4 次元多様体上の写像の特異点および関連する話題について

佐久間一浩（近畿大学理工学部）

1 Introduction

4 次元閉多様体 M^4 上で，ジェネリックな写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^p$ $(1 \leq p \leq 4)$ を考えたとき，f の特異点をどこまで消去可能か，という写像の特異点論（[1]）の基本問題，主として「写像の特異点消去可能性問題」について，また現在までの研究から派生した未解決問題を論じることが本稿の目的である．ここで，'ジェネリック' とは，与えられた次元対 (n, p) に対して，写像空間 $C^\infty(M^n, \mathbb{R}^p)$ の中に開かつ稠密に存在する部分空間の元であることを意味する（[3, 第 II 部] または [1] 参照）．

$p = 1$ のとき，4 次元多様体論で，Kirby の問題集（Problems in Low-Dimensional Topology, AMS 1978）に次のようなよく知られた問題がある：

> "M^4 を単連結な 4 次元閉多様体とするとき，M^4 は 1，3-ハンドル無しのハンドル分解を持つか？，言い換えれば，M^4 上の Morse 関数 $f: M^4 \to \mathbb{R}$ で，指数 0，2，4 の臨界点のみをもつものが存在するか？"

これは，基本群が（ナイーブな意味で）ある種の臨界点を消去するための障害となっているか，を問うものである．つまり，単連結ならば指数 1，3 の臨界点を消去できるか否かを問うている．M^4 はコンパクトなので，最大値と最小値を持つから，指数 0 と 4 の臨界点は必ず持つ[1)]．それ以外の臨界点がもしあれば指数 1 と 3 の臨界点を互いにキャンセルして消去し，指数 2 のみの臨界点に関数を変形できるか，が問題なのである．R. Mandelbaum は，M^4 が（複素解析的曲面の構造をもち，）almost completely decomposable ならば，そのようなハンドル分解をもつことを証明しているが，その解説は目的を外れるので立ち入らない．しかし，その問題意識は本稿で扱う題材と共通するものである．本稿では，4 次元多様体を主な考察の舞台とするが，問題の流れや未解決問題への言及のために，しばしば 5 次元以上の多様体についても適宜論じることにする．任意の n 次元閉多様体は，その位相構造や微分構造に関わりなく，Morse 関数を許容するが，その証明には多様体論は必要なく，解析的議論で解決する．したがって，問題となるのが $p \geq 2$ の場合である．

$p = 2$ の場合,「写像の特異点消去可能性問題」は，この分野ではよく知られているように 1960 年代に Thom-Levine により，完全に決着している：

1)後にも触れるが，指数 0 と 4 の臨界点のみをもつものを特殊生成写像（関数）という．

定理 1.1. M^n を n 次元閉多様体とし，$n \geq 2$ とする．折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は，$\chi(M^n)$ が偶数となることである．

ここで，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geq p)$ とは，M^n を n 次元閉多様体としたとき，その上の写像 f に，特異点として局所的対応が

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

となる折り目特異点のみが現れる写像のことをいう．折り目写像は，しばしば submersion with folds とよばれる（[10]）こともある．$p = 1$ のときは，f は Morse 関数に他ならないので，任意の n 次元閉多様体 M^n は折り目写像（関数）$f : M^n \to \mathbb{R}$ を許容する．（したがって，$p = 1$ の場合の折り目写像の存在問題は自明に解決している．）

$p \geq 2$ のとき，折り目写像の存在に関して，歴史的に最初に与えられたものを紹介しよう．M^n に位相的に強い条件を課すと存在問題は明解な解がある：

定理 1.2. M^n を安定平行化可能な n 次元閉多様体とする．このとき，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geq p \geq 2)$ はいつでも存在する．
特に $n = p$ のとき，M^n が向き付け可能ならば，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ が存在するための必要十分条件は，M^n が安定平行化可能なことである．

これは，Y. Eliashberg によるもので（[8]），彼自身による折り目写像のホモトピー原理（[9] 参照）の帰結である．これは，1969 年の John Mather によって提起された折り目写像に関する問題：

> “球面のホモトピー群 $\pi_n(S^p)$ $(n \geq p)$ の任意のホモトピー類には，折り目写像が含まれるか？”

への肯定的解決として与えられたものである．定理 1.2 で M^n が安定平行化可能とは，M^n の接束 TM^n と自明な直線束 ε^1 の Whitney 和 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ が自明束になるときをいう．安定平行化可能という条件は，多様体の構造に強い制約を課すため，折り目写像の存在を精密に論じるには，安定平行化可能という条件をどこまで緩められるかが重要な問題となる．実際の Eliashberg の定理は，もう少し広く値域多様体をユークリッド空間に限らず，安定平行化多様体 N^p として，証明されている．もちろん，任意の球面は安定平行化可能なので，その結果から Mather の問題が肯定的に解決する．

さて一般に，ジェネリックな写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^2$ には，特異点としては折り目特異点とカスプ特異点のみが現れる（[1] 参照）ので，定理 1.1 は，平面写像のカスプ特異点消去問題の完全解であり，カスプ消去の障害がオイラー標数の偶奇であることを主張している．

次に $p=3$ の場合，すなわち $n\geq 3$ としてジェネリックな写像 $f:M^n\to\mathbb{R}^3$ を考える．このとき，f には次の三つの型の特異点が一般に現れる：

(1) $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,x_2,\pm x_3^2\pm\cdots\pm x_n^2)$

(2) $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,x_2,\pm x_3^3+x_1x_2\pm x_4^2\pm\cdots\pm x_n^2)$

(3) $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,x_2,\pm x_3^4+x_1^2x_2+x_1x_3\pm x_4^2\pm\cdots\pm x_n^2)$

(1) は折り目特異点（2 次元），(2) はカスプ特異点（1 次元），(3) は燕の尾特異点（離散点）とよばれる．カッコ内は部分多様体として次元を表す．特異点集合 $S(f)=\{x\in M^n;\ \mathrm{rank}\, df_x<3\}$ の位相形から，燕の尾特異点は偶数個であることがわかる．f の折り目特異点集合を $F(f)$，カスプ特異点集合を $C(f)$，燕の尾特異点集合を $\mathrm{SW}(f)$ とすると，特異点集合の stratification が位相的閉包を用いて

$$S(f)=\overline{F(f)}=F(f)\cup C(f)\cup\mathrm{SW}(f),\quad \overline{C(f)}=C(f)\cup\mathrm{SW}(f)$$

で与えられる．さらにこのとき，特異点の Thom 多項式（定義と計算例について [3] の第 II 部参照）が

$$[S(f)]_2^*=w_{n-2}(M^n)\in H^{n-2}(M^n;\mathbb{Z}_2),\quad [\overline{C(f)}]_2^*=w_{n-1}(M^n)\in H^{n-1}(M^n;\mathbb{Z}_2)$$

となることが R. Thom によって計算されている．ここで，$[X]_2$ は X の mod 2 ホモロジー類を表し，上付きの $*$ はポアンカレ双対を，$w_i\in H^i(M^n;\mathbb{Z}_2)$ は M^n の i 次 Sitefel-Whitney 類を表す（[2]）．

$n=3$ で，M^3 が向き付け可能なときは，定理 1.2 にもあるように，Eliashberg（[7]）によっていつでも折り目写像 $f:M^3\to\mathbb{R}^3$ が存在することが証明されている．それでは，M^3 が必ずしも向き付け可能とは限らない，一般の場合はどうかが問題となるが，次が知られている（[18]）：

定理 1.3. M^3 を 3 次元閉多様体とする．折り目写像 $f:M^3\to\mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，$w_2(M^3)=0$ となることである．

なお，3 次元という特殊性により，M^3 が向き付け可能ならば（$w_1=v_1=0$，ここで v_1 は Wu 類（[2] 参照）を表す），$w_2=v_1^2=0$ が成り立つことに注意する．したがって，定理 1.3 は，定理 1.2 の $(n,p)=(3,3)$ で定義域多様体が向き付け可能な場合の結果を含んでいる．

さらに例えば，$M^3=S^1\times\mathbb{R}P^2$ とするとき，定理 1.1 より，$g:\mathbb{R}P^2\to\mathbb{R}^2$ には必ず消去不可能なカスプ特異点が現れる．そこで，合成写像

$$S^1\times\mathbb{R}P^2\xrightarrow{\mathrm{id}\times g}S^1\times\mathbb{R}^2\hookrightarrow\mathbb{R}^3$$

を f とすると，$f:S^1\times\mathbb{R}P^2\to\mathbb{R}^3$ にはカスプ特異点の 1 次元 locus が現れて，$[\overline{C(f)}]_2^*=w_2(S^1\times\mathbb{R}P^2)\neq 0$ なので，このカスプ特異点は消去できない．ただし，

二番目の写像は自然な埋め込みである．このように定理 1.3 は，カスプの Thom 多項式が折り目写像が存在するための唯一の障害であることを示している．なお，この定理は次のように一般化される（[18]）：

定理 1.4. M^n を n 次元閉多様体とする．ただし，$n \geq 3$ を奇数とする．折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，$w_{n-1}(M^n) = 0$ となることである．

$n \geq 3$ を奇数とすると，上と同様にカスプの Thom 多項式が折り目写像が存在するための唯一の障害であることを示している．では，

「n が偶数の場合はどうなるであろうか？」

実は，この場合は奇数のときに比べてずっと難しい．その最も n が小さい場合，すなわち $n = 4$ の場合をこれから述べる．折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要条件は，もちろんカスプの Thom 多項式 $w_3 \in H^3(M^4; \mathbb{Z}_2)$ が消えることが含まれるが，$n = 4$ の場合にこれは十分条件にはなり得ない．次節でその理由（折り目写像の特異点集合への制限写像がはめ込みになるがその法束が非自明であることによる）に触れるが，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ の存在問題は，$n - p$ が偶数の場合はベクトル場問題と同じである（からホモトピー論として解き易い）が，$n - p$ が奇数の場合はベクトル場問題からは折り目写像の存在は従うが，その逆は必ずしも成立しない，という難しさがある．つまり，折り目写像の存在問題は，次元対 (n, p) の選び方によって様相が異なるのである．詳しくは，次節で論じる多様体の（安定）スパンの議論を参照されたい．

さてここで，$(n, p) = (4, 3)$ で，M^4 が向き付け可能な場合の佐伯修氏による解（[15] 参照）を述べよう：

定理 1.5. M^4 を向き付けられた 4 次元閉多様体とする．折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は，

$$\exists x \in H^2(M^4; \mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad x^2 = p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Z}) \tag{$*$}$$

を満たすことである．

ここで，$p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Z})$ は M^4 の 1 次 Pontrjagin 類（[2] 参照）を表す．ジェネリック写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するならば，カスプの Thom 多項式は $w_3 \in H^3(M^4; \mathbb{Z}_2)$ だが，任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して，$w_3 = 0$ であることが知られている[2]．したがって，カスプの Thom 多項式は消えているが，定理 1.5 は，カスプの Thom 多項式以外の障害が（4 次のコホモロジー類として）存在す

[2] この事実は，写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ のカスプ特異点の Thom 多項式が消えていることと直接に結び付くことに注意するのは，4 次元多様体論的に価値がある．本節の後半で，$w_3(\mathbb{R}P^4) = 0$ の計算に触れるので比較せよ．

ることを告げている．実際，$b_2(M^4) = 1, 2$ であるような向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 に対して，折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在しない，e.g. $M^4 = \mathbb{C}P^2$ または $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$，ことがわかる．ただし，ここで注意して欲しいのが折り目写像 $f : \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{R}^3$ は存在する（下の例 1.1 を参照）ので，定理 1.5 で向きの入れ方は，本質的である．なお，向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 から $\mathbb{R}^3$ への具体的な写像の構成，および写像の特異ファイバーの分類，Vassiliev 複体の計算などが論じられている [16] は，定理 1.5 の必要十分条件を理解するうえでとても役立つので，本稿と比較参照する上で一読の価値がある講義録である．

例 1.1. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とするとき，$g : S^2 \to S^2,\ (x, y, z) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$ と定める．これは S^2 の間の微分同相写像である．このとき，微分同相写像 $h : S^2 \times \partial D^2 \to S^2 \times \partial D^2$ を $x \in S^2$ に対して，

$$h(x, \cos\theta, \sin\theta) = (g(x), \cos\theta, \sin\theta)$$

と定める．そこで，$M^4 = S^2 \times D^2 \cup_\partial S^2 \times D^2$ とおく，すなわち $S^2 \times D^2$ の境界を写像 h で張り付けてできる 4 次元閉多様体を M^4 とする．さらに，臨界点をただ二つもつ関数 $\varphi : S^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y, z) = z$ を用いて，$\Phi := (\varphi \times \mathrm{id}) \circ h$ と定めると，$\Phi : S^2 \times \partial D^2 \to \mathbb{R} \times \partial D^2$ である．こうして，写像 $\Phi \cup \Phi : M^4 = S^2 \times D^2 \cup_\partial S^2 \times D^2 \to (\mathbb{R} \times D^2) \cup (\mathbb{R} \times D^2)$ が得られるが $(\mathbb{R} \times D^2) \cup (\mathbb{R} \times D^2)$ は境界に沿って恒等写像で貼り合わせてできるものなので，$\mathbb{R} \times S^2$ に他ならない．したがって，自然な埋め込み $\mathbb{R} \times S^2 \to \mathbb{R}^3$ を合成して，折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が得られる[3]．ここで，M^4 は S^2 上の非自明 S^2 束である $S^2 \tilde{\times} S^2$ であるが，これは $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ に微分同相であることが知られている．なお，特異点集合は $S(f) = S^2 \cup S^2$ である． □

このことから，大事な系が得られる：

系 1.6. M^4 を任意の向き付け可能な 4 次元閉多様体とする．このとき，$N^4 = M^4 \sharp S^2 \times S^2$ または $M^4 \sharp \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ に対して，折り目写像 $f : N^4 \to \mathbb{R}^3$ はいつでも存在する．

これは，上のような N^4 に対しては，定理 1.5 の $(*)$ を満たす 2 次コホモロジー類が見つかるからである．なお，佐伯氏の論文 [15] には，$\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する M^4 の交叉形式による特徴づけが証明されている．

こうして見てくると，自然に次の問いが浮かぶであろう：

M^4 が向き付け不可能な場合はどうか？

具体的な折り目写像の構成が [14, Example 3.11] において，与えられた．M^4 を $\mathbb{R}P^2$ 上の非自明な $\mathbb{R}P^2$ 束の全空間とするとき，折り目写像 $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ がつくられ，その特異点集合は，$S(f) = S^2 \cup \mathbb{R}P^2$ である．ここで，ファイバー束はオ

[3] もう少し厳密には，特殊生成写像（[3]）と呼ばれる．

イラー標数に関して，乗法性をもつので，$\chi(M^4) = \chi(\mathbb{R}P^2) \cdot \chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ であることに注意する．そこで構成されている折り目写像は，必然的に non-tame（定義は次節参照）となることにも注意する．

ところで，4 次元の無向コボルディム群について，$\mathfrak{N}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ が知られているが，それぞれの生成元は，コボルディム類 $[\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2]$, $[\mathbb{R}P^4]$ である（[2]）．すぐ上で述べた M^4 は $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ にコボルダントである．では，$\mathbb{R}P^4$ はどうだろうか？もう少し正確に問題を述べると，「$\mathbb{R}P^4$ は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するだろうか？」となる．

さて，[12, Theorem 1.3] において，次のことが証明された（ただし，ここで必要な形に限定して引用）：

定理 1.7. M^n を n 次元閉多様体とし，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ が存在するとする．このとき，ある $x \in H^2(M^n; \mathcal{Z})$ が存在して，$x^2 = p_1 \in H^4(M^n; \mathcal{Z})$ が成り立つ．

ここで，$\mathcal{Z}$ は局所係数を表し，M^n が向き付け可能ならば，$\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$ である．コホモロジー類の等式が折り目写像存在のための必要条件だという主張である．

そこで，$\mathbb{R}P^4$ のときに，この必要条件が成り立つか否かを確かめよう．まずは，$\mathbb{R}P^4$ は向き付け不可能なので，$H^4(\mathbb{R}P^4; \mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ であるから，$p_1 = w_4$ を得る．なぜなら，$\mathbb{R}P^4$ の全 Stiefel-Whitney 類は，

$$w(\mathbb{R}P^4) = (1 + \alpha)^5 = 1 + \alpha + \alpha^4 \tag{$**$}$$

なので（[2]），$p_1 = \alpha^4 = \alpha^2 \smile \alpha^2$ を得る（ただし，$\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ は生成元である）．したがって，$x = \alpha^2$ ととれば，必要条件は満たされることが分かった．

いまのところ，折り目写像 $f : \mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための障害は見当たらない．筆者は次のように予想しているが，これを考え始めて三十年以上経つが未だ証明できていない手強い問題である：

【予想】“$\mathbb{R}P^4$ は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するだろう！”

なお，[13] で（ベクトル場問題の解の系として）証明されているように，$\mathbb{R}P^4 \sharp \mathbb{R}P^4$ は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する．（もっと一般に，$\mathbb{R}P^4$ の偶数個の連結和は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する）．現在までのところ，$\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容しない向き付け不可能な 4 次元閉多様体は知られていない．なお，何気ないことではあるが，($**$) より，$w_3 = 0$ だからカスプの Thom 多項式は消えていることにも注意．したがって，次の予想はもっともらしい：

【予想】“任意の向き付け不可能な 4 次元閉多様体 M^4 は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容するだろう！”

ここで述べた二つの予想は，（筆者の知る限り）本稿の執筆段階ではおそらく未解決である．

定理 1.7 における折り目写像存在のための必要条件が十分条件でもあるか否かが問題である．最近の B. Kalmar による論文 [11] は，折り目写像 $M^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ $(4 \leq n \leq 7)$ の存在のための十分条件の考察のため，$(n-1)$-framing の計算が遂行されていて大変興味深い．その概略に触れよう．まずは，M^n の余次元 2 の連結ではない部分多様体の族 F で，その mod 2 ホモロジー類のポアンカレ双対が $[F]_2^* = w_2 \in H^2(M^n; \mathbb{Z}_2)$ となるようなものをとる．このとき，F の M^n における管状近傍を $N(F)$ とすると，折り目写像 $N(F) \to \mathbb{R}^{n-1}$ が容易に構成できる．あとは submersion $M^n - N(F) \to \mathbb{R}^{n-1}$ と上で構成された折り目写像を張り付ける際に，接束 $T(M^n - N(F))$ が $(n-1)$-framing を許容するための障害類の計算により，折り目写像 $M^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ が M^n 全体に拡張されるか否かが分かるのである．この最後の拡張可能性は，まさに「ベクトル場の問題」であり，次節でこれについて折り目写像のホモトピー原理の観点からの概説を与えることにする．

2　ベクトル場問題と折り目写像

Y. Eliashberg は，1972 年に折り目写像の 1-jet レベル（すなわち，接束 TM^n から接束 TN^p への準同型束；$J^1(M^n, N^p) = \mathrm{Hom}(TM^n, TN^p)$）におけるホモトピー原理を証明した（[8]）．定理の正確な記述には，場所をとるため詳しくは，[4] の第 8 章を参照いただきたい．ここで折り目写像のホモトピー原理を大雑把に述べると，折り目写像全体の空間からそれぞれの接束へのファイバーを保つ準同型写像の空間への対応 $f \mapsto df$ で定まる写像 d の π_0 間の誘導重同型 d_* が全射であるという形で定式化される．これは，Smale-Hirsch のはめ込み写像のホモトピー原理がはめ込み写像の空間から，それぞれの接束へのファイバーの単射準同型写像の空間への対応 $f \mapsto df$ で定まる写像 d の誘導準同型 d_* が弱ホモトピー同値になる（[5]）という強い結果とは対照的である．それは，はめ込み写像という本来特異点を持たない写像と，折り目写像という本質的に特異点を有する写像の複雑さの違いに起因するのが理由である．折り目写像のホモトピー原理の使い方は，それぞれの接束へのファイバーを保つ準同型写像の空間が空でないことを示せばいいので，簡単には M^n, N^p を安定平行化可能とすれば適当なベクトル場が存在するために，折り目写像の存在が直ちにしたがうというのが定理 1.2 の意味するところである．

一方，安藤良文氏は折り目写像の 2-jet レベル（[3] 参照），

$$J^2(M^n, N^p) = \mathrm{Hom}(TM^n, TN^p) \oplus \mathrm{Hom}(TM^n \circ TM^n, TN^p),$$

におけるホモトピー原理を証明した（[6]）．ここで，$TM^n \circ TM^n$ は接束の対称積を表す．安藤のホモトピー原理を述べるためにいくつか準備をする．

折り目写像 $f : M^n \to N^p$ の折り目特異点集合 $F(f)$ への制限写像（余次元 1 はめこみ）$f|_{F(f)} : F(f) \to N^p$ の微分の直線法束が自明のとき，f を'tame' という．これ

は，$\mathrm{Coker}(df|_{F(f)})$ が自明と言っても同じことである．ただし n が偶数，p が奇数のとき，オイラー標数 $\chi(M^n)$ が奇数であるような多様体が折り目写像 $f : M^n \to N^p$ を許容するならば，f は必ず non-tame であることが簡単に証明できる．

[14, Proposition 3.1] において，佐伯氏は次のことを証明した：

命題 2.1. もしも tame な折り目写像 $f : M^n \to N^p$ が存在するならば，fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to TN^p$ が存在する．

ここで，ε^1 は M^n 上の自明な直線束を表す．安藤氏は，2-jet 束まで精密化して，この命題の逆を考察した：

定理 2.2. $n \geq p \geq 2$ とする．もしも fiberwise epimorphism $TM^n \oplus \varepsilon^1 \to TN^p$ が存在するならば，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在する．特に，$n-p$ が偶数ならば，その逆も成り立つ．

定理の後半部分についてだが，$w_1(\mathrm{Coker}(df|_{F(f)})) = (n-p)\alpha$ が計算できる．したがって，$n-p$ が偶数ならば $\mathrm{Coker}(df|_{F(f)})$ が自明になるので，命題 2.1 から逆も成り立つのである．我々は，折り目写像 $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ の存在を論じるのが目的であるが，その際に定理 2.2 は重要な役割を果たす．定理 2.2 を応用するために，「多様体の安定スパン」の概念に触れる必要がある．

M^n を n 次元閉多様体とするとき，$\mathrm{span}(M^n)$ を M^n 上の一次独立なベクトル場の最大個数を表し，M^n のスパンという．同じく，$\mathrm{span}^0(M^n)$ により，ベクトル束 $TM^n \oplus \varepsilon^1$ の一次独立な切断の最大個数から 1 引いた数と定義し，M^n の安定スパンという．M^n が安定平行化可能であることと，$\mathrm{span}^0(M^n) = n$ は同値である．定義から，直ちに $\dim M^n = n \geq \mathrm{span}^0(M^n) \geq \mathrm{span}(M^n)$ を得る．また，古典的に知られているスパンおよび安定スパンに関わる微分トポロジーの結果を述べておく：

(1) $\mathrm{span}(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) = 0$ (Poincaré-Hopf)

(2) $\mathrm{span}^0(M^n) \geq 1 \iff \chi(M^n) \in 2\mathbb{Z}$

(3) $\mathrm{span}(S^n) = \mathrm{span}(\mathbb{R}P^n) = 2^c + 8d - 1 \quad (n+1 = (2a+1)2^{c+4d},\ 0 \leq c \leq 3)$.

(4) $\mathrm{span}^0(S^n) = n, \quad \mathrm{span}(\mathbb{R}P^n) = \mathrm{span}^0(\mathbb{R}P^n)$

(3) は，1961 年の有名な J. F. Adams の解であるが，拙著 [4] にこれに関連する話題（多元体の存在次元，外積の存在次元，球面の平行化可能性問題，Hopf 不変量 1 の元の（非）の存在，オイラー標数が奇数の多様体から $\mathbb{R}^p$ への折り目写像が存在する次元 p の制約，等）とその証明の概説があるので，参照されたい．また，次が成り立つことに注意する：

$$\exists \text{ fiberwise epimorphism } TM^n \oplus \varepsilon^1 \to \varepsilon^p \iff \mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1.$$

したがって，定理 2.2 は安定スパンの言葉で言い換えられるので，折り目写像の問題はベクトル場の問題としてかなりの部分解くことができる．例えば，$\chi(\mathbb{C}P^2)=3$ なので，$\mathrm{span}^0(\mathbb{C}P^2)=0$ を得るから，$\mathbb{C}P^2$ は $p=2,3,4$ に対して，$\mathbb{R}^p$ への折り目写像を許容しない（ここで，$p=3$ のときは定理 1.5 によりしたがう．また $p=4$ のときは p_1 が臍点の障害（[17] 参照）になることにもよる.）.

例えば，$f:M^n\to\mathbb{R}^2$ をジェネリック写像とすると，その特異点集合 $S(f)$ は一次元部分多様体なので，$\mathrm{Coker}(df|_{S(f)})$ は自明束である．したがって，折り目写像 $f:M^n\to\mathbb{R}^2$ の存在のための必要十分条件は，$\mathrm{span}^0(M^n)\geq 1$ が成り立つことである．これは上の (2) にあるように，$\chi(M^n)\in 2\mathbb{Z}$ であり，冒頭で述べた定理 1.1 と合致する[4)].

さてそこで，$\mathrm{span}^0(M^n)\geq p-1$ の解き方を簡単に述べるが，これはホモトピー論の範疇の問題として解くことができる．まずは，BO を分類空間（[1]）とするとき，連続写像 $\tau:M^n\to BO(n+1)$ をベクトル束 $TM^n\oplus\varepsilon^1$ の分類写像とするならば，連続写像 $M^n\to BO(n-p+1)$ への持ち上げを見出せばよい．ここで，射影 $\pi:BO(n-p+1)\to BO(n+1)$ のファイバーは Stiefel 多様体 $V_p(\mathbb{R}^{n+1})$（$\mathbb{R}^{n+1}$ における正規直交 p 枠全体の空間）であることに注意する．ファイバーのホモトピー群 $\pi_i(V_p(\mathbb{R}^{n+1}))$ は，よく知られているのであとは Postnikov tower による議論に障害理論を適用して，持ち上げが存在するための障害類が計算されるというのが strategy となる（[18] 参照）．一般に，p の値が大きくなると $\mathrm{span}^0(M^n)\geq p-1$ をホモトピー論的に計算するのは，primary obstruction に加えて，secondary obstruction なども存在するので難しくなる．なお，ベクトル場の問題 $\mathrm{span}^0(M^n)\geq 2$ は $n\geq 3$ の奇数の場合は primary obstruction のみ[5)]で決まるので比較的易しくて，これを求めることにより，定理 1.3 および定理 1.4 が得られる．$n=4$ かつ M^4 が向き付け可能な場合は，$\mathrm{span}^0(M^n)\geq 2$ である必要十分条件は，ある特性的ホモロジー類 $x\in H_2(M^4;\mathbb{Z})$ が存在して，$x\cdot x=\langle p_1,[M^4]\rangle$ を満たさなければならないので，定理 1.5 が得られるのである.

ちなみに，$\mathrm{span}^0(M^4)\geq 3$ となるための必要十分条件が計算することができて (詳細は [13] 参照),

定理 2.3. M^4 を 4 次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f:M^4\to\mathbb{R}^4$ が存在するための必要十分条件は，$w_2=0$ かつ $p_1+(\beta w_1)^2=0$ を満たすことである．ここで，β は完全系列 $0\to\mathcal{Z}\xrightarrow{2}\mathcal{Z}\to\mathbb{Z}_2\to 0$ に対応する Bockstein 作用素である.

定理 2.3 において，w_2 が primary obstruction（カスプの Thom 多項式）であり，$p_1+(\beta w_1)^2$ が secondary obstruction である．前節で述べたように，例えば $\mathbb{R}P^4$ の偶数個の連結和 $\sharp^{2k}\mathbb{R}P^4$ に関して，どちらの障害類も消えるので，折り目写像

4) この事実は，本来 H. Levine により，intrinsic derivative による込み入った計算により示されるが，安藤のホモトピー原理によりベクトル場の問題の帰結として直ちにわかる.

5) 実は，これがカスプの Thom 多項式と一致する.

$f:\sharp^{2k}\mathbb{R}P^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在することが従う．なお，ベクトル場問題を解くのが少し難しくなるが，折り目写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ $(n=5,6,7)$ の必要十分条件の決定が [13] において成されている．

安定スパンの性質 (3) と (4) から，実射影空間上の折り目写像について，次のことが直ちにしたがう：

定理 2.4. もしも n が奇数ならば，（tame な）折り目写像 $f:\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^{2^c+8d}$ が存在するが，$\mathbb{R}^{2^c+8d+1}$ への折り目写像は存在しない．
もしも n が偶数ならば，$\mathbb{R}P^n$ はいかなる $p \geq 2$ に対しても $\mathbb{R}^p$ への折り目写像を許容しない．

ベクトル場問題 $\mathrm{span}^0(M^n) \geq p-1$ が仮に解けても，$n-p$ が奇数のときは，tame な折り目写像の（非）存在が分かるのみで，実際存在しないときに non-tame な折り目写像の（非）存在については分からないことが多い．個別の閉多様体に関して，具体的に折り目写像を構成しようとしても，non-tame なものを構成するのは，一般に難しい．典型的なのが本節で述べた二つの予想である．例えば，次のような問題も案外難しいかもしれない：

折り目写像 $f:\mathbb{R}P^2\times\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ を具体的に構成せよ．$\chi(\mathbb{R}P^2\times\mathbb{R}P^2)=1$ なので，存在するとしても f は必ず non-tame であることに注意する．

3　未解決問題について

§1では二つの予想を述べたが，本節では最後に，ベクトル場問題 $\mathrm{span}^0(M^n) \geq 3$ と関連して，未解決な問題を5次元の場合に焦点をあてて，触れることにする．（さらに，問題を6次元以上にも拡張できるが，そもそも高次元で折り目写像が存在するという条件は強くなるので，ここではこれ以上触れないことにする．）

折り目写像 $\mathbb{R}P^5 \to \mathbb{R}^4$ は存在するか？　定理 2.4 より，tame な折り目写像は存在しないので，non-tame な折り目写像の（非）存在を問うているのである．ここで，$\mathbb{R}P^5$ は $\mathbb{C}P^2$ 上の S^1 束の構造をもつ（[1] 参照）ことに注意する．この問題が解決すると，$\mathbb{R}P^5$ の fold dimension set $\mathcal{F}(\mathbb{R}P^5)$ が完全に決定（[19] 参照）する．さらに，五次元有向コボルディズム群 $\Omega_5 \cong \mathbb{Z}_2$ の生成元 $[SU(3)/SO(3)]$ を一つ選ぶと，$SU(3)/SO(3)$ は単連結かつ non-spin 5-manifold であるが，このとき (non-tame な) 折り目写像 $SU(3)/SO(3) \to \mathbb{R}^4$ は存在するか？

もっと一般に M^5 を向き付けられた5次元閉多様体とするとき，折り目写像 $f: M^5 \to \mathbb{R}^4$ が存在するための必要条件は，定理 1.7 よりある $x \in H^2(M^5;\mathbb{Z})$ が存在して，$x^2 = p_1 \in H^4(M^5;\mathbb{Z})$ を満たす．そこで，この条件は十分条件でもあるか，あるいはさらなる付加された十分条件があるか？　例えば，$M^5=\mathbb{R}P^5$ については，$w(\mathbb{R}P^5)=1+\hat{\alpha}^2+\hat{\alpha}^4$ である（ここで，$\hat{\alpha}\in H^1(\mathbb{R}P^5;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$ は生成元）か

ら，$\hat{\alpha}$ の integral lift を $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^5;\mathbb{Z})$ とすると $p_1(\mathbb{R}P^5) = \alpha^4 \in H^4(\mathbb{R}P^5;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^5) \cong \mathbb{Z}_2$ なので，$x = \alpha^2 \in H^2(\mathbb{R}P^5;\mathbb{Z})$ とすればよい．筆者は，$\mathbb{R}P^5$ のファイバー束構造ゆえに，折り目写像 $\mathbb{R}P^5 \to \mathbb{R}^4$ は存在しない（すなわち必要条件は十分でない）と予想している．

【謝辞】本稿の内容は，2021 年 11 月 14 日の大阪市立大学での「4 次元トポロジー」の研究集会における講演と 2021 年 11 月 30 日の京大数理研での特異点の研究集会における講演，二つをミックスした内容となっている．講演の機会を与えてくださった各研究集会の世話人の方々に感謝する次第である．

参考文献

[1] 『特異点のこころえ』佐久間一浩著（日本評論社），2019 年 5 月．

[2] 『特性類講義』J. W. ミルナー & J. D. スタシェフ共著（佐伯修/佐久間一浩共訳），シュプリンガー・フェアラーク東京，2001 年 11 月．

[3] 『幾何学と特異点』泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩著（共立出版），2001 年 5 月．

[4] 『数 “8” の神秘』佐久間一浩著（日本評論社），2013 年 8 月．

[5] 『埋め込みとはめ込み』足立正久著 (岩波書店)，1984 年 12 月．

[6] Y. Ando, *Existence theorems of fold-maps*, Japan. J. Math. (N.S.) **30** (2004), 29–73.

[7] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **4** (1970), 1119–1134.

[8] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[9] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Grad Studies in Math. vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002..

[10] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

[11] B. Kalmar, *Fold maps on low dimensional manifolds*, preprint (2021).

[12] T. Ohmoto, O. Saeki and K. Sakuma, *Self-intersection classes for singularities and its applications to fold maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3825–3838.

[13] R. Sadykov, O. Saeki and K. Sakuma, *Obstruction to the existense of fold maps*, J. London Math. Soc. **81** (2010), 338–354.

[14] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–565.

[15] O. Saeki, *Fold maps on* 4*-manifolds*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 627–647.

[16] O. Saeki, *Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 1854, 2004.

[17] O. Saeki and K. Sakuma, *Stable maps between* 4*-manifolds and elimination of their singularities*, J. London Math. Soc. **59**(1999), 1117–1133.

[18] K. Sakuma, *Existence problem for fold maps*, Real and Complex Singularities, pp. 342–387, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007.

[19] K. Sakuma, *Fold dimension set of manifolds*, JP Journal of Geometry and Topology **18** (2015), 37–64.