Tableau Calculus of Hybrid Product Logic

東京工業大学・情報理工学院　西村 祐輝
Yuki Nishimura
School of Computing, Tokyo Institute of Technology

概要

Hybrid Logic は，通常の様相論理に特殊なオペレータを加えることで，表現力を拡張した論理である．これを多次元に拡張したものは Hybrid Product Logic とよばれ，さまざまな概念を形式化する道具としての応用が期待されている．しかしながら，Hybrid Product Logic の決定可能性は未だにわかっていない．

決定可能性を示す方法として，有限長で停止することが保証された健全かつ完全な tableau 体系を構築するものがある．本研究では，Hybrid Product Logic に対する証明体系である tableau 体系を構築し，Hybrid Product Logic の model である product model との健全性・完全性を示した．この体系によって生成される tableau が有限長で停止するかどうかはわかっていない．

1 Introduction

Modal Logic(ML) は，さまざまな関係について記述できる論理である．ふたつのオペレータ $\Box, \Diamond$ を用いることで，必然性，時相，証明可能性など，さまざまな概念について議論できる論理である．

Example 1.1 (Modal logic における論理式の例)**.** 「高橋さんは未来のある時刻で本を出版する」という文は，様相記号を時間に関するオペレータと考え，さらに p を「高橋さんは本を出版する」と表す原子命題とみると，$\Diamond p$ のように記述できる．

Hybrid Logic は，Modal Logic に次の 2 つの記号を新たに加えて，表現力を拡張したものである．

- 「ある一地点」を表す原子命題 a (これを nominal と呼ぶ)
- 論理記号 @ （ $@_a p \Leftrightarrow$ 地点 a で p が成り立つ）

Example 1.2 (Hybrid logic における論理式の例)**.** 「高橋さんは 9 月 1 日に本を出版し、かつ 9 月 1 日が未来であるならば、高橋さんは未来に本を出版する」という文を考える．様相記号を時間に関するオペレータと考え，a を「9 月 1 日である」という nominal，p を「高橋さんは本を出版する」という原子命題とみると，この文は

$$@_a p \wedge \Diamond a \to \Diamond p$$

のように記述できる．

[1] によれば，Hybrid Logic は ML と述語論理との Hybrid であると考えることができる．$\Diamond, \Box$ は Modal Logic の言語である一方で，nominal はある可能世界を指し示す「個体定項」と考えられ，これは述語論理のアイデアを借りたものであるといえるからである．また，$\Diamond, \Box$ を「今いる可能世界」からの局所的記述，nominal を Model を俯瞰した立場からの大域的記述だと考えると，Hybrid Logic は局所的記述と大域的記述

の Hybrid であるともいえる．

Hybrid Logic を多次元に拡張したものは Hybrid Product Logic と呼ばれる．2 次元のものは [3] で公理化され，Kripke model との健全性・完全性が証明されている．しかし，決定可能性はまだ明らかになっていない．[3] では，有限長で停止することが保証された健全かつ完全な tableau の体系を構築することで，決定可能性を示すことが提案されている．この試みは通常の（すなわち 1 次元の）HL については成功している（[2]）．

本研究では，この方法を参考にして，2 次元の Hybrid product logic の model に対し健全かつ完全な tableau 体系を構築し，それが有限の長さしか持たないことを示すことで，決定可能性を示すことを目指した．結果として，有限長での停止性は示せなかったものの，2 次元 Hybrid Product Logic に対して健全かつ完全な tableau 体系を構築できた．

Tableau に対する一般的事項については，[5], [4] を参考にした．

2 Hybrid Product Logic の Kripke 意味論

Definition 2.1. 可算無限個の元をもち，互いに共通の元をもたない 3 つの集合

$$\mathbf{Prop} = \{p, q, r, \dots\}$$
$$\mathbf{Nom}_1 = \{i, j, k, \dots\}$$
$$\mathbf{Nom}_2 = \{a, b, c, \dots\}$$

があり， **Prop** の元を**命題変数 (propositional variable)**，$\mathbf{Nom}_1$ および $\mathbf{Nom}_2$ の元を **nominal** と呼ぶ．Nominal 全体の集合を **Nom** と書く．すなわち， $\mathbf{Nom} = \mathbf{Nom}_1 \cup \mathbf{Nom}_2$.

さらに，論理記号として $\neg, \wedge, \Diamond_1, \Diamond_2, @$ を用いる．

Hybrid product logic (HPL) の言語を $\mathcal{L}_{\mathbf{HPL}}$ と書き，その元を HPL の**論理式 (formula)** という．HPL の論理式 $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{HPL}}$ は，次のように再帰的に定義される:

$$\varphi ::= p \mid i \mid a \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \Diamond_1\varphi \mid \Diamond_2\varphi \mid @_i\varphi \mid @_a\varphi$$

ただし， $p \in \mathbf{Prop}, i \in \mathbf{Nom}_1, a \in \mathbf{Nom}_2$.

記号 $\vee, \rightarrow, \Box_1, \Box_2$ の意味は次の通り定める:

$$\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \varphi \rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi),\ \Box_k\varphi := \neg\Diamond_k\neg\varphi\ (k = 1, 2).$$

次に，HPL の意味論を定義する．そのために，まずは通常の（1 次元の）Hybrid logic に使われる Kripke frame を定義する．

Definition 2.2. Hybrid logic の **Kripke frame** $\mathfrak{F} = (W, R)$ を次の通り定める:

- W は空でない可算集合.
- R は W 上の二項関係．すなわち， $R \subseteq W \times W$.

W の元を**可能世界 (possible world)**，R を**到達関係 (accessibility relation)** と呼ぶ.

以下では， $(x, y) \in R$ を xRy と書く．後述する R_1, R_2, R_h, R_v も同様.

これをもとに，HPL の Kripke frame および Kripke model を定義する．

Definition 2.3. 通常の Kripke frame $\mathfrak{F}_1 = (W_1, R_1), \mathfrak{F}_2 = (W_2, R_2)$ に対して，**product Kripke frame (product frame)** $\mathfrak{F} = (W, R_h, R_v)$ を次の通り定める:

- $W = W_1 \times W_2$.
- $(x, y)R_h(x', y')$ iff xR_1x' and $y = y'$.
- $(x, y)R_v(x', y')$ iff $x = x'$ and yR_2y'.

さらに，**product Kripke model (product model)** $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ を次の通り定める．

- $\mathfrak{F}$ は上で定めた product frame.
- $V : \mathbf{Prop} \cup \mathbf{Nom} \to \mathcal{P}(W)$. ただし，
  - $i \in \mathbf{Nom}_1$ ならば， $V(i) = \{x\} \times W_2$ $(x \in W_1)$.
  - $a \in \mathbf{Nom}_2$ ならば， $V(a) = W_1 \times \{y\}$ $(y \in W_2)$.

V を**付値関数 (valuation function)** と呼ぶ.

R_h, R_v の h, v はそれぞれ horizontal, vertical の頭文字をとったものである．2 つの frame をそれぞれ水平方向，垂直方向に並べることを意図している．

$V(i) = \{x\} \times W_2$ $(x \in W_1)$ が成り立つとき， x を i^V と書く．同様に， $V(a) = W_1 \times \{y\}$ $(y \in W_2)$ が成り立つとき， y を a^V と書く．

Definition 2.4. Satisfaction relation $\models$ を定める．Product model $\mathfrak{M}$ とその可能世界 (x, y)，HPL の論理式 φ に対して，関係 $\mathfrak{M}, (x, y) \models \varphi$ は，以下のように帰納的に定められる:

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{M}, (x, y) \models p & \text{iff} & (x, y) \in V(p), \text{where } p \in \mathbf{Prop} \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models i & \text{iff} & x = i^V, \text{where } i \in \mathbf{Nom}_1 \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models a & \text{iff} & y = a^V, \text{where } a \in \mathbf{Nom}_2 \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models \neg\varphi & \text{iff} & \text{not } \mathfrak{M}, (x, y) \models \varphi \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models \varphi \wedge \psi & \text{iff} & \mathfrak{M}, (x, y) \models \varphi \text{ and } \mathfrak{M}, (x, y) \models \psi \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models \Diamond_1\varphi & \text{iff} & \text{there is some } (x', y') \text{ s.t. } (x, y)R_h(x', y') \text{ and } \mathfrak{M}, (x', y') \models \varphi \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models \Diamond_2\varphi & \text{iff} & \text{there is some } (x', y') \text{ s.t. } (x, y)R_v(x', y') \text{ and } \mathfrak{M}, (x', y') \models \varphi \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models @_i\varphi & \text{iff} & \mathfrak{M}, (i^V, y) \models \varphi \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models @_a\varphi & \text{iff} & \mathfrak{M}, (x, a^V) \models \varphi
\end{array}
$$

すべての $(x, y) \in W$ について $\mathfrak{M}, (x, y) \models \varphi$ が成り立つとき， $\mathfrak{M} \models \varphi$ と書く．さらに，すべての model $\mathfrak{M}$ について $\mathfrak{M} \models \varphi$ が成り立つとき， $\models \varphi$ と書き， φ は**妥当である (valid)** という．

また，論理式の有限集合 Γ, Δ に対して， $\models \bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$ が成り立つとき， Γ の仮定のもと Δ が妥当であるといい， $\Gamma \models \Delta$ と書く．

R_h, R_v の定義から， $\Diamond_k (k = 1, 2)$ における satisfaction relation の定義は次のように書き換えられる．

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{M}, (x, y) \models \Diamond_1\varphi & \text{iff} & \text{there is some } x' \in W_1 \text{ s.t. } xR_1x' \text{ then } \mathfrak{M}, (x', y) \models \varphi \\
\mathfrak{M}, (x, y) \models \Diamond_2\varphi & \text{iff} & \text{there is some } y' \in W_2 \text{ s.t. } yR_2y' \text{ then } \mathfrak{M}, (x, y') \models \varphi
\end{array}
$$

さらに，先の定義に従えば， $\vee, \rightarrow, \Box$ における satisfaction relation について，以下が成り立つ．

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{M},(x,y) \models \varphi \vee \psi & \text{iff} & \mathfrak{M},(x,y) \models \varphi \text{ or } \mathfrak{M},(x,y) \models \psi \\
\mathfrak{M},(x,y) \models \varphi \rightarrow \psi & \text{iff} & \text{if } \mathfrak{M},(x,y) \models \varphi, \text{ then } \mathfrak{M},(x,y) \models \psi \\
\mathfrak{M},(x,y) \models \Box_1 \varphi & \text{iff} & \text{for all } (x',y') \text{ , if } (x,y)R_h(x',y') \text{ then } \mathfrak{M},(x',y') \models \varphi \\
 & \text{iff} & \text{for all } x' \in W_1, \text{ if } xR_1x' \text{ then } \mathfrak{M},(x',y) \models \varphi \\
\mathfrak{M},(x,y) \models \Box_2 \varphi & \text{iff} & \text{for all } (x',y') \text{ , if } (x,y)R_v(x',y') \text{ then } \mathfrak{M},(x',y') \models \varphi \\
 & \text{iff} & \text{for all } y' \in W_2, \text{ if } yR_2y' \text{ then } \mathfrak{M},(x,y') \models \varphi
\end{array}
$$

3 Tableau の定義

Definition 3.1. HPL の **tableau** とは，HPL の論理式を node とする well-founded な木 (tree) のことである．Tableau の根 (root) になる論理式のことを **root formula** という．また，root formula からある node に至るまでの経路を **branch** という．Tableau の branch Θ に論理式 φ が現れることを $\varphi \in \Theta$ と書く．

Tableau の branch Θ が**閉じている (closed)** とは， Θ が以下の条件を 1 つ以上満たすことである:

i) $@_i@_a\varphi, @_i@_a\neg\varphi \in \Theta$ なる φ が存在する．

ii) $@_i\varphi, @_i\neg\varphi \in \Theta$ なる φ が存在する．

iii) $@_a\varphi, @_a\neg\varphi \in \Theta$ なる φ が存在する．

Θ が閉じていないとき， Θ は**開いている (open)** という．

Tableau にあるすべての branch が閉じているとき，**tableau が閉じている**という．

Definition 3.2. Tableau の変形規則を以下のとおり定める:

$$
\frac{@_i@_a\neg\neg\varphi}{@_i@_a\varphi}\ [\neg\neg] \qquad
\frac{@_i@_a(\varphi \wedge \psi)}{\begin{array}{c}@_i@_a\varphi \\ @_i@_a\psi\end{array}}\ [\wedge] \qquad
\frac{@_i@_a\neg(\varphi \wedge \psi)}{@_i@_a\neg\varphi \mid @_i@_a\neg\psi}\ [\neg\wedge]
$$

$$
\frac{@_i@_a\Diamond_1\varphi}{\begin{array}{c}@_i\Diamond_1 j \\ @_j@_a\varphi\end{array}}\ [\Diamond_1]^{*1,*3} \qquad
\frac{@_i@_a\Diamond_2\varphi}{\begin{array}{c}@_a\Diamond_2 b \\ @_i@_b\varphi\end{array}}\ [\Diamond_2]^{*2,*3} \qquad
\frac{\begin{array}{c}@_i@_a\neg\Diamond_1\varphi \\ @_i\Diamond_1 j\end{array}}{@_j@_a\neg\varphi}\ [\neg\Diamond_1] \qquad
\frac{\begin{array}{c}@_i@_a\neg\Diamond_2\varphi \\ @_a\Diamond_2 b\end{array}}{@_i@_b\neg\varphi}\ [\neg\Diamond_2]
$$

$$
\frac{@_i@_a@_j\varphi}{@_j@_a\varphi}\ [@_1] \qquad
\frac{@_i@_a@_b\varphi}{@_i@_b\varphi}\ [@_2] \qquad
\frac{@_i@_a\neg@_j\varphi}{@_j@_a\neg\varphi}\ [\neg@_1] \qquad
\frac{@_i@_a\neg@_b\varphi}{@_i@_b\neg\varphi}\ [\neg@_2]
$$

$$
\frac{@_i@_a s}{@_i s}\ [Red_1]^{*4} \qquad
\frac{@_i@_a t}{@_a t}\ [Red_2]^{*5} \qquad
\frac{@_i\neg j}{@_j j}\ [\neg_1] \qquad
\frac{@_a\neg b}{@_b b}\ [\neg_2]
$$

$$
\frac{\begin{array}{c}@_i@_a\varphi \\ @_i j\end{array}}{@_j@_a\varphi}\ [Id_{11}] \qquad
\frac{\begin{array}{c}@_i@_a\varphi \\ @_a b\end{array}}{@_i@_b\varphi}\ [Id_{12}] \qquad
\frac{\begin{array}{c}@_i s \\ @_i j\end{array}}{@_j s}\ [Id_{21}]^{*4} \qquad
\frac{\begin{array}{c}@_a t \\ @_a b\end{array}}{@_b t}\ [Id_{22}]^{*5}
$$

*1: $j \in \mathbf{Nom}_1$ はそれまでの tableau 中に登場しない新しい nominal である．

*2: $b \in \mathbf{Nom}_2$ はそれまでの tableau 中に登場しない新しい nominal である.

*3: 1 つの論理式に対し 1 回のみ適用できる.

*4: $s = k, \neg k$ $(k \in \mathbf{Nom}_1)$.

*5: $t = c, \neg c$ $(c \in \mathbf{Nom}_2)$.

ただし，線より上側の式は「branch ですでに登場した式」を，下側の式は「これから branch に node として加える式」をそれぞれ表す．また，縦線は「木の枝分かれ」を表す．

Remark 3.3. $\Box_1$ の書き換え規則 $\Box_1\varphi \equiv \neg\Diamond_1\neg\varphi$ から，tableau の rule$[\neg\Diamond_1]$ は以下の規則と同値.

$$\frac{@_i@_a\Box_1\neg\varphi, @_i\Diamond_1 j}{@_j@_a\neg\varphi}\ [\Box_1]$$

これは,「i, a が成り立つ可能世界で $\Box_1\neg\varphi$ が成り立ち，かつ i が成り立つ可能世界から j が成り立つ可能世界に到達可能ならば，j, a が成り立つ可能世界では $\neg\varphi$ が成り立つ」ことを表している．$\Box_2$ についても同様.

Definition 3.4. Tableau の branch Θ が **saturated である**とは，Θ が次の条件すべてを満たすことである:

i) $@_i@_a\neg\neg\varphi \in \Theta$ ならば，$@_i@_a\varphi \in \Theta$.
ii) $@_i@_a(\varphi \wedge \psi) \in \Theta$ ならば，$@_i@_a\varphi, @_i@_a\psi \in \Theta$.
iii) $@_i@_a\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Theta$ ならば，$@_i@_a\neg\varphi \in \Theta$ または $@_i@_a\neg\psi \in \Theta$.
iv) $@_i@_a\Diamond_1\varphi \in \Theta$ ならば，ある $j \in \mathbf{Nom}_1$ が存在して，$@_i\Diamond_1 j, @_j@_a\varphi \in \Theta$.
v) $@_i@_a\Diamond_2\varphi \in \Theta$ ならば，ある $b \in \mathbf{Nom}_2$ が存在して，$@_a\Diamond_2 b, @_i@_b\varphi \in \Theta$.
vi) $@_i@_a\neg\Diamond_1\varphi, @_i\Diamond_1 j \in \Theta$ ならば，$@_j@_a\neg\varphi \in \Theta$.
vii) $@_i@_a\neg\Diamond_2\varphi, @_a\Diamond_2 b \in \Theta$ ならば，$@_i@_b\neg\varphi \in \Theta$.
viii) $@_i@_a@_j\varphi \in \Theta$ ならば，$@_j@_a\varphi \in \Theta$.
ix) $@_i@_a@_b\varphi \in \Theta$ ならば，$@_i@_b\varphi \in \Theta$.
x) $@_i@_a\neg@_j\varphi \in \Theta$ ならば，$@_j@_a\neg\varphi \in \Theta$.
xi) $@_i@_a\neg@_b\varphi \in \Theta$ ならば，$@_i@_b\neg\varphi \in \Theta$.
xii) $s = k, \neg k$ $(k \in \mathbf{Nom}_1)$ かつ $@_i@_a s \in \Theta$ ならば，$@_i s \in \Theta$.
xiii) $t = c, \neg c$ $(c \in \mathbf{Nom}_2)$ かつ $@_i@_a t \in \Theta$ ならば，$@_a t \in \Theta$.
xiv) $@_i\neg j \in \Theta$ ならば，$@_j j \in \Theta$.
xv) $@_a\neg b \in \Theta$ ならば，$@_b b \in \Theta$.
xvi) $@_i@_a\varphi, @_i j \in \Theta$ ならば，$@_j@_a\varphi \in \Theta$.
xvii) $@_i@_a\varphi, @_a b \in \Theta$ ならば，$@_i@_b\varphi \in \Theta$.
xviii) $s = k, \neg k$ $(k \in \mathbf{Nom}_1)$ かつ $@_i s, @_i j \in \Theta$ ならば，$@_j s \in \Theta$.
xix) $t = c, \neg c$ $(c \in \mathbf{Nom}_2)$ かつ $@_a t, @_a b \in \Theta$ ならば，$@_b\varphi \in \Theta$.

Definition 3.5. 論理式 φ に対して $@_i@_a\neg\varphi$ $(i \in \mathbf{Nom}_1, a \in \mathbf{Nom}_2$ は φ に出現しない任意の nominal$)$ を root formula とする閉じた tableau が存在するとき，φ が**証明可能**であるといい，$\vdash \varphi$ と書く.

また，論理式の有限集合 Γ, Δ に対して，$@_i@_a\neg(\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta)$ すなわち $@_i@_a(\bigwedge\Gamma \wedge \neg(\bigvee\Delta))$（$i \in \mathbf{Nom}_1, a \in \mathbf{Nom}_2$ は $\bigwedge\Gamma \wedge \neg(\bigvee\Delta)$ に登場しない nominal）を root formula とする閉じた tableau が存在するとき，Γ から Δ が証明可能であるといい，$\Gamma \vdash \Delta$ と書く.

4 Tableau の健全性・完全性

HPL の product model と tableau に対して，健全性が成り立つ．

Theorem 4.1 (Tableau の健全性)**.** HPL の product model と tableau に対して，健全性が成り立つ．すなわち，

$$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \models \varphi.$$

Corollary 4.2. 論理式の有限集合 Γ, Δ に対して，次が成り立つ:

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \Delta.$$

Proof. Thm.4.1 で $\varphi = \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ とすればよい． ■

以下では完全性を示す．

まず、擬部分論理式 (Quasi-subformula) という概念を定義する。

Definition 4.3 (Quasi-subformula)**.** 論理式 $@_i @_a \varphi, @_j @_b \psi$ に対し， $@_i @_a \varphi$ が $@_j @_b \psi$ の**擬部分論理式 (quasi-subformula)** であるとは，次のどちらかを満たすことである:

- φ が ψ の部分論理式．
- φ は $\neg\chi$ の形をしており， χ が ψ の部分論理式．

Lemma 4.4 (Quasi-subformula property)**.** $\mathcal{T}$ を tableau とする．このとき， $\mathcal{T}$ 内に登場する論理式のうち， $@_i @_a \varphi$ の形をしているものは， $\mathcal{T}$ の root formula の擬部分論理式．

Proof. $[Red_1]$, $[Red_2]$, $[\neg_1]$, $[\neg_2]$, $[Id_{21}]$, $[Id_{22}]$ の 6 つを除く各規則について帰納法を適用すればよい．以下，$[\neg\wedge]$, $[\Diamond_1]$, $[\Diamond_2]$ の場合を例に示す．

$[\neg\wedge]$ $@_i @_a \neg\varphi, @_i @_a \neg\psi$ はそれぞれ $@_i @_a \neg(\varphi \wedge \psi)$ の擬部分論理式である．さらに帰納法の仮定から，これは root formula の擬部分論理式．したがって， $@_i @_a \neg\varphi, @_i @_a \neg\psi$ は root formula の擬部分論理式．

$[\Diamond_1]$ $@_j @_a \varphi$ のみ考えれば十分．これは $@_i @_a \Diamond_1 \varphi$ の擬部分論理式で，帰納法の仮定から $@_i @_a \Diamond_1 \varphi$ は root formula の擬部分論理式だから， $@_j @_a \varphi$ は root formula の擬部分論理式である．

他の場合も同様にして示される． ■

次に，**right nominal** という概念を定義する．Tableau の branch Θ に対して，$s \in \mathbf{Nom}$ が right nominal であるとは， $@_t s \in \Theta$ なる nominal t が存在することである．

Right nominal については，次の性質が成り立つ．

Lemma 4.5. Tableau の branch Θ に出現する right nominal は，すべて root formula に出現する．

Proof. s を Θ に出現する right nominal とする．このときある nominal t が存在して，$@_t s \in \Theta$．ここでは $s, t \in \mathbf{Nom}_1$ とする（ $s, t \in \mathbf{Nom}_2$ の場合も全く同様に示せる）．さて，このとき $@_t s$ は $[Red_1]$, $[\neg_1]$ のどちらかから導かれているはずである．

i) $@_t s$ が $[Red_1]$ から導かれているならば，ある nominal $a \in \mathbf{Nom_2}$ が存在して， $@_t @_a s \in \Theta$．Lem.4.4 から， s は root formula の擬部分論理式であり，したがって s は root formula に出現する．

ii) $@_t s$ が $[\neg_1]$ から導かれているならば， $t = s$ かつある nominal $i \in \mathbf{Nom_1}$ が存在して $@_i \neg s \in \Theta$．さらに，この式は $[Red_1]$ からしか導かれないから，ある nominal $a \in \mathbf{Nom_2}$ が存在して $@_i @_a \neg s \in \Theta$．これより Lem.4.4 から $\neg s$ は root formula の擬部分論理式だから， s は root formula に出現する．

■

Definition 4.6. Θ を tableau の branch とする． Θ に出現する right nominal $i, j \in \mathbf{Nom_1}, a, b \in \mathbf{Nom_2}$ に対し，関係 $\sim^1_\Theta, \sim^2_\Theta$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} i \sim^1_\Theta j \quad &\text{iff} \quad @_i j \in \Theta \\ a \sim^2_\Theta b \quad &\text{iff} \quad @_a b \in \Theta. \end{aligned}$$

Lemma 4.7. Θ を saturated な tableau の branch とする．このとき, Def.4.6 で定義した関係 $\sim^k_\Theta$ $(k = 1, 2)$ は，それぞれ $\mathbf{Nom_1}, \mathbf{Nom_2}$ の上の同値関係である．

Proof. $\sim^1_\Theta, \sim^2_\Theta$ が反射性，対称性，推移性を満たすことを示せばよい．ここでは $\sim^1_\Theta$ の場合のみ示す．

まず反射性を示す． i を right nominal とすると，ある nominal j が存在して， $@_j i \in \Theta$ が成り立つ． $@_j i$ が 2 つあるとみなし, これに $[Id_{21}]$ を適用すると $@_i i$ が得られる． Θ は saturated であるから, Def.3.4(xviii) より $@_i i \in \Theta$ が成り立ち，したがって $i \sim^1_\Theta i$ である．

次に対称性を示す． $i \sim^1_\Theta j$ を仮定する．定義から $@_i j \in \Theta$ である．また反射性より $@_i i \in \Theta$ であり， Θ が saturated であることから Def.3.4(xviii) より $@_j i \in \Theta$ が成り立つ．したがって $j \sim^1_\Theta i$ を得る．

最後に推移性を示す． $i \sim^1_\Theta j, j \sim^1_\Theta k$ を仮定する．定義から $@_i j \in \Theta, @_j k \in \Theta$ である．対称性より $@_j i \in \Theta$ がいえ， Θ が saturated であることから Def.3.4(xviii) 規則より $@_i k \in \Theta$．したがって $i \sim^1_\Theta k$ を得る． ■

Definition 4.8. Θ を tableau の saturated な branch とし， $i \in \mathbf{Nom_1}$ を Θ に出現する right nominal とする．このとき， i の $\sim^1_\Theta$ による同値類を $[i]^1_\Theta$ で表す．同様に， Θ に出現する nominal $a \in \mathbf{Nom_2}$ に対し，その $\sim^2_\Theta$ による同値類を $[a]^2_\Theta$ で表す．

さて，2 つの nominal 全体の集合 $\mathbf{Nom_1}, \mathbf{Nom_2}$ は可算無限集合であったから，それぞれに適当に整列順序を入れることができる．Nominal の集合 A に対して，この順序における最小元を $\min(A)$ と書く．次の Def.4.9 に登場する $\min(A)$ は，この意味での最小元を指す．

Definition 4.9. Θ を tableau の saturated な branch とし， s を Θ に出現する nominal とする（ s は right nominal でなくてもよい）． s の Θ における **urfather** を $u_\Theta(s)$ と書き，以下のように定義する:

$$u_\Theta(s) = \begin{cases} \min([j]^1_\Theta) & \text{if} \quad s \in \mathbf{Nom_1} \text{ and } @_s j \in \Theta \\ \min([b]^2_\Theta) & \text{if} \quad s \in \mathbf{Nom_2} \text{ and } @_s b \in \Theta \\ s & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proposition 4.10. Def.4.9 の $u_\Theta(s)$ は well-defined である．

Proof. $@_s i, @_s j \in \Theta$ かつ $s, i, j \in \mathbf{Nom}_1$ とする（$\mathbf{Nom}_2$ の場合でも同様に証明できる）．Θ が saturated であることから，Def.3.4(xviii) より $@_i j \in \Theta$ である．したがって $[i]^1_\Theta = [j]^1_\Theta$ だから，$\min([i]^1_\Theta) = \min([j]^1_\Theta)$ となり，$u_\Theta(s)$ は一意. ■

Lemma 4.11. Θ を tableau の saturated な branch とする．このとき，以下の性質が成り立つ:

i) $s \in \mathbf{Nom}$ が Θ に出現する right nominal ならば，$@_{u_\Theta(s)} s \in \Theta$.

ii) $s, t \in \mathbf{Nom}$ について，$@_s t \in \Theta$ ならば $u_\Theta(s) = u_\Theta(t)$.

iii) Θ に登場する $s \in \mathbf{Nom}$ について，$u_\Theta(u_\Theta(s)) = u_\Theta(s)$.

iv) Θ の root formula の擬部分論理式 $@_i @_a \varphi \in \Theta$ について，$@_{u_\Theta(i)} @_{u_\Theta(a)} \varphi \in \Theta$.

Proof. i) s が right nominal ならば，Lem.4.7 より $@_s s \in \Theta$ である．これより，定義から直ちに $u_\Theta(s) = \min([s]^k_\Theta)$ $(k = 1, 2)$．ゆえに $u_\Theta(s) \sim^k_\Theta s$ が成り立つので，$@_{u_\Theta(s)} s \in \Theta$.

ii) まず $@_s t \in \Theta$ から直ちに $u_\Theta(s) = \min([t]^k_\Theta)$ $(k = 1, 2)$ を得る．また，t が right nominal であることから，(i) の証明と同様にして $u_\Theta(t) = \min([t]^k_\Theta)$．これらから，$u_\Theta(s) = u_\Theta(t)$.

iii) $u_\Theta(s) = s$ ならば自明だから, そうでない場合を仮定する．このとき, $u_\Theta(u_\Theta(s)) = \min([t_1]^k_\Theta)$ $(k = 1, 2)$ なる $t_1 \in \Theta$ が存在して，$@_{u_\Theta(s)} t_1 \in \Theta$．これより $\sim^k_\Theta$ の定義から $u_\Theta(s) \sim^k_\Theta t_1$ が成り立つ．同様にして，$u_\Theta(s) = \min([t_2]^k_\Theta)$ かつ $s \sim^k_\Theta t_2$ をみたす $t_2 \in \mathbf{Nom}$ が存在する．さらに $u_\Theta(s)$ の定義より明らかに $u_\Theta(s) \sim^k_\Theta s$．したがって，

$$u_\Theta(u_\Theta(s)) = \min([t_1]^k_\Theta) = \min([u_\Theta(s)]^k_\Theta) = \min([s]^k_\Theta) = \min([t_2]^k_\Theta) = u_\Theta(s).$$

iv) $@_i @_a \varphi \in \Theta$ を仮定する．このとき，次の 4 通りの可能性がある．

a) $u_\Theta(i) = i, u_\Theta(a) = a$

b) $u_\Theta(i) = i, u_\Theta(a) = \min([b]^2_\Theta)$

c) $u_\Theta(i) = \min([j]^1_\Theta), u_\Theta(a) = a$

d) $u_\Theta(i) = \min([j]^1_\Theta), u_\Theta(a) = \min([b]^2_\Theta)$

(iva) であれば Lemma は自明．さて (ivd) を仮定すると，定義から直ちに $@_i j, @_a b \in \Theta$．さて Θ は saturated なので，Def.3.4(xvi), (xvii) より $@_j @_b \varphi \in \Theta$ を得る．また，$u_\Theta(i) = \min([j]^1_\Theta), u_\Theta(a) = \min([b]^2_\Theta)$ から $j \sim^1_\Theta u_\Theta(i), b \sim^2_\Theta u_\Theta(a)$ が成り立つので，$@_j u_\Theta(i), @_b u_\Theta(a) \in \Theta$．この 2 つから，ふたたび Θ の saturated 性を使って，Def.3.4(xvi), (xvii) より $@_{u_\Theta(i)} @_{u_\Theta(a)} \varphi \in \Theta$ が得られる．(ivb), (ivc) の場合の証明は (ivd) のときと同様.

■

完全性を示すために，tableau から model をつくる．

Definition 4.12. **開いている** tableau の branch Θ に対して，product model $\mathfrak{M}^\Theta = (W^\Theta, R^\Theta_h, R^\Theta_v, V^\Theta)$

を以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
W_1^\Theta &= \{i \in \mathbf{Nom}_1 \mid i \text{ は}\Theta\text{に出現する nominal}\}\\
W_2^\Theta &= \{a \in \mathbf{Nom}_2 \mid a \text{ は}\Theta\text{に出現する nominal}\}\\
W^\Theta &= W_1^\Theta \times W_2^\Theta\\
R_1^\Theta &= \{(i, u_\Theta(j)) \mid @_i\Diamond_1 j \in \Theta\}\\
R_2^\Theta &= \{(a, u_\Theta(b)) \mid @_a\Diamond_2 b \in \Theta\}\\
V^\Theta(p) &= \{(i,a) \mid @_i@_a p \in \Theta\} \quad \text{where} \quad p \in \mathbf{Prop}\\
V^\Theta(i) &= \{(u_\Theta(i)\} \times W_2 \quad \text{where} \quad i \in \mathbf{Nom}_1\\
V^\Theta(a) &= W_1 \times \{u_\Theta(a)\} \quad \text{where} \quad a \in \mathbf{Nom}_2
\end{aligned}
$$

Lemma 4.13 (モデル存在定理)**.** Θ を tableau の saturated な branch で，かつ開いているものとする．このとき，以下が成り立つ:

$$@_i@_a\varphi \in \Theta \Rightarrow \mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \varphi.$$

Proof. φ の構成に関する帰納法で証明する．

[$\varphi = p$] $@_i@_a p \in \Theta$ とする．Lem.4.11(iv) から， $@_{u_\Theta(i)}@_{u_\Theta(a)}p \in \Theta$ が成り立つ．これと V^Θ の定義から， $(u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \in V^\Theta(p)$ であるから， $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models p$.

[$\varphi = \neg p$] $@_i@_a\neg p \in \Theta$ とする．Lem.4.11(iv) から， $@_{u_\Theta(i)}@_{u_\Theta(a)}\neg p \in \Theta$ が成り立つ． Θ が開いていることから， $@_{u_\Theta(i)}@_{u_\Theta(a)}p \notin \Theta$．これと V^Θ の定義から， $(u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \notin V^\Theta(p)$ であるから， $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \neg p$.

[$\varphi = j$] $@_i@_a j \in \Theta$ ($j \in \mathbf{Nom}_1$) とする． Θ が saturated であることから，Def.3.4(xii) より $@_i j \in \Theta$ となるから，Lem.4.11(ii) より $u_\Theta(i) = u_\Theta(j)$ が成り立つ．これより $(u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \in V^\Theta(j)$ となり，したがって $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models j$． $\varphi = b \in \mathbf{Nom}_2$ の場合も同様.

[$\varphi = \neg j$] $@_i@_a\neg j \in \Theta$ ($j \in \mathbf{Nom}_1$) とする．Lem.4.11(iv) から $@_{u_\Theta(i)}@_{u_\Theta(a)}\neg j \in \Theta$．これと Θ が saturated であることから，Def.3.4(xii), (xiv) を順に適用すると，$@_{u_\Theta(i)}\neg j, @_j j \in \Theta$．後者より j が right nominal であるから，Lem.4.11(i) より $@_{u_\Theta(j)} j \in \Theta$ が成り立つ．これより $@_{u_\Theta(i)}\neg j, @_{u_\Theta(j)} j \in \Theta$ であるが，Θ が開いていることから $u_\Theta(i) \neq u_\Theta(j)$ である．これと V^Θ の定義から， $(u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \notin V^\Theta(j)$ だから， $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \neg j$ である． $\varphi = \neg b$ ($b \in \mathbf{Nom}_2$) の場合も同様.

[$\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$] $@_i@_a(\psi_1 \wedge \psi_2) \in \Theta$ とする． Θ が saturated であることから，Def.3.4(ii) より $@_i@_a\psi_1, @_i@_a\psi_2 \in \Theta$．よって，帰納法の仮定から $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \psi_1$, $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \psi_2$ がともに成り立つ．したがって $\models$ の定義から，$\mathfrak{M}, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \psi_1 \wedge \psi_2$ を得る．

[$\varphi = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$] $@_i@_a\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \in \Theta$ とする． Θ が saturated であることから，Def.3.4(iii) より $@_i@_a\neg\psi_1 \in \Theta$ または $@_i@_a\neg\psi_2 \in \Theta$ が成り立つ． Θ が開いていることから，$@_i@_a\psi_1, @_i@_a\psi_2 \in \Theta$ ということはあり得ず，したがって帰納法の仮定から $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \psi_1$, $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \psi_2$ がともに成り立つことはない．これは $\mathfrak{M}, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \not\models \psi_1 \wedge \psi_2$ を意味するから， $\mathfrak{M}, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$.

[$\varphi = \Diamond_1\psi$] $@_i@_a\Diamond_1\psi \in \Theta$ とする．Lem.4.11(iv) から， $@_{u_\Theta(i)}@_{u_\Theta(a)}\Diamond_1\psi \in \Theta$ である．これと Θ が saturated であることから，Def.3.4(iv) より，ある nominal j が存在して $@_{u_\Theta(i)}\Diamond_1 j, @_j@_{u_\Theta(a)}\psi \in \Theta$

が成り立つ．前者から R_h^Θ の定義を用いて $(u_\Theta(i), u_\Theta(a))R_h^\Theta(u_\Theta(j), u_\Theta(a))$ が導け，後者に帰納法の仮定を適用して $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(j), u_\Theta(u_\Theta(a))) \models \psi$ が導ける．Lem.4.11(iii) から $u_\Theta(u_\Theta(a)) = u_\Theta(a)$ だから，$\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(j), u_\Theta(a)) \models \psi$．したがって $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \Diamond_1\psi$． $\varphi = \Diamond_2\psi$ の場合も同様.

[$\varphi = \neg\Diamond_1\psi$] $@_i@_a\neg\Diamond_1\psi \in \Theta$ とする．Lem.4.11(iv) から， $@_{u_\Theta(i)}@_{u_\Theta(a)}\neg\Diamond_1\psi \in \Theta$ である．ここで，$(u_\Theta(i), u_\Theta(a))R_h^\Theta(j, u_\Theta(a))$ を満たす $j \in \mathbf{Nom}_1$ が 1 つ以上存在することを仮定する（もしそのような j が存在しなければ，model $\mathfrak{M}^\Theta$ で可能世界 $(u_\Theta(i), u_\Theta(a))$ から R_h^Θ で到達可能な世界が存在しないから，$\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \neg\Diamond_1\psi$ は自明である）．いま，このような j を任意にとれば， R_h^Θ の定義から $j = u_\Theta(k)$ かつ $@_{u_\Theta(i)}\Diamond_1 k \in \Theta$ をみたす $k \in \mathbf{Nom}_1$ が存在する．これらと Θ が saturated であることを用いて，Def.3.4(vi) から， $@_k@_{u_\Theta(a)}\neg\psi \in \Theta$．よって帰納法の仮定から $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(k), u_\Theta(u_\Theta(a))) \models \neg\psi$． $j = u_\Theta(k)$ であり，また $u_\Theta(u_\Theta(a)) = u_\Theta(a)$ だから，$\mathfrak{M}^\Theta, (j, u_\Theta(a)) \models \neg\psi$．これがすべての j について成り立つから， $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \Box_1\neg\psi$ となり，したがって $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \neg\Diamond_1\psi$． $\varphi = \neg\Diamond_2\psi$ の場合も同様.

[$\varphi = @_j\psi$] $@_i@_a@_j\psi \in \Theta$ ($j \in \mathbf{Nom}_1$) とする． Θ が saturated だから，Def.3.4(viii) より $@_j@_a\psi \in \Theta$ が導け，帰納法の仮定から $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(j), u_\Theta(a)) \models \psi$ が成り立つ．したがって，$\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models @_j\psi$． $\varphi = @_b\psi$ ($b \in \mathbf{Nom}_2$) の場合も同様.

[$\varphi = \neg@_j\psi$] $@_i@_a\neg@_j\psi \in \Theta$ ($j \in \mathbf{Nom}_1$) とする． Θ が saturated だから，Def.3.4(x) より $@_j@_a\neg\psi \in \Theta$ が導け，帰納法の仮定から $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(j), u_\Theta(a)) \models \neg\psi$ が成り立つ．したがって，$\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models @_j\neg\psi$ であり，これより $\mathfrak{M}^\Theta, (u_\Theta(i), u_\Theta(a)) \models \neg@_j\psi$． $\varphi = \neg@_b\psi$ ($b \in \mathbf{Nom}_2$) の場合も同様.

■

Theorem 4.14 (Tableau の完全性)**.** Hybrid logic の Kripke model と tableau に対して，完全性が成り立つ．すなわち，

$$\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi.$$

Proof. 対偶を示す．

$\nvdash \varphi$ を仮定する．このとき，φ に出現しない nominal $i \in \mathbf{Nom}_1, a \in \mathbf{Nom}_2$ を取ると， $@_i@_a\neg\varphi$ を root formula とする任意の tableau は開いているから，そのような tableau をとれば，その branch のうちで開いているもの Θ が存在する．この Θ から saturated になるような Θ' を構成でき，Lem.4.13 より $\mathfrak{M}^{\Theta'}, (u_{\Theta'}(i), u_{\Theta'}(a)) \models \neg\varphi$ が成り立つ． $\models$ の定義から $\mathfrak{M}^{\Theta'}, (u_{\Theta'}(i), u_{\Theta'}(a)) \not\models \varphi$ であり，これは φ を成り立たせない model が存在することを意味する．したがって， $\not\models \varphi$． ■

Corollary 4.15. 論理式の有限集合 Γ, Δ に対して，次が成り立つ:

$$\Gamma \models \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \Delta.$$

Proof. Thm.4.14 で $\varphi = \bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$ とすればよい． ■

参考文献

[1] Patrick Blackburn and Jerry Seligman. Hybrid languages. *Journal of Logic, Language and Information*, 4(3):251–272, 1995.

[2] Thomas Bolander and Patrick Blackburn. Termination for hybrid tableaus. *Journal of Logic and Computation*, 17(3):517–554, 2007.

[3] Katsuhiko Sano. Axiomatizing hybrid products: How can we reason many-dimensionally in hybrid logic? *Journal of Applied Logic*, 8(4):459–474, 2010.

[4] 戸次大介. **数理論理学**. 東京大学出版会, 2012.

[5] 丹治信春. **タブローの方法による論理学入門**. 朝倉書店, 1999.