超直観主義述語論理における prenex normal form theorem に関する覚書*

静岡大学・理学部数学教室 鈴木信行
Nobu-Yuki Suzuki
Department of Mathematics, Faculty of Science, Shizuoka University

2022 年 7 月 1 日

概 要

Prenex normal form theorem (PNFT) は、古典述語論理に関するメタ定理であり、直観主義論理ではうまくいかない。一方、超直観主義論理には PNFT が成立するものも存在する。「PNFT が成立するか否か」を、その論理における量化子のふるまいの特性とみなして、超直観主義述語論理の枠組みで考察してみよう、という動機で考察を始めてみた。このような観点から見れば、よく知られた話にもまだまだ面白い点がある、と思っていただければ嬉しい。

1 ことのおこり

よく知られているように、prenex normal form theorem (冠頭標準形定理、以下では PNFT と略記) は、古典論理に関するメタ定理である。古典述語論理における量化子のふるまいを特徴的に表すもので、古典述語論理で成立するが直観主義述語論理では成立しないメタ定理の典型例でもある。古典論理における量化子と直観主義論理における量化子のふるまいを区別するもの[1]と考えて、超直観主義論理の観点から検討することを試みた。すると、どの教科書に載っている初等的な主題にもかかわらず[2]、すこし面白そうな様子が垣間見えてきたように思える。それを紹介させていただきたい。ただし、たいして新しいことが盛り込まれているわけではない。その点、ご寛恕を願う。

---

* A note on the prenex normal form theorem in super-intuitionistic predicate logics 本研究は JSPS 科研費 JP16K05252, JP20K03716, JP21H00694 の助成を受けたものです。本稿は、筆者の現在進行中の研究の要旨です。This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP16K05252, JP20K03716, and JP21H00694. This article is an extended abstract of the author's work in progress.

[1] これとは対照的に、直観主義述語論理で成立するが古典述語論理で成立しない典型例として、disjunction property や existence property がある。直観主義論理の $\vee$ と $\exists$ の構成性を特徴的に示す性質として知られる。超直観主義論理でのこれらの性質については、例えば [8] を参照して欲しい。

[2] 濫觴期より、prenex normal form を取り扱うことは数理論理学の基本的手法であった。例えば、Gödel による古典述語論理の完全性定理の証明 [4] は、論理式を prenex normal form に変換してから始まる。

上記で「直観主義述語論理では成立しないメタ定理の典型例」と書いた。この点を閲してみようとすると、やや困惑せざるを得ない。Wikipedia[12] では、直観主義述語論理でなぜ古典論理と同じ議論が困難なのか、を縷々説明してある。なるほど、古典述語論理と同じ議論ができないことは了解できた。では、まったく別の議論を経由して証明できないのだろうか？Stanford Encyclopedia of Philosophy[6] では、「すべての論理式が、直観主義述語論理で同値な prenex normal form(以下、PNF) を持つわけではない」なる旨が書いてある。しかし、肝心の反例となる論理式、すなわち、いかなる PNF 論理式とも、直観主義述語論理上では同値にならない論理式の具体例は示されていない。そこで、直観主義論理のことなら、、、ということで、ファン・ダーレン先生に頼ろう。彼の有名な教科書 [2, p.185] では、「PNF 論理式の直観主述語義論理における証明可能性は決定可能である」という内容の Exercise の後に Remark として、「直観主義述語論理の決定不可能性と合わせれば、このことから、すべての論理式が PNF 論理式と論理的同値なわけではない」なる旨を述べている。ここでもやはり具体的な反例は書かれていない[3]。いったい、反例はどうなっているのか？

反例はある。梅沢 [11] の記述を読むと、$\forall xp(x) \to q$ がそれであることが解る (p は 1 変数述語記号、q は命題変数、$\to$ は「ならば」[4])[5]。

これが反例になることは解ったが、非古典述語論理やその量化子のふるまいに興味を持つ身としては、ひとつの「点」が解っただけのように思われ、見通せた気がしないのである。梅沢 [11] は、中間述語論理の論文である。中間述語論理とは直観主義述語論理と古典述語論理の間に広がる論理たちの謂いである。そこで、もう少し大きく、直観主義述語の拡大であって古典述語論理も含む（そして中間述語論理も含む）超直観主義述語論理の枠組みにおいて PNFT の様子を考察して、なんとか見通しの良い眺望を得たいと考えた。この覚書は、そうした希望を胸に山登りを始めてみた、というお話のささやかな報告である。筆者よりも健脚な方が興味を持たれ、どんどん先に立って登っていただき、逆に道案内していただけると嬉しい[6]。

本稿は、次のような構成になっている。まず、次の第 2 節で基本的な定義と既知の結果を概観する。第 3 節で本稿のささやかな結果を示し、第 4 節では今後の研究に向けての注意を幾つか提示する。

---

[3] 一方で、van Dalen[2] の記述は、直観主義的・構成的に解釈した PNFT が「成立するはずがない」ことを言っているともとれる。「任意の論理式 A に対して、PNF である A' が存在して、$A \equiv A'$ が直観主義論理 $\mathbf{H}_*$ で証明可能である」＝「具体的手続き P があって、任意の論理式 A に対して、$P(A)$ は PNF であって、$A \equiv P(A)$ が直観主義論理 $\mathbf{H}_*$ で証明可能である」なる主張が正しければ、確かに PNF 論理式の証明可能性が決定可能であることから、直観主義述語論理の決定不可能性と矛盾する。これは、構成的数学の「弱い反例」(*cf.* 石原 [5]) とよく似た議論に見える。第 4 節の注意 4 も参照してください。

[4] 中間述語論理の常道に従うなら、「ならば」は $\supset$ で表すが、本稿では $\to$ で表す。

[5] もし、もっと簡単な反例や、もっと早い文献があれば、教えていただければ幸甚です。

[6] PNFT の周辺が過疎っているわけではない。例えば、藤原-倉橋 [3] のような最新の研究でも、sub-classical な算術での PNFT が取り扱われていることを指摘しておく。

2　準備

まず、考察の舞台となる超直観主義述語論理の定義を準備しよう。簡単のため、[7, §1.1] の定義の記述をほぼそのまま引用する。

定義 2.1. 言語として pure first-order language $\mathscr{L}$ を用いる。この $\mathscr{L}$ は、論理記号として $\vee$ (disjunction), $\wedge$ (conjunction), $\rightarrow$ (implication), $\neg$ (negation), そして量化子として $\exists$ (existential quantifier) と $\forall$ (universal quantifier) を持つ。また、可算個の個体変数と、各 $m < \omega$ について m 変数 (m-ary) の述語変数 (predicate variable) を持つ。ここで、0 変数の述語記号は、命題変数のことである。注意すべきは、$\mathscr{L}$ には個体定数も関数記号もないし、等号 (=) も持たないことである。

定義 2.2. $\mathscr{L}$ の論理式の集合 $\mathbf{L}$ は、以下の 3 条件を満たすとき、**中間述語論理** (intermediate predicate logic) であるという。

(Q1) $\mathbf{L}$ は、直観主義述語論理 $\mathbf{H}_*$ で証明可能な論理式をすべて含む。
(Q2) $\mathbf{L}$ に含まれる論理式は、すべて古典述語論理で証明可能である。
(Q3) $\mathbf{L}$ は、以下の 3 つの推論規則に関して閉じている:
modus ponens (from A and $A \rightarrow B$, infer B), generalization (from A, infer $\forall x A$), uniform substitution[7] for predicate variable.

$\mathscr{L}$ の論理式の集合 $\mathbf{L}$ が (Q1) と (Q3) を満たすとき、**超直観主義的述語論理** (super-intuitionistic predicate logic) という。

この定義は、論理 $\mathbf{L}$ と、$\mathbf{L}$ で証明可能な論理式の全体 $\{A : \mathbf{L} \vdash A\}$ とを同一視したものになっている。そこで今後は、「論理式 A は論理 $\mathbf{L}$ で証明可能」「$\mathbf{L} \vdash A$」などの表現を特に断らずに使う。また、述語論理 $\mathbf{L}$ と論理式 A (論理式の集合 S) に対して、$\mathbf{L}$ と $\{A\}$ ($\mathbf{L}$ と S, resp.) を含む最小の超直観主義的述語論理を $\mathbf{L} + A$ ($\mathbf{L} + S$, resp.) で表す。

つづいて、本稿の主題である PNFT にかかわる定義を与える。

定義 2.3. (1) 論理式 A が **prenex normal form (PNF) である**、あるいは **PNF 論理式である**、とは、quantifiers の列 $Q_1 x_{i_1}, \ldots, Q_n x_{i_n}$ (Q_j は $\forall$ または $\exists$) と quantifier-free の B が存在して、A が $Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} B$ と書けていることとする。本稿では、この n を A の**頭の重さ**と呼ぼう。

(2) 超直観主義述語論理 $\mathbf{L}$ が**論理式 A の PNF を与える**、とは、PNF 論理式 B が存在して、$\mathbf{L} \vdash A \equiv B$ となることとする。このとき、B は $\mathbf{L}$ における A の PNF(のひとつ) である、と言おう。

(3) $\mathbf{L}$ が、**prenex 特性を持つ**とは、任意の論理式 A に対して、$\mathbf{L}$ が A の PNF を与えること、すなわち、$\mathbf{L}$ で PNFT が成立することである。

[7]Church [1] の Š を参照。

事実 2.4. 古典述語論理は、*prenex* 特性を持つ。

上記の事実 2.4 はあまりにもよく知られていることであるが、この後の議論の準備として、すこし丁寧に記述しておく。

定義 2.5. (cf. 梅沢 [10]) p を 1 変数述語記号、q を命題変数とする。閉論理式 D, EK°, F, G を次で定める。いずれも古典述語論理で証明可能である。

$$\begin{aligned} D:&\ \ \forall x(p(x)\vee q)\to\forall xp(x)\vee q\\ EK^\circ:&\ \ \neg\forall xp(x)\to\exists x\neg p(x)\\ F:&\ (\forall xp(x)\to q)\to\exists x(p(x)\to q)\\ G:&\ (q\to\exists xp(x))\to\exists x(q\to p(x))\end{aligned}$$

古典述語論理では、任意の論理式に対して、それと同値な PNF 論理式が存在する。もっと直截に、各論理式 A を、古典述語論理における A の PNF となる PNF 論理式 B に書き換える手続きが構築できる。具体的には、上記の定義の論理式などを公理型として使って (q に x が自由に出現しない、という公理型とみなして)、量化子が外に出るように同値変形で書き換えを行い、PNF 論理式に至るまで続ける。そして、prenex 特性を考えるうえで F と G が重要である。

補題 2.6 (*cf.* 梅沢 [10])**.** (1) $\mathbf{H}_*+F\vdash D$ かつ $\mathbf{H}_*+F\vdash EK^\circ$
(2) $\mathbf{H}_*+F\nvdash G$
(3) $\mathbf{H}_*+G\nvdash D$ かつ $\mathbf{H}_*+G\nvdash EK^\circ$ (従って、$\mathbf{H}_*+G\nvdash F$)

すなわち、F と G があれば、古典述語論理と同様の方法で PNFT が示せる。直観主義述語論理 $\mathbf{H}_*$ では、定義 2.5 の論理式はどれも証明不可能である。よって、古典述語論理と同様な議論はできない。より強く:

命題 2.7. $\mathbf{H}_*$ は、*prenex* 特性を持たない。

古典論理の prenex 特性を示す際の議論が適用できないことは明らかである。しかし、いかなる PNF 論理式とも $\mathbf{H}_*$ で同値にならない論理式を例示して見せることは、私には難しかった。いろいろ文献を探したところ、梅沢 [11] において、次の補題 2.8(1) が極めて巧みに証明されており、これを見れば命題 2.7 が正しいことがわかる。

補題 2.8. (1) (梅沢 [11]) 超直観主義述語論理 $\mathbf{L}$ が $\forall xp(x)\to q$ の *PNF* を与えるならば、ある n $(n=0,1,2,\dots)$ が存在して、

$$\mathbf{L}\vdash(\forall xp(x)\to q)\to\exists x_1\cdots\exists x_n(p(x_1)\wedge\cdots\wedge p(x_n)\to q)$$

(2) 任意の n $(n=0,1,2,\dots)$ に対して、

$$\mathbf{H}_*\nvdash(\forall xp(x)\to q)\to\exists x_1\cdots\exists x_n(p(x_1)\wedge\cdots\wedge p(x_n)\to q)$$

補題 2.8(2) は、意味論で容易に（次節の結果からも直ちに）得られる。
この後の議論のために、補題 2.8(1) をより詳細な形で紹介しよう。

定義 2.9. p を 1 変数述語記号、q を命題変数とする。また、$x_1, \dots, x_n, \dots$ を相異なる個体変数とする。各 n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ に対して、$F_n^\forall$ と $F_n^\exists$ を次で定める[8]。

$$F_n^\forall : (\forall x p(x) \to q) \to \exists x_2 \cdots \exists x_n (p(x_1) \land \cdots \land p(x_n) \to q)$$
$$F_n^\exists : (\forall x p(x) \to q) \to \exists x_1 \cdots \exists x_n (p(x_1) \land \cdots \land p(x_n) \to q)$$

注意 2.10. (1) 特に、$F_0^\forall$ と $F_0^\exists$ は、$(\forall x p(x) \to q) \to q$ であるから、公理型として見れば、矛盾した論理の公理になる。$F_1^\exists$ は、定義 2.5 の F と同じである。$F_1^\forall$ は、具体的に書くと $(\forall x p(x) \to q) \to (p(x_1) \to q)$ である。これは、公理型として $\exists x p(x) \to \forall x p(x)$ と同等である。（量化子消滅公理と呼ばれることがある。*cf.* S[8]）
(2) $F_n^\forall \to F_n^\exists$ および $F_n^\exists \to F_{n+1}^\forall$ は $\mathbf{H}_*$ で証明可能である。

補題 2.11. n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ に対して、
(1) $\mathbf{H}_* \vdash \exists x_2 \cdots \exists x_n (p(x_1) \land \cdots \land p(x_n) \to q) \to (\forall x p(x) \to q)$
(2) $\mathbf{H}_* \vdash \exists x_1 \cdots \exists x_n (p(x_1) \land \cdots \land p(x_n) \to q) \to (\forall x p(x) \to q)$

よって、$\mathbf{L} \vdash F_n^\forall$ または $\mathbf{L} \vdash F_n^\exists$ である $\mathbf{L}$ は、$\forall x p(x) \to q$ の PNF を与える。梅沢 [11] では、この逆を純統語論的に示して補題 2.8(1) を完成させた。

定理 2.12 (梅沢 [11]). 超直観主義述語論理 $\mathbf{L}$ が $\forall x p(x) \to q$ の *PNF* を与え、$\mathbf{L}$ における $\forall x p(x) \to q$ の *PNF* が頭の重さ m のもの: $Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m A$ *(A is quantifier-free)* であるならば、ある $n \leq m$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が存在して、$\mathbf{L} \vdash F_n^\exists$ または $\mathbf{L} \vdash F_{n+1}^\forall$

注意 2.10(2) から、$\mathbf{L} \vdash F_n^\exists$ であれば $\mathbf{L} \vdash F_{n+1}^\forall$ であることに注意しておこう。同様にして、$F_n^\forall$ または $F_n^\exists$ は、prenex 特性に次の補題を介して関係することが解る。

補題 2.13 (梅沢 [11]). n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ に対して、
(1) $\mathbf{H}_* + F_n^\exists \vdash D$
(2) $\mathbf{H}_* + F_n^\exists \vdash \neg \forall x p(x) \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n \neg (p(x_1) \land \cdots \land p(x_n))$

従って、$\mathbf{L} \vdash F_n^\forall$ または $\mathbf{L} \vdash F_n^\exists$ であれば、$\mathbf{L}$ では D と EK° とを使う PNFT の証明のステップは、古典論理とほぼ同様に実行できる。
完全な PNFT の成立のためには、$q \to \exists x p(x)$ の取り扱いもしなくてはならない。その為に、$F_n^\forall, F_n^\exists$ の類推で次のように定めよう。

定義 2.14.

$$G_n^\forall : (q \to \exists x p(x)) \to \exists x_2 \cdots \exists x_n (q \to p(x_1) \lor \cdots \lor p(x_n))$$
$$G_n^\exists : (q \to \exists x p(x)) \to \exists x_1 \cdots \exists x_n (q \to p(x_1) \lor \cdots \lor p(x_n))$$

[8] 梅沢 [11] では、$F_n^\exists$ と $F_{n+1}^\forall$ が、それぞれ F_n と F_{n*} と書かれているが、この後の記述を簡単にするため、本稿ではこうしておく。命題 3.3 にもう少し見やすい同等な公理型を示してある。

注意 2.10 と同様に、$G_0^\forall$ と $G_0^\exists$ は $(q \to \exists x p(x)) \to \neg q$ であって、矛盾した論理の公理となり、$G_1^\forall$ は量化子消滅公理と同等、$G_1^\exists$ は G である。また、$G_n^\forall \to G_n^\exists$ と $G_n^\exists \to G_{n+1}^\forall$ は $\mathbf{H}_*$ で証明可能である。次は容易に示すことができる。

命題 2.15. $\mathbf{L}$ を超直観主義述語論理とする。ある n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が存在して

$$\mathbf{L} \vdash G_n^\forall \ or\ \mathbf{L} \vdash G_n^\exists$$

であれば、$\mathbf{L}$ は $q \to \exists x p(x)$ の *PNF* を与える。

この命題 2.15 により、$F_n^\forall, F_n^\exists$ のどちらかと $G_n^\forall, G_n^\exists$ のどちらかを $\mathbf{H}_*$ に公理として付加すれば、prenex 特性を持つ超直観主義述語論理が得られる。そこで、やや短絡的でお手軽ではあるが、次のように定義してみる。

$$\mathbf{L}_n^\forall = \mathbf{H}_* + F_n^\forall + G_n^\forall$$
$$\mathbf{L}_n^\exists = \mathbf{H}_* + F_n^\exists + G_n^\exists$$

すると $\mathbf{L}_n^\forall$、$\mathbf{L}_n^\exists$ はすべて prenex 特性を持つ。また、注意 2.10 と定義 2.14 の注意から直ちに次の相互関係が得られる。

命題 2.16 (*cf.* 梅沢 [11])**.**

$$\mathbf{L}_0^\forall = \mathbf{L}_0^\exists \supsetneq \mathbf{L}_1^\forall \supsetneq \mathbf{L}_1^\exists \supseteq \mathbf{L}_2^\forall \supseteq \mathbf{L}_2^\exists \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{L}_n^\forall \supseteq \mathbf{L}_n^\exists \supseteq \mathbf{L}_{n+1}^\forall \supseteq \mathbf{L}_{n+1}^\exists \supseteq \cdots$$

ここで、各論理は、そこで証明可能な論理式全体の集合と同一視して考えている。従って、$\mathbf{L}_1 \supseteq \mathbf{L}_2$ は、「$\mathbf{L}_2$ で証明可能な論理式はすべて $\mathbf{L}_1$ で証明可能」を意味する。$\mathbf{L}_0^\forall$ と $\mathbf{L}_0^\exists$ は矛盾した論理であり、$\mathbf{L}_1^\forall$ は、$\mathbf{H}_*$ で量化子を無視してしまった体系になる。

3 ちょっとした結果

この節でまず述べる結果は、先の命題 2.16 の $\supseteq$ がすべて proper inclusion $\supsetneq$ であることである。

命題 3.1.

$$\mathbf{L}_0^\forall = \mathbf{L}_0^\exists \supsetneq \mathbf{L}_1^\forall \supsetneq \mathbf{L}_1^\exists \supsetneq \mathbf{L}_2^\forall \supsetneq \mathbf{L}_2^\exists \supsetneq \cdots \supsetneq \mathbf{L}_n^\forall \supsetneq \mathbf{L}_n^\exists \supsetneq \mathbf{L}_{n+1}^\forall \supsetneq \mathbf{L}_{n+1}^\exists \supsetneq \cdots$$

これが解ると、梅沢 [11] の証明と組み合わせて、実はもう少しマシなことが解る。

系 3.2. $\mathbf{H}_* + F_2^\exists + G_2^\exists + \forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x A(x)$ は *prenex* 特性を持ち、$\forall x p(x) \to q$ の *PNF* を与えるが、その *PNF* は Σ_1 論理式ではない。

以下、この命題の証明をする。そのため、$F_n^\forall$ や $G_n^\forall$ たちと公理型として同等で、より扱いやすいものを導入する。

命題 3.3. $n = 0, 1, , \dots$ とする。公理型として、
(1) $F_n^\forall$ は $\forall x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_n) \to \forall y p(y))$ と同等
(2) $F_n^\exists$ は $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_n) \to \forall y p(y))$ と同等
(3) $G_n^\forall$ は $\forall x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\exists y p(y) \to p(x_1) \vee \cdots \vee p(x_n))$ と同等
(4) $G_n^\exists$ は $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\exists y p(y) \to p(x_1) \vee \cdots \vee p(x_n))$ と同等

証明. (1), (2): $F_n^\forall$ と $F_n^\exists$ において、$\forall x p(x)$ を q に代入すれば、これらが得られる。一方、sequent calculus **LJ** で次が証明可能である:

$$p(u_1) \wedge \cdots \wedge p(u_n) \to \forall y p(y), \forall y p(y) \to q \Rightarrow p(u_1) \wedge \cdots \wedge p(u_n) \to q$$

(ここで、 $\Rightarrow$ は **LJ** sequent の真ん中の区切り。) よって、これらの論理式は、それぞれ $F_n^\forall$ と $F_n^\exists$ を導く。
(3) と (4) も同様に示せる。 $\square$

定義 3.4. 各 $n = 1, 2 \dots$ に対して、半順序集合 $\mathbf{W}_n = (\{0, 1, \dots, n\}, \leq)$ を以下で定める。

$$i \leq j \quad \text{if and only if} \begin{cases} i = 0 \\ \ \text{or} \\ i = j \end{cases}$$

図で描くと次の様になる。

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 & \cdots & n \\
& 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{W}_n$

$\mathcal{K}_n = (\mathbf{W}_n, \{1, 2, \dots, n\})$ $(n = 1, 2, \dots)$ および $\mathcal{K}_n^+ = (\mathbf{W}_n, \{0, 1, 2, \dots, n\})$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ をそれぞれ、定領域 $\{1, \dots, n\}$ と $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ を持つ Kripke frames とする。直接計算すれば、次のふたつの補題を得る。

補題 3.5. (1) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して、$F_n^\forall$ と $G_n^\forall$ は $\mathcal{K}_n$ で *valid* である。
(2) 各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、$F_n^\exists$ と $G_n^\exists$ は $\mathcal{K}_{n+1}$ で *valid* ではない。

証明. (1): 任意の付値 $\models$ と任意の $i \in \mathbf{W}_n$ について、$i \models p(1) \wedge \cdots \wedge p(n) \equiv \forall y p(y)$ かつ $i \models p(1) \vee \cdots \vee p(n) \equiv \exists y p(y)$ であることから、明らか。

(2): $F_n^{\exists}$ が $\mathcal{K}_{n+1}$ で valid ではないことが、次の付値 $\models$ を使えば解る。

$$i \models p(j) \text{ if and only if } 0 \neq i \neq j$$

$G_n^{\exists}$ も同様の議論で示せる。 □

補題 3.6. (1) 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して、$F_n^{\exists}$ と $G_n^{\exists}$ は $\mathcal{K}_n^{+}$ で *valid* である。
(2) 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して、$F_n^{\forall}$ と $G_n^{\forall}$ は $\mathcal{K}_n^{+}$ で *valid* ではない。

証明. (1): 直接的にチェックして確かめられる。
(2): $G_n^{\forall}$ が $\mathcal{K}_n^{+}$ で valid ではないことが、次の付値 $\models$ を使えば解る。

$$i \models p(j) \text{ if and only if } 0 \neq i = j$$

$F_n^{\forall}$ も同様である。 □

系 3.7. $n = 1, 2, \ldots$ とする。
(1) $\mathbf{H}_* + F_n^{\exists} \subseteq \mathbf{L} \subseteq L(\mathcal{K}_n^{+})$ であるような $\mathbf{L}$ は $\forall x p(x) \to q$ の *PNF* を与えるが、$\mathbf{L}$ における $\forall x p(x) \to q$ の *PNF* の頭の重さは n 以上である。
(2) $\mathbf{H}_* + F_n^{\exists} + G_n^{\exists} \subseteq \mathbf{L} \subseteq L(\mathcal{K}_n^{+})$ であるような $\mathbf{L}$ は、*prenex* 特性を持ち、$\mathbf{L}$ における $\forall x p(x) \to q$ の *PNF* の頭の重さは n 以上である。

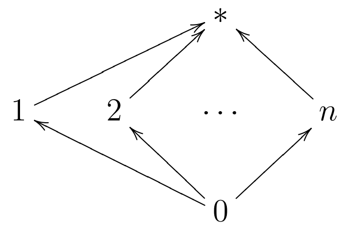
証明. (1): $\mathbf{L} \vdash F_n^{\exists}$ ゆえ、$\mathbf{L}$ が $\forall x p(x) \to q$ の PNF として $\exists x_1 \cdots \exists x_n (p(x_1) \wedge \cdots \wedge p(x_n) \to q)$ を与え、その頭の重さは n である。
$\mathbf{L}$ が $\forall x p(x) \to q$ の PNF として、頭の重さ m $(m < n)$ の PNF 論理式を与えると仮定する。梅沢の定理 (2.12) より、k $(k \leq m)$ が存在して、$\mathbf{L} \vdash F_{k+1}^{\forall}$ である。$k + 1 \leq n$ ゆえ、$\mathbf{L} \vdash F_n^{\forall}$ となるが、補題 3.6 より $L(\mathcal{K}_n^{+}) \nvdash F_n^{\forall}$ ゆえ、不合理である。
(2) は (1) からあきらか。 □

系 3.2 の証明. $L(\mathcal{K}_n^{+}) \vdash \forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x A(x)$ であることより、上記の証明から直ちに従う。

4 今後の考察に向けて

この節では、今後の考察に向けて幾つかの注意を述べる。

1. $\mathcal{K}_n^{+}$ では、DNS: $\forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x A(x)$ のほかにもいくつかの Omniscience principles が valid になる。例えば、Markov's principle: $\forall x(A(x) \vee \neg A) \to \neg\neg\exists x A(x) \to \exists x A(x)$ がそうである。系 3.2 の論理には、こうした Omniscience principles を加えたものを取ることができる。また、$\mathbf{W}_n$ の代わりに次の $\mathbf{W}_n^*$ をとることで、WEM: $\neg A \vee \neg\neg A$ や DML: $\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$ を $\mathbf{H}_*$ に付加したうえで、前節と同様の議論ができる。



$\mathbf{W}_n^*$

2. 出来れば、$\mathbf{H}_* + F_n^\exists + G_m^\exists$ のような異なった添え字 n, m のものを付加した論理なども考えたかったが、今回は手が出なかった。そもそもたいして新しいことが解ったわけではないのに「今回は」というのは、おこがましいが...。次の様なことは解っている。

命題 4.1. (1) 各 $n = 1, 2 \ldots$ に対して、$\mathbf{H}_* + F (= \mathbf{H}_* + F_1^\exists) \nvdash G_n^\exists$
(2) 各 $n = 1, 2 \ldots$ に対して、$\mathbf{H}_* + G (= \mathbf{H}_* + G_1^\exists) \nvdash F_n^\exists$

具体的な問題を挙げておくと:

Problem 4.2. (1) $\mathbf{H}_* + F_n^\exists + G_m^\exists \vdash F_{n-1}^\exists$ であるか?
(1) $\mathbf{H}_* + F_n^\exists + G_m^\exists \vdash G_{m-1}^\exists$ であるか?

3. 直観主義論理 $\mathbf{H}_*$ と命題部分が一致するような超直観主義述語論理を **PEI** (直観主義論理の述語拡大, predicate extension of intuitionistic logic) と呼ぶことにしよう。非可算個無限の PEI が存在することが知られている。「$\mathbf{H}_*$ と命題部分が一致」という条件からすれば、PEI の中には、論理学的観点から見て $\mathbf{H}_*$ に類似の性質を持つものが多いとも考えられるし、当然、異なる性質を持つものもあるであろう。PEI たちと $\mathbf{H}_*$ との類似性や差異は、量化子のふるまいに顕著に現れるであろうと予想される[9] ので、非古典述語論理研究の観点から興味深い。このメモで扱った公理型は、$F_0^\forall$, $F_0^\exists$, $G_0^\forall$, $G_0^\exists$ を除いて、どれをどれだけ $\mathbf{H}_*$ に付加しても PEI になる。PNFT は、古典述語論理に特徴的な量化子に関するメタ定理で $\mathbf{H}_*$ では成立しないが、その PNFT が成立する、という古典論理に類似の特性を持つ PEI が無限個存在することが解ったことになる。そして、PNFT が成立する PEI $\mathbf{L}$ が与えられたとして、各論理式 A に対して "$\mathbf{L}$ が与える A の prenex normal forms" となる PNF 論理式は、$\mathbf{L}$ に依存して変化する。つまり、ひとくちに「PNFT が成立する」と言っても、いろいろな成立の仕方があることになる。こうした観察が研究の進展につながると嬉しい。

4. 第 2 節の次の命題をもう一度見よう。

---

[9]例えば、PEI の中には、直観主義論理の構成性を表すとされる disjunction and existence properties について、両方を持つもの・一方のみを持つもの・どちらも持たないものが非可算無限個存在することが解っている (*cf.* S[9])。

命題 2.15.(再掲) $\mathbf{L}$ を超直観主義述語論理とする。ある n ($n = 0, 1, 2, \dots$) が存在して

$$\mathbf{L} \vdash G_n^{\forall} \text{ or } \mathbf{L} \vdash G_n^{\exists}$$

であれば、$\mathbf{L}$ は $q \to \exists x p(x)$ の PNF を与える。

もし、この命題 2.15 の逆が、梅沢の定理 (補題 2.8) の $F_n^{\forall}, F_n^{\exists}$ のときのように成立するのであれば、次の 2 条件は同値である:

(1) $\mathbf{L}$ で PNFT が成立する。($\mathbf{L}$ は prenex 特性を持つ。)
(2) ある m, n について $\mathbf{L} \vdash F_m^{\exists}$ かつ $\mathbf{L} \vdash G_n^{\exists}$

そして、$\mathbf{L} \vdash F_m^{\exists}$ と $\mathbf{L} \vdash G_n^{\exists}$ があれば、古典述語論理の場合の真似をして、すべての論理式をステップ・バイ・ステップで $\mathbf{L}$ における PNF に書き換える具体的手続き (仮に $P_{m,n}$ と呼ぼう) が与えられる。すると、「命題 2.15 の逆が成立する」ならば:

予想？夢想？　超直観主義述語論理 $\mathbf{L}$ で PNFT が成立するならば、ある m, n が存在して、$\mathbf{L}$ での PNF への具体的な書き換え手続き $P_{m,n}$ がある。すなわち、超直観主義述語論理における PNFT は、常に constructive な方法で与えられる[10]。

ということになる。そうだとすれば、脚注 3 で示した議論は、本質を捉えたのもであったことになる。さて、真実はどうなのであろうか？

参考文献

[1] Church, A., **Introduction to Mathematical Logic I**, Princeton University Press, Princeton (1956).

[2] van Dalen, **Logic and Structure**, 5th ed. Univeristext, Springer, London, 2013.

[3] Fujiwara, M. and Kurahashi, T., *Prenex normal form theorems in semi-classical arithmetic*, Journal of Symbolic Logic, 86(2021), no.3, 112–1153.

[4] Gödel, K., *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), 349–360.

[5] 石原 哉, 構成的数学とその周辺 – 解析学を中心として –, 1997 年日本数学会秋季総合分科会, 総合講演・企画特別講演アブストラクト, pp.18–33. インターネットで入手可能: URL= `https://www.jstage.jst.go.jp/article/emath1996/1997/Autumn-Meeting1/1997_Autumn-Meeting1_18/_pdf/-char/ja`

[10] 言うまでもなく、これらの m, n が構成的に求められるかどうか（言い換えると、どの $P_{m,n}$ が適用されるのかが構成的に決められるのか）は、不明であるが。

[6] Moschovakis, Joan, *Intuitionistic Logic*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = `https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/logic-intuitionistic/` (2022 年 7 月 1 日参照)

[7] 鈴木信行, 中間述語論理における選言特性と存在特性および Kripke 完全性に関する注意, **京都大学数理解析研究所講究録** No. 2150 (2019), pp. 56–65. `https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/255056/1/2150-05.pdf`

[8] Suzuki, N.-Y., *A Negative Solution to Ono's Problem P52: Existence and Disjunction Properties in Intermediate Predicate Logics*, In: Galatos, N., Terui, K. (eds) Hiroakira Ono on Substructural Logics. Outstanding Contributions to Logic, vol 23. Springer, Cham. `https://doi.org/10.1007/978-3-030-76920-8_9`

[9] Suzuki, N.-Y., *A note on disjunction and existence properties in predicate extensions of intuitionistic logic — An application of Jankov formulas to predicate logics —* , to appear in: Citkin, A., Vandoulakis, I. (eds) V.A. Yankov on Non-Classical Logics, History and Philosophy of Mathematics, Outstanding Contributions to Logic, vol 24. Springer.

[10] Umezawa, T., *On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic*, Journal of Symbolic Logic, 24(1959),141–153,

[11] Umezawa, T., *Prenex normal form of* $\forall x A(x) \supset B$, Reports of the Faculty of Science. Shizuoka University, 23(1989) 1–7.

[12] *Prenex normal form— Wikipedia, The Free Encyclopedia*, URL= `https://en.wikipedia.org/wiki/Prenex_normal_form` (2022 年 7 月 1 日参照)

〒 422–8529
静岡市駿河区大谷 836
静岡大学理学部数学教室
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp

Department of Mathematics
Faculty of Science
Shizuoka University
Ohya 836, Suruga-Ku
Shizuoka, 422–8529
JAPAN
suzuki.nobuyuki@shizuoka.ac.jp