Exchange に関わる結合則の族に対応する推論規則 *

新潟大学経営戦略本部評価センター　　関　隆宏
Takahiro Seki
University Evaluation Center, Headquarters for Management Strategy,
Niigata University

1　はじめに

部分構造論理（substructural logics）は，シーケント計算 **LK** や **LJ** における構造に関する推論規則（exchange，contraction，weakening）のいくつかを取り除き，必要に応じていくつかの公理を加えることにより得られる論理の総称である。部分構造論理では，通常のシーケント計算における「,」に対応する論理演算子「·」（fusion）を導入するが，例えば **LJ** からすべての構造に関する推論規則を取り除くことにより得られる論理において，· は交換則を持たないが結合則を持っている。しかし，これよりも弱い論理において結合則を仮定しない場合もあることから，（· に関する）結合則（associativity）も構造規則の一つとみなされる。

結合則を持たない部分構造論理と結合則を持つ部分構造論理の間にはさまざまな論理がある。結合則を持たない部分構造論理に結合則の族を追加公理（または追加推論規則）として加えた論理はその典型例である。ここで，結合則の族とは，結合則と関係のある含意「→」に関する公理（または推論規則）を指し，代表的な公理に

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{B} & : & (\alpha \to \beta) \to [(\delta \to \alpha) \to (\delta \to \beta)] \\
\mathsf{B}' & : & (\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \delta) \to (\alpha \to \delta)] \\
\mathsf{C} & : & [\alpha \to (\beta \to \delta)] \to [\beta \to (\alpha \to \delta)]
\end{array}
$$

がある。これらの公理は（fusion に関する）結合則そのものまたは結合則と exchange が組み合わされた公理，すなわち exchange に関わる結合則に対応する公理とみることができる。Exchange を持たない部分構造論理では，上記の含意「→」を 2 種の含意「\」（left division）および「/」（right division）で置き換えることになる。本稿では，この置き換えによって得られる B の変種に対応する Gentzen 流の形式化における推論規則について述べる。なお，本研究は研究進行中であるため，現時点までに得られている結果の一部の

* 本研究は科研費（課題番号:19K03600）の助成を受けたものである。

紹介にとどめている。

2　部分構造論理 BSL と結合則の族

基礎となる部分構造論理 **BSL** を以下のとおり定める。この論理は [14] における **BSL** の命題論理部分を取り出したものである。

(a) 公理

(A1) $\alpha\backslash\alpha$

(A2) $(\alpha\wedge\beta)\backslash\alpha$

(A3) $(\alpha\wedge\beta)\backslash\beta$

(A4) $[(\alpha\backslash\beta)\wedge(\alpha\backslash\delta)]\backslash[\alpha\backslash(\beta\wedge\delta)]$

(A5) $\alpha\backslash(\alpha\vee\beta)$

(A6) $\beta\backslash(\alpha\vee\beta)$

(A7) $[(\alpha\backslash\delta)\wedge(\beta\backslash\delta)]\backslash[(\alpha\vee\beta)\backslash\delta]$

(A8) 1

(b) 推論規則

(R1) $\dfrac{\alpha \quad \alpha\backslash\beta}{\beta}$　(R2) $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha\wedge\beta}$　(R3) $\dfrac{\alpha\backslash\beta}{(\delta\backslash\alpha)\backslash(\delta\backslash\beta)}$

(R4) $\dfrac{(\alpha\cdot\beta)\backslash\delta}{\beta\backslash(\alpha\backslash\delta)}$　(R5) $\dfrac{\beta\backslash(\alpha\backslash\delta)}{\alpha\backslash(\delta/\beta)}$　(R6) $\dfrac{\alpha\backslash(\delta/\beta)}{(\alpha\cdot\beta)\backslash\delta}$　(R7) $\dfrac{\alpha}{1\backslash\alpha}$

BSL において $[(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta]\backslash[\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)]$ も $[\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)]\backslash[(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta]$ も定理ではないので，**BSL** は結合則を持たない部分構造論理である。

本稿では，次の結合則の族を考える。これらは $(\alpha\to\beta)\to[(\delta\to\alpha)\to(\delta\to\beta)]$（しばしば公理 B と呼ばれる）に由来するものである。

(B1) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\delta\backslash\alpha)\backslash(\delta\backslash\beta)]$

(B2) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\delta\backslash\alpha)\backslash(\beta/\delta)]$

(B3) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\alpha/\delta)\backslash(\delta\backslash\beta)]$

(B4) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\alpha/\delta)\backslash(\beta/\delta)]$

(B5) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\delta\backslash\beta)/(\delta\backslash\alpha)]$

(B6) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\beta/\delta)/(\delta\backslash\alpha)]$

(B7) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\delta\backslash\beta)/(\alpha/\delta)]$

(B8) $(\alpha\backslash\beta)\backslash[(\beta/\delta)/(\alpha/\delta)]$

(B9) $(\beta/\alpha)\backslash[(\delta\backslash\alpha)\backslash(\delta\backslash\beta)]$

(B10) $(\beta/\alpha)\backslash[(\delta\backslash\alpha)\backslash(\beta/\delta)]$

(B11) $(\beta/\alpha)\backslash[(\alpha/\delta)\backslash(\delta\backslash\beta)]$

(B12) $(\beta/\alpha)\backslash[(\alpha/\delta)\backslash(\beta/\delta)]$

(B13) $(\beta/\alpha)\backslash[(\delta\backslash\beta)/(\delta\backslash\alpha)]$

(B14) $(\beta/\alpha)\backslash[(\beta/\delta)/(\delta\backslash\alpha)]$

(B15) $(\beta/\alpha)\backslash[(\delta\backslash\beta)/(\alpha/\delta)]$

(B16) $(\beta/\alpha)\backslash[(\beta/\delta)/(\alpha/\delta)]$

以下では, **BSL** に (Bi)（ただし, $i=1,\cdots,16$）を公理として加えた論理を **BSL**+(Bi) と書く。

3 BSL とその拡張に関する Gentzen 流の形式化

BSL に対するシーケント計算に関するいくつかの術語を導入する。**構造**（structure）は次のように定義される。

(i) 論理式 α は構造である。

(ii) A と B が構造であるならば，$(A;B)$ は構造である。

構造 A と論理式 α に対し，“$A \Rightarrow \alpha$” の形をした表現を**シーケント**という。

BSL に対するシーケント計算（以下，**LBSL** と呼ぶ）は次により定められる。ここで，Γ と Δ は，A が構造であるとき，$\Gamma A \Delta$ が構造となるような記号列（空列の場合もある）を表す。

- 公理　　$\alpha \Rightarrow \alpha$
- カット

$$\frac{A \Rightarrow \gamma \quad \Gamma\gamma\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma A \Delta \Rightarrow \delta}(\mathrm{cut})$$

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{\Gamma\alpha\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma\alpha\wedge\beta\Delta \Rightarrow \delta}(\wedge\Rightarrow) \quad \frac{\Gamma\beta\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma\alpha\wedge\beta\Delta \Rightarrow \delta}(\wedge\Rightarrow) \quad \frac{A \Rightarrow \alpha \quad A \Rightarrow \beta}{A \Rightarrow \alpha\wedge\beta}(\Rightarrow\wedge)$$

$$\frac{\Gamma\alpha\Delta \Rightarrow \delta \quad \Gamma\beta\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma\alpha\vee\beta\Delta \Rightarrow \delta}(\vee\Rightarrow) \quad \frac{A \Rightarrow \alpha}{A \Rightarrow \alpha\vee\beta}(\Rightarrow\vee) \quad \frac{A \Rightarrow \beta}{A \Rightarrow \alpha\vee\beta}(\Rightarrow\vee)$$

$$\frac{A \Rightarrow \alpha \quad \Gamma\beta\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(A;\alpha\backslash\beta)\Delta \Rightarrow \delta}(\backslash\Rightarrow) \qquad \frac{(\alpha;A) \Rightarrow \beta}{A \Rightarrow \alpha\backslash\beta}(\Rightarrow\backslash)$$

$$\frac{A \Rightarrow \alpha \quad \Gamma\beta\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(\beta/\alpha;A)\Delta \Rightarrow \delta}(/\Rightarrow) \qquad \frac{(A;\alpha) \Rightarrow \beta}{A \Rightarrow \beta/\alpha}(\Rightarrow/)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha;\beta)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma\alpha\cdot\beta\Delta \Rightarrow \delta}(\cdot\Rightarrow) \qquad \frac{A \Rightarrow \alpha \quad B \Rightarrow \beta}{(A;B) \Rightarrow \alpha\cdot\beta}(\Rightarrow\cdot)$$

$$\frac{\Gamma A\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(A;1)\Delta \Rightarrow \delta}(1\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma(A;1)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma A\Delta \Rightarrow \delta}(1\mathrm{E})$$

次は，前節に記した結合則の族である公理 (B1) から (B16) に対応する Gentzen 流の形式化について述べたものである。

定理 1　$i = 1, \cdots, 16$ とする。$\mathbf{BSL} + (\mathrm{B}i)$ は，$\mathbf{LBSL}$ に以下の推論規則 $(\mathrm{AE}i)$ を加えた体系（以下，$\mathbf{LBSL} + (\mathrm{AE}i)$ と書く）により形式化できる。

$$(\mathrm{AE1})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE2})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((B;C);A)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE3})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(B;(A;C))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE4})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((A;C);B)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE5})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(A;(C;B))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE6})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((C;B);A)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE7})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(B;(C;A))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE8})\quad \frac{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((C;A);B)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE9})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(B;(C;A))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE10})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((C;A);B)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE11})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(C;(B;A))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE12})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((B;A);C)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE13})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(B;(A;C))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE14})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((A;C);B)\Delta \Rightarrow \delta}$$

$$(\mathrm{AE15})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(C;(A;B))\Delta \Rightarrow \delta} \qquad (\mathrm{AE16})\quad \frac{\Gamma(A;(B;C))\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma((A;B);C)\Delta \Rightarrow \delta}$$

4　考察と今後の課題

$\mathbf{BSL} + (\mathrm{B}i)$ において，$[(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta] \backslash [\alpha \cdot (\beta \cdot \delta)]$ と $[\alpha \cdot (\beta \cdot \delta)] \backslash [(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta]$ の両方が定理であるとき，結合的（associative）であるといい，$(\alpha \cdot \beta) \backslash (\beta \cdot \alpha)$ が定理であるとき，可換的（commutative）であるという。定理 1 の結果を援用すると，$\mathbf{BSL} + (\mathrm{B}i)$ が結合的であるとは，(AE1) と (AE16) の両方が $\mathbf{LBSL} + (\mathrm{AE}i)$ において導出可能であること，また，$\mathbf{BSL} + (\mathrm{B}i)$ が可換的であるとは，

$$\frac{\Gamma(A;B)\Delta \Rightarrow \delta}{\Gamma(B;A)\Delta \Rightarrow \delta}$$

（ちょうどこれは ; に関する exchange 規則に対応している）が $\mathbf{LBSL} + (\mathrm{AE}i)$ において導出可能であることとして特徴づけられる。

定理 2　$\mathbf{BSL} + (\mathrm{B}i)$ は，

(1)　$i = 1, 4, 5, 11, 14, 16$ のとき，結合的でも可換的でもない。

(2)　$i = 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15$ のとき，結合的かつ可換的である。

現在，**BSL** に複数の $(\mathrm{B}i)$（や公理 B', C の変種）を公理として加えた論理について研究を進めているが，定理 2 から「結合的かつ可換的な論理」と「結合的でも可換的でもない」論理があることは容易に想像できる。また，$\mathbf{BSL} + (\mathrm{B1}) + (\mathrm{B16})$ のように「結合的であるが可換的でない」論理もある。

Gentzen 流の形式化における (AE1) から (AE16) に現れない推論規則を持つ論理のなかには，「可換的であるが結合的でない」論理がある。これらを含めた論理の相互関係を究明することが今後の課題である。

参考文献

[1] Bimbó, K., *Proof Theory : Sequent Calculi and Related Formalisms*, Chapman & Hall, 2014.

[2] Brady, R. T., 'The Gentzenization and decidability of RW', *Journal of Philosophical Logic* 19: 35–73, 1990.

[3] Brady, R. T., 'The Gentzenization and decidability of some contraction-less relevant logics', *Journal of Philosophical Logic* 20: 97–117, 1991.

[4] Brady, R. T., 'Gentzenizations of relevant logics with distribution', *Journal of Symbolic Logic* 61: 402–420, 1996.

[5] Cintula, P. and C. Noguera, 'A General Framework for Mathematical Fuzzy Logic', In C. Cintula, P. Hájek and C. Noguera (ed.), *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic - Volume 1*, 103–207, 2011.

[6] Došen, K., 'Sequent-systems and groupoid models. I', *Studia Logica* 47: 353–385, 1988.

[7] Došen, K., 'Sequent-systems and groupoid models. II', *Studia Logica* 48: 41–65, 1989.

[8] Galatos, N., P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Elsevier, 2007.

[9] Galatos, N. and H. Ono, 'Cut elimination and strong separation for substructural logics: An algebraic approach', *Annals of Pure and Applied Logic* 161:1097–1133, 2010.

[10] Ono, H., *Proof Theory and Algebra in Logic*, Springer, 2019.

[11] Ono, H. and Y. Komori, ‘Logics without the contraction rule’, *Journal of Symbolic Logic* 50: 169–201, 1985.

[12] Paoli, F., *Substructural Logics: A Primer*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[13] Restall, G., *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, 2000.

[14] Seki, T., ‘Metacompleteness of substructural logics’, *Studia Logica* 100: 1175–1199, 2012.

[15] 関　隆宏，適切論理から見た部分構造論理，日本数学会 2021 年度年会　数学基礎論および歴史分科会講演アブストラクト：9–18，2021.

[16] Schroeder-Heister, P. and K. Došen (ed.), *Substructural Logics*, Oxford University Press, 1993.