p}^m))$ をとる．$\tau = 1$ を示せばよい．Brumer–Stark 単数の定義より，

$$\chi^{-1}(\mathrm{Ord}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p}^m)) = m \cdot L_{S,T}(\chi, 0)$$

であるが，左辺は次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned}
\chi^{-1}(\mathrm{Ord}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p}^m)) &= \chi^{-1}(\mathrm{Ord}_\mathfrak{p}(\tau^{-1} u_\mathfrak{p}^m)) \\
&= m \cdot \sum_{\sigma \in G} \mathrm{ord}_\mathfrak{P}(\sigma\tau^{-1} u_\mathfrak{p})\chi(\sigma) \\
&= m \cdot \sum_{\sigma \in G} \mathrm{ord}_\mathfrak{P}(\sigma u_\mathfrak{p})\chi(\sigma)\chi(\tau) \\
&= m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) \cdot \chi(\tau).
\end{aligned}$$

よって

$$m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) = m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) \cdot \chi(\tau)$$

となるが，$m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) \neq 0$ なので $\chi(\tau) = 1$ がわかる．χ は単射なので $\tau = 1$ である． □

補題 3.4 さえ言えれば，定理 3.1 の証明の残りは初等的な議論でなされる．次の 2 つの補題は単なるガロア理論なので，ここでは証明は省略する．

補題 3.5 ([DK21, Lemma 2.5])**.** H/F を有限次アーベル拡大で，H は CM 体とする．

$$\Upsilon := \{H' : H/F \text{ の中間体} \mid H'/F \text{ は巡回拡大で，} H' \text{ は CM 体 }\}$$

とおく．すると，

$$H = \prod_{H' \in \Upsilon} H' \text{（合成体）}$$

が成り立つ．

補題 3.6 ([DK21, Lemma 2.6])**.** K/F を有限次アーベル拡大とし，$\sqrt{-1}, \sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_{n-1}} \in K$ とする．（特に K は総虚体である．）$H \subset K$ を最大 CM 部分体とする．このとき，

$$K = H(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_{n-1}})$$

が成り立つ．

定理 3.1 の証明. $L := F(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}}, \{u^{m(\mathfrak{n})}_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})} \mid \mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_F : 0$ でないイデアル $\})$ とおき，$F^{\mathrm{ab}} = L$ を示す．$L \subset F^{\mathrm{ab}}$ は明らかなので，$F^{\mathrm{ab}} \subset L$ を示せばよい．すなわち，任意の有限次アーベル拡大 K/F に対して，$K \subset L$ を示せばよい．

必要であれば K を大きくして，$\sqrt{-1}, \sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}} \in K$ と仮定してよい．すると，$H \subset K$ を最大 CM 部分体とするとき，補題 3.6 より

$$K = H(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}})$$

となる．$\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}} \in L$ なので，$H \subset L$ を示せばよい．補題 3.5 より，H/F は巡回拡大と仮定してよい．

H/F の導手を $\mathfrak{n}$ とする．すると，$H \subset F(\mathfrak{n})$ で，$S_{\mathrm{ram}}(H/F) = S_{\mathrm{ram}}(F(\mathfrak{n})/F)$ が成り立つ．よって命題 2.7（ノルム関係式）より，

$$u^{m(\mathfrak{n})}_{H,\mathfrak{p}(\mathfrak{n})} = \mathrm{N}_{F(\mathfrak{n})/H}(u^{m(\mathfrak{n})}_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})}) \in H^{\times}$$

が成り立つ．これより，特に $u^{m(\mathfrak{n})}_{H,\mathfrak{p}(\mathfrak{n})}$ は $u^{m(\mathfrak{n})}_{F(\mathfrak{n}),\mathfrak{p}(\mathfrak{n})} \in L$ の共役の積で書けるので，L の元である（L/F はアーベル拡大，特に正規拡大であることに注意する）．また補題 3.4 より，$H = F(u^{m(\mathfrak{n})}_{H,\mathfrak{p}(\mathfrak{n})})$ である．以上より，$H \subset L$ であることがわかり，証明が完成する． □

参考文献

[BKS16] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On zeta elements for $\mathbb{G}_m$, Doc. Math. **21** (2016) 555-626.

[Das08] S. Dasgupta, Shintani zeta functions and Gross–Stark units for totally real fields, Duke Math. J. **143**(2) (2008) 225-279.

[DK20] S. Dasgupta, M. Kakde, On the Brumer–Stark Conjecture, preprint. arXiv:2010.00657v2

[DK21] S. Dasgupta, M. Kakde, Brumer–Stark Units and Hilbert's 12th Problem, preprint. arXiv:2103.02516v1

[Pop11] C. D. Popescu, Integral and p-adic Refinements of the Abelian Stark Conjecture, in: Arithmetic of L-functions, IAS/Park City Math. Ser. **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011) 45-101.

[Rub96] K. Rubin, A Stark Conjecture 'over $\mathbb{Z}$' for abelian L-functions with multiple zeros, Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 33-62.

[Sch98] N. Schappacher, On the history of Hilbert's twelfth problem: a comedy of errors, In Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle (Nice, 1996) (1998) 243-273.

[Sta76] H. M. Stark, L-functions at $s = 1$ III: Totally real fields and Hilbert's twelfth problem, Advances in Math. **22** (1) (1976) 64-84.

[Tat84] J. Tate, Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en $s = 0$ (notes par D. Bernardi et N. Schappacher), Progress in Math., **47**, Birkhäuser, Boston, 1984.