Hilbert Maass形式に対するJacquet-Zagier型レゾルベント跡公式

久家　聖二（九州大学）

Faculty of Mathematics, Kyushu University
Motooka 744, Nishi-ku Fukuoka 819-0395, Japan

概 要

本記事では, パラレルウェイト 0 の Hilbert Maass 形式に対する, Jacquet-Zagier 型と呼ばれる形のレゾルベント跡公式について紹介する. また, その応用の一つとして, Hilbert Maass 形式に付随する対称 2 次 L 関数のある種の非消滅性を証明する.

1　研究の背景

1.1　Eichler-Selberg 跡公式, Zagier の公式

まずは, Jacquet-Zagier 型跡公式を紹介する前に, Eichler-Selberg 跡公式と, それの拡張にあたる Zagier の公式について簡単に紹介する.

$\mathbb{H} = \{x + \sqrt{-1}y \mid x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ を複素上半平面, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ とする. 4 以上の偶数 k に対して, $S_k(\Gamma)$ を重さ k の Γ に対する正則カスプ形式全体の空間とする. $S_k(\Gamma)$ 上の Petersson 内積は

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dxdy}{y^2}, \quad f, g \in S_k(\Gamma)$$

で定義される.

$m \in \mathbb{N}$ に対し, $S_k(\Gamma)$ 上の Hecke 作用素 $T_k(m)$ は

$$T_k(m) : S_k(\Gamma) \ni f(z) \mapsto m^{k-1} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{Z}_{>0}\\ ad=m}} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \in S_k(\Gamma)$$

で与えられる. $T_k(m)$ のトレースの明示公式として, 次の古典的な結果が知られている.

Theorem 1.1 (Eichler-Selberg 跡公式)**.** 4 以上の偶数 k, $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mathrm{Tr}(T_k(m)) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{t\in\mathbb{Z}\\ t^2<4m}} P_k(t, m)H(t^2 - 4m) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{d,d'>0\\ dd'=m}} \min\{d, d'\}^{k-1}$$
$$+\begin{cases} \frac{k-1}{12} m^{\frac{k}{2}-1} & (m \text{ が平方数}) \\ 0 & (m \text{ が平方数でない}) \end{cases}$$

ここで, $H(n)$ は Hurwitz 類数であり, $P_k(t,m)=\frac{\rho^k-\overline{\rho}^k}{\rho-\overline{\rho}}$, ただし ρ は $\rho^2-t\rho+m=0$ を満たす複素数.

Eichler-Selberg 跡公式は次のようにして導出される. 二変数関数 $h_{k,m}:\mathbb{H}^2\to\mathbb{C}$ を

$$h_{k,m}(z,z')=\sum_{ad-bc=m}(czz'+dz'+az+b)^{-k}\qquad(z,z'\in\mathbb{H})$$

で定義すると, $h_{k,m}$ は Hecke 作用素 $T_k(m)$ の核関数になることが分かる. この核関数のスペクトル展開, 幾何展開をそれぞれ考え, 積分

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}h_{k,m}(z,\overline{z})y^k\frac{dxdy}{y^2}$$

を二通りの方法で計算することにより示される.

次に紹介する Zagier の公式 ([11]) は Eichler-Selberg 跡公式の 1 変数パラメーター付きの一般化にあたるものである. Zagier は実解析的 Eisenstein 級数

$$E(z,s)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{y^s}{|mz+n|^s}\qquad(z\in\mathbb{H},\mathrm{Re}(s)>1)$$

を用いて, 積分

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}h_{k,m}(z,\overline{z})E(z,s)y^k\frac{dxdy}{y^2}$$

を考えた. $E(z,s)$ は s に関して, 複素平面全体に有理型に解析接続することができ, $s=1$ での留数は $\frac{\pi}{2}$ という z に依らない定数となるので, 上記の積分の $s=1$ での留数は Eichler-Selberg の跡公式を復元するものになっている. さらに Rankin-Selberg の方法によると, スペクトルサイドは対称 2 次 L 関数

$$L(s,f\times f)=2^{-s-k+1}\pi^{-\frac{3}{2}(s+k-1)}\Gamma(s+k-1)\Gamma(\tfrac{s+1}{2})\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)^2}{n^{s+k-1}}$$

を用いて書くことができる. ここで $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nz}\in S_k(\Gamma)$ は正規化された Hecke 同時固有形式である.

Theorem 1.2 (Zagier([11]))**.** k を 4 以上の偶数, $m\in\mathbb{N}$, $\{f_i\}_{1\le i\le\dim(S_k(\Gamma))}$ を正規化された Hecke 同時固有形式からなる $S_k(\Gamma)$ の直行基底とする. このとき, $2-k<\mathrm{Re}(s)<k-1$ なる $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}C_{k,s}&\sum_{i=1}^{\dim(S_k(\Gamma))}\frac{L(s,f_i\times f_i)}{L(1,f_i\times f_i)}a_{f_i}(m)\\&=m^{k-1}\sum_{t\in\mathbb{Z}}\left\{I(t^2-4m,t;s)+I(t^2-4m,-t;s)\right\}L(s,t^2-4m)\\&\qquad+\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(k+s-1)\zeta(2s)}{2^{2s+k-3}\pi^{s-1}\Gamma(k)}m^{\frac{k-s-1}{2}} & (m\text{ が平方数})\\0 & (m\text{ が平方数でない})\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで, $C_{k,s} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}2^{-s-k+3}\pi^{\frac{s+1}{2}}}{(k-1)\Gamma(\frac{s+1}{2})}$ であり，$\Delta = t^2 - 4m$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{Q}$ の判別式を D, $\Delta = Df^2$ $(f \in \mathbb{N})$ とおいたとき，$I(\Delta, t; s)$ と $L(s, \Delta)$ はそれぞれ

$$I(\Delta, t; s) = \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{y^{k+s-2}}{(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4})^{k-\frac{1}{2}}} dy,$$

$$L(s, \Delta) = \begin{cases} \zeta(2s-1) & (\Delta = 0) \\ L(s, (\frac{D}{\bullet})) \sum_{d|f} \mu(d)(\frac{D}{d})d^{-s}\sigma_{1-2s}(\frac{f}{d}) & (\Delta \neq 0) \end{cases}$$

で与えられる．

Zagier はさらにレベル 1 の Maass 波動形式の場合に同様の公式を証明している ([12])．Zagier の公式の Hilbert モジュラー形式への一般化は水本 ([6]) が行なっており, 狭義類数が 1 の総実代数体上のレベル 1, パラレルウェイト $k \in \prod_{v \in \Sigma_\infty} 2\mathbb{N}$, nebentypus が自明な場合に証明された．さらに高瀬 ([8]) は, 狭義類数が 1 という仮定のまま一般のレベル, ウェイト, nebentypus が原始的という条件の元で水本の公式を一般化した.

1.2 Jacquet-Zagier 型跡公式, 杉山-都築の跡公式

Jacquet と Zagier は, 一般の大域体 F に関する GL_2 の Arthur-Selberg 跡公式を ([11]) のアデール類似の手法によって, 一変数パラメーター付きのものへ一般化した ([4])．彼らは, コンパクト台を持つようなテスト関数 $\varphi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ に対して, $\mathcal{L}^2(\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F))$ 上の右正則表現 R から構成される作用素 $R(\varphi)$ の核関数 $K_\varphi(g, h)$ と, Eisenstein 級数 $E(g, z)$ $(g \in \mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F), z \in \mathbb{C})$ を用いた積分

$$\int_{\mathrm{PGL}_2(F)\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)} K_\varphi(g, g)E(g, z)dz$$

を考えた．前節の話と同様に, $s = 1$ での留数を計算することにより, Arthur-Selberg 跡公式を復元できることが大いに期待できるが, 実際この問題は難しく, 長らく証明されていなかったが, 2019 年にようやく Wu により, 復元できることが証明された ([10]).

さらに, Rankin-Selberg の方法により, スペクトルサイドは, GL_2 の既約カスピダル表現 π に付随する対称 2 次 L 関数 $L(s, \pi; \mathrm{Ad})$ の特殊値を用いて書くことができる．従って, Jacquet-Zagier 型跡公式とは, それを軌道積分の和で表す公式となっている．(ここで, 対称 2 次 L 関数を $L(s, \pi; \mathrm{Ad})$ と書いたのは, GL_2 の保型表現 π から, Gelbart, Jacquet らによって構成された GL_3 の保型表現 $\mathrm{Ad}(\pi)$ の保型 L 関数と一致するからである ([3]).)

Jacquet-Zagier 型跡公式の一つの応用として, 杉山と都築による, Hilbert モジュラー形式への Zagier の公式 ([11]) の一般化が知られている ([7])．彼らは, Hecke 作用素のレゾルベント核と, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現の行列係数によって構成されたテスト関数を用いた．水本 ([6]), 高瀬 ([8]) の公式と異なる点は, 狭義類数に関する仮定が一切ないという点である．Jacquet と Zagier が計算した幾何サイドの公式はコンパクト台を持つような一般のテスト関数に対して計算していたので, 公式も抽象的なものに留まっている．従って, Jacquet-Zagier 型跡公式から既存の跡公式（Zagier,

水本, 高瀬の跡公式）を導くことは別の難しさがあるため, 既存の結果を完全に含んでいるわけではない. 一方で杉山-都築の跡公式は, 幾何サイドの積分の具体的な公式を与えており, 基礎体を有理数体とおくことで Zagier の公式 ([11]) を復元できるものになっている.

また, 彼らは Hilbert モジュラー形式に対する保型表現 π に付随する対称 2 次 L 関数の非消滅性を証明した. これは, 彼らが証明した跡公式から従うスペクトルパラメーターの重み付きの一様分布性から従うものである.

2 主結果

この節では, 講演で述べた主結果である跡公式を明示的に与える. 今回は杉山-都築の跡公式の Hilbert Maass 形式に対する類似を得た. これは, テスト関数に上半平面 $\mathbb{H}$ 上の Laplace 作用素のレゾルベント核を用いることによって導かれる. 杉山-都築の跡公式の場合と異なる点として, Hilbert Maass 形式の場合には, 擬似係数が存在しないため, スペクトルサイドにおける Eisenstein 級数の積分と, 指標の寄与を無視できなくなるというものがあるので, 公式の形もその分複雑になっている.

主結果の説明のため, まず記号を定義する. F を次数 n_F の総実代数体, $\mathfrak{o}$ を F の整数環とする. F の有限素点全体の集合, 無限素点全体の集合をそれぞれ Σ_{fin}, Σ_∞ で表し, $\Sigma_F = \Sigma_{\mathrm{fin}} \cup \Sigma_\infty$ で F の素点全体の集合を表すとする. 各 $v \in \Sigma_F$ に対し, F_v を F の v における完備化, さらに $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の時は $\mathfrak{o}_v$ を F_v の整数環, $\mathfrak{p}_v$ を $\mathfrak{o}_v$ の素イデアル, $q_v = \#(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)$ とおく. F のアデール環を $\mathbb{A}$ で表し, 各 $v \in \Sigma_F$ 毎のモジュラスから定義されるイデールノルム $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$ を考え, その核を $\mathbb{A}^1$ とおく.

次に, Riemann 面 $\mathfrak{X}_v := \begin{cases} \mathbb{C}/4\pi\sqrt{-1}(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z} & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}) \\ \mathbb{C} & (v \in \Sigma_\infty) \end{cases}$ 上の 1 次微分形式 $d\mu_v(s)$ を

$$d\mu_v(s) = \begin{cases} 2^{-1}(\log q_v)(q_v^{\frac{s+1}{2}} - q_v^{\frac{-s+1}{2}})ds & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}) \\ s\ ds & (v \in \Sigma_\infty) \end{cases}$$

で定め, $\mathfrak{X}_v$ 上の正則関数で

- $\alpha(s) = \alpha(-s)$
- $v \in \Sigma_\infty$ のとき, 任意の $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\ell > 0$ に対して $|\alpha(s)| \ll_{a,b,\ell} (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-\ell}$, $\mathrm{Re}(s) \in [a, b]$

を満たすもの全体の空間を $\mathcal{A}_v$ とし, $\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty} = \prod_{v \in S\cup\Sigma_\infty} \mathfrak{X}_v$, $\mathcal{A}_{S,\Sigma_\infty} = \bigotimes_{v \in S\cup\Sigma_\infty} \mathcal{A}_v$ とおく.

non-zero なイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$ に対して, 有限素点からなる部分集合 $S(\mathfrak{a}) = \{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} \mid \mathfrak{a}\mathfrak{o}_v \neq \mathfrak{o}_v\}$ を定義する. ここから最後まで, 以下を仮定する.

- 素数 2 は F で完全分解する.
- イデアル $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{o}$ は, non-zero かつ square-free で, $S(\mathfrak{n}) \cap S(2\mathfrak{o}) = \emptyset$ を満たす.
- $S \subset \Sigma_{\mathrm{fin}}$ は有限集合で, $S \cap S(\mathfrak{n}) = \emptyset$ かつ $S \cap S(2\mathfrak{o}) = \emptyset$ を満たす.

各 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して, $\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}_v)=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)\;\middle|\;c\in\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v\right\}$ とおく. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスピダル表現からなる集合 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ を

$$\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})=\left\{\pi\cong\otimes'_{v\in\Sigma_F}\pi_v\;\middle|\;\pi_v^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}_v)}\neq\{0\}\ (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}),\ \pi_v^{SO(2)}\neq\{0\}\ (v\in\Sigma_\infty)\right\}$$

で定義する. $v\in\Sigma_F$ と擬指標 $\chi:F_v\to\mathbb{C}^\times$ に対して, $Z_v\backslash G_v$ の表現 $I(\chi)$ を, 一般主系列表現 $\mathrm{Ind}_{B_v}^{G_v}(\chi\boxtimes\chi^{-1})$ で定める.

既約カスピダル表現 $\pi\cong\otimes'_{v\in\Sigma_F}\pi_v\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ の導手を $\mathfrak{f}_\pi$ とおくと, 各 $v\in\Sigma_F-S(\mathfrak{f}_\pi)$ に対して,

$$\pi_v\cong\begin{cases}I\left(|\cdot|_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}\right) & (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}-S(\mathfrak{f}_\pi))\\ I\left(|\cdot|_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}\right)\ \text{or}\ I\left(\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}\right) & (v\in\Sigma_\infty)\end{cases},$$

を満たすような複素数 $\nu_v(\pi)\in\mathfrak{X}_v^{0+}$ を取ることができる. ここで, $\mathfrak{X}_v^{0+}$ は $\mathfrak{X}_v$ の部分集合で,

$$\mathfrak{X}_v^{0+}=\begin{cases}\sqrt{-1}[0,2\pi(\log q_v)^{-1}]\cup(\{0,2\pi\sqrt{-1}(\log q_v)^{-1}\}+(0,1)) & (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}})\\ \sqrt{-1}\mathbb{R}_+\cup(0,1) & (v\in\Sigma_\infty)\end{cases}$$

で定義される. Ramanujan-Petersson 予想では, $\nu_v(\pi_v)$ は全て虚軸上に存在するとされているが, 今日ではまだ分かっていない.

主結果の説明に入る. $|\mathrm{Re}(z)|<1$ を満たす $z\in\mathbb{C}$ と, $\alpha=\otimes_{v\in S\cup\Sigma_\infty}\alpha_v\in\mathcal{A}_{S,\Sigma_\infty}$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\mathrm{cusp}}(\alpha|\mathfrak{n};z)=&C^{(z)}(\mathfrak{n})\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})}W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)\frac{L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})}{L(1,\pi;\mathrm{Ad})}\alpha(\nu_{S,\Sigma_\infty}(\pi)),\\ \mathbb{I}_{\mathrm{Eis}}(\alpha|\mathfrak{n};z)=&\frac{\mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times)^{-1}}{8\pi\sqrt{-1}}\sum_{\chi\in\Xi}\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}}\mathbb{I}_{\mathrm{Eis},\chi}(\alpha;u,z)du,\\ \mathbb{I}_{\mathrm{res}}(\alpha|\mathfrak{n};z)=&\frac{1}{2}D_F^{\frac{z}{4}}\sum_{\substack{\chi\in\Xi\\ \chi^2=1}}\left\{\mathbb{I}_{\mathrm{res},\chi}^0(\alpha;z)+\mathbb{I}_{\mathrm{res},\chi}(\alpha;-z)\right\}\end{aligned}$$

とおく. ここで, $\nu_{S,\Sigma_\infty}(\pi)=(\nu_v(\pi_v))_{v\in S\cup\Sigma_\infty}\in\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}$, Ξ は Hecke 指標 $\chi=\prod_{v\in\Sigma_F}\chi_v$ の集合で, 全ての $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ で不分岐なもの全体, D_F は $F/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値,

$$C^{(z)}(\mathfrak{n})=\frac{(-1)^{\#S}}{2}D_F^{z-\frac{3}{2}}\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}(1+q_v)^{-1},$$

$$W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)=\mathrm{N}(\mathfrak{f}_\pi)^{\frac{z-1}{2}}\prod_{v\in S(\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\pi^{-1})}\left(1+\frac{(q_v^{\frac{z}{2}}+q_v^{-\frac{z}{2}})(q_v^{\frac{1}{2}}+q_v^{-\frac{1}{2}})-(q_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}+q_v^{-\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}})^2}{(q_v^{\frac{1}{2}}+q_v^{-\frac{1}{2}})^2-(q_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}+q_v^{-\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}})^2}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{\mathrm{Eis},\chi}(\alpha; u, z) \\
&= (-1)^{\# S} 2^{d_F} D_F^{z-2} \frac{\zeta_F(\frac{z+1}{2}) L_F(\frac{z+1}{2}+u, \chi^2) L_F(\frac{z+1}{2}-u, \chi^{-2})}{L_F(1+u,\chi^2) L_F(1-u,\chi^{-2})} \\
&\quad \times \prod_{v \in S(\mathfrak{n})} \left[(q_v^{\frac{1}{2}} - q_v^{-\frac{1}{2}})(1-q_v^{-\frac{3}{2}}) + (q_v^{-\frac{1}{2}} + q_v^{-1}) \left\{ q_v^{\frac{z}{2}} + q_v^{-\frac{z}{2}} - q_v^{-u}\chi_v(\varpi_v)^2 - q_v^{u}\chi_v(\varpi_v)^{-2} \right\} \right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times (1+q_v)^{-\frac{3}{2}} L_v(1+u, \chi_v^2) L_v(1-u, \chi_v^{-2}) \\
&\quad \times \prod_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \alpha_v(u + 2a(\chi_v)), \qquad \left(a(\chi_v) \text{ は, } \chi_v(x) = \pm |x|_v^{a(\chi_v)}, x \in F_v \text{ で定まる数} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{I}_{\mathrm{res},\chi}(\alpha; z) = (-1)^{\# S} 2^{d_F} D_F^{\frac{z}{4}-1} \frac{\zeta_F(z+1)}{\zeta_F(\frac{z+3}{2})} \prod_{v \in S(\mathfrak{n})} \frac{(1-q_v^{-1})(1+q_v^{-\frac{z+1}{2}})}{q_v+1} \zeta_v(\tfrac{z+3}{2}) \prod_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \alpha_v(\tfrac{z+1}{2})
$$

としている. また, $\zeta_F(s)$, $L_F(s,\chi)$ はそれぞれ完備化された Dedekind ゼータ関数, Hecke-L 関数であり, $\zeta_v(s)$ と $L_v(s,\chi)$ はそれぞれ $\zeta_F(s)$ と $L_F(s,\chi)$ の v-因子である. $\mathbb{I}_{\mathrm{cusp}}$, $\mathbb{I}_{\mathrm{Eis}}$, $\mathbb{I}_{\mathrm{res}}$ はスペクトルサイドに現れる項であり, それぞれカスプ形式, Eisenstein 級数の積分, Eisenstein 級数の留数の寄与を表している.

幾何サイドを記述するために, 以下の関数を導入する.
$\mathrm{Re}(s) > \frac{\mathrm{Re}(z)-1}{2}$ を満たす $z, s \in \mathbb{C}$ と, $\epsilon \in \{0,1\}$, $\delta, a \in F_v^\times$, $\alpha = \otimes_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \alpha_v \in \mathcal{A}_{S,\Sigma_\infty}$ に対して,
(i) $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ のとき,

- $\mathcal{O}_{v,\epsilon}^{\delta,(z)}(a) = \frac{\zeta_v(-z)}{L_v(\frac{-z+1}{2}, \varepsilon_\delta)} \left(\frac{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1+q_v} \right)^{\epsilon} |a|_v^{\frac{-z+1}{4}} + \frac{\zeta_v(z)}{L_v(\frac{z+1}{2}, \varepsilon_\delta)} \left(\frac{1+q_v^{\frac{-z+1}{2}}}{1+q_v} \right)^{\epsilon} |a|_v^{\frac{z+1}{4}}$
- $\mathcal{S}_v^{\delta,(z)}(s;a) = \begin{cases} -q_v^{-\frac{s+1}{2}} \frac{\zeta_v(s+\frac{z+1}{2})\zeta_v(s+\frac{-z+1}{2})}{L_v(s+1,\varepsilon_\delta)} |a|_v^{\frac{s+1}{2}} & (|a|_v \le 1) \\ -q_v^{-\frac{s+1}{2}} \left\{ \frac{\zeta_v(-z)\zeta_v(s+\frac{z+1}{2})}{L_v(\frac{-z+1}{2},\varepsilon_\delta)} |a|_v^{\frac{-z+1}{4}} + \frac{\zeta_v(z)\zeta_v(s+\frac{-z+1}{2})}{L_v(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\delta)} |a|_v^{\frac{z+1}{4}} \right\} & (|a|_v > 1) \end{cases}$
- $\hat{\mathcal{S}}_v^{\delta,(z)}(\alpha_v; a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}^{c+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}} \mathcal{S}_v^{\delta,(z)}(s;a)\alpha_v(s) d\mu_v(s) \qquad (c \gg 1, v \in S)$

ここで, ε_δ は局所類体論で $F_v(\sqrt{\delta})/F_v$ に対応する $F_v^\times$ の指標である. さらに, $\Delta \in F^\times$ と, 分数イデアル $\mathfrak{a} \subset F$ に対して,

$$
\mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\alpha|\Delta;\mathfrak{a}) = \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - (S \cup S(\mathfrak{n}))} \mathcal{O}_{v,0}^{\Delta,(z)}(a_v) \prod_{v \in S(\mathfrak{n})} \mathcal{O}_{v,1}^{\Delta,(z)}(a_v) \prod_{v \in S} \hat{\mathcal{S}}_v^{\Delta,(z)}(\alpha_v; a_v)
$$

とおく. ここで $(a_v)_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}}$ は $\mathrm{ord}_v(a) = \mathrm{ord}_v(\mathfrak{a})$ を満たすように取っている.
(ii) $v \in \Sigma_\infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_v^{+,(z)}(s;a) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{4} |a|_v |1-a^{-2}|_v^{\frac{s+1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4})\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{z-1}{4})}{\Gamma(s+1)} \delta(a>1) \\
\times F_3^{(1,0)} \left({\textstyle \frac{s}{2}+\frac{z+1}{4}, \frac{s}{2}-\frac{z-1}{4}, \frac{s+1}{2}; \frac{z+1}{4}, \frac{-z+1}{4} \atop \textstyle s+1; \frac{s+1}{2}} ; 1-a^{-2}, 1-a^2 \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_v^{-,(z)}(s;a) = (a^2+1) \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4})\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{z-1}{4})}{\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \\
\times F_3^{(1,0)} \left({\textstyle \frac{s}{2}+\frac{z+1}{4}, \frac{s}{2}-\frac{z-1}{4}, \frac{s+1}{2}; \frac{z+3}{4}, \frac{-z+3}{4} \atop \textstyle s+1; \frac{s}{2}+1} ; 1, -a^2 \right)
\end{aligned}
$$

とおく． ここで $F_3^{(1,0)}$ は第 3 種 Appell 超幾何関数 F_3 (cf. ([1])) の一般化で，パラメーター $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, a_1', c \in \mathbb{C}$ に対して，

$$F_3^{(1,0)}\left({a_1 a_2, a_3; b_1', b_2' \atop a_1'; c}; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_m (a_3)_m (b_1)_n (b_2)_n}{(a_1')_m (c)_{m+n}} x^m y^n$$

で定義される．ここで，$(\alpha)_m = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}$ は Pochhammer 記号で，$a_1', c \neq 0, -1, -2, \ldots$ とする．Gauss の超幾何関数の性質などを使うと，$F_3^{(1,0)}$ は各変数について $\mathbb{C} - [1, +\infty)$ へ解析接続できることが分かる．また $x = 1$ を代入している箇所があるが，この場合の収束性も保証されている．さらに，$c \gg 1$ とし，

$$\hat{\mathcal{O}}_v^{\pm,(z)}(\alpha; a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}\infty}^{c+\sqrt{-1}\infty} \mathcal{O}_v^{\pm,(z)}(s; a)\alpha(s) d\mu_v(s)$$

$$\begin{aligned}\Upsilon^{(z)}(\alpha) = &\prod_{v\in S} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}^{c+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}} \frac{-q_v^{-\frac{s+1}{2}}}{1-q_v^{-s-\frac{z+1}{2}}} \alpha_v(s) d\mu_v(s) \\ &\times \prod_{v\in\Sigma_\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}\infty}^{c+\sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{z-3}{4})} \alpha_v(s) d\mu_v(s),\end{aligned}$$

とおく．導入が長くなってしまったが，次が今回得た公式である．

Theorem 2.1. $|\mathrm{Re}(z)| < 1$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ と $\alpha = \otimes_{v\in S\cup\Sigma_\infty} \alpha_v \in \mathcal{A}_{S,\Sigma_\infty}$ に対して，

$$\mathbb{I}_{\mathrm{cusp}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{I}_{\mathrm{Eis}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{I}_{\mathrm{res}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = \mathbb{J}_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{J}_{\mathrm{ell}}(\alpha|\mathfrak{n}; z)$$

が成立する．右辺の 3 つの関数はそれぞれ放物元，双曲元，楕円元の寄与であり，以下で定義される．

(i)

$$\mathbb{J}_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = D_F^{\frac{z}{4}} \left\{\Lambda_F(-z)\hat{\mathbb{J}}_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \Lambda_F(z)\hat{\mathbb{J}}_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; -z)\right\}$$

ここで，

$$\hat{\mathbb{J}}_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = \left\{2^{-\frac{z+3}{2}} \pi^{-\frac{z+3}{4}} \Gamma\left(\tfrac{-z+1}{4}\right)\right\}^{n_F} D_F^{-\frac{z+2}{4}} \zeta_F(-z) \Upsilon^{(z)}(\alpha) \prod_{v\in S(\mathfrak{n})} \frac{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1+q_v}.$$

とおいている．

(ii)

$$\mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = \frac{1}{2} D_F^{\frac{-1}{2}} \zeta_F\left(\frac{-z+1}{2}\right) \sum_{a\in\mathfrak{o}(S)_+^\times - \{1\}} \mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}\left(\alpha|1; \frac{a}{(a-1)^2}\mathfrak{o}\right) \prod_{v\in\Sigma_\infty} \hat{\mathcal{O}}_v^{+,(z)}\left(\alpha_v; \frac{a+1}{a-1}\right).$$

ここで，$\mathfrak{o}(S)_+^\times$ は総正な S-単数の集合．

(iii)

$$\mathbb{J}_{\mathrm{ell}}(\alpha|\mathfrak{n};z) = \frac{1}{2}D_F^{\frac{z-1}{2}} \sum_{(t:n)_F} \mathrm{N}(\mathfrak{d}_\Delta)^{\frac{z+1}{4}} L\left(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\Delta\right) \mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}\left(\alpha|\Delta;n\mathfrak{f}_\Delta^{-2}\right) \times \prod_{v\in\Sigma_\infty} \hat{\mathcal{O}}_v^{\mathrm{sgn}(\Delta^{(v)}),(z)}\left(\alpha_v;t|\Delta|_v^{\frac{-1}{2}}\right),$$

ここで,

- $\Delta = t^2 - 4n$
- ε_Δ : 大域類体論で $F(\sqrt{\Delta})/F$ に対応する $\mathbb{A}^\times$ の指標.
- $\mathfrak{d}_\Delta$: $F(\sqrt{\Delta})/F$ の相対判別式
- $\mathfrak{f}_\Delta$: $\Delta\mathfrak{o} = \mathfrak{d}_\Delta\mathfrak{f}_\Delta^2$ となる $\mathfrak{o}$ のイデアル

$(t;n)_F$ は, 集合 $\{(t,n)\in F\times F \mid t^2-4n \in F^\times - (F^\times)^2\}$ 上の同値関係

$$(t,n)\sim(t',n') \iff \exists c\in F^\times, t'=ct, n'=c^2n$$

による商集合の元で, 次を満たすものをわたる.

- $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}} - S$ に対して, $(t,n)\in\left\{(c_vt_v, c_v^2n)\in F_v\times F_v \mid c_v\in F_v^\times, t_v\in\mathfrak{o}_v, n\in\mathfrak{o}_v^\times\right\}$
- ε_Δ の v-因子 $\varepsilon_{\Delta,v}$ が不分岐な $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して, $\mathrm{ord}_v(n\mathfrak{f}_\Delta^{-1}) < 0$

なお, この公式は, $F=\mathbb{Q}$ の場合に考えると, Maass 波動形式に対する Zagier の公式 ([12]) を復元できることが少しの計算でわかる. したがって, この結果はその Hilbert Maass 形式への一般化とみなすことができる.

3　応用

今回得られた跡公式の応用として, スペクトルパラメーターの重み付き一様分布性, $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ の特殊値の非消滅性が証明できる. 記号は, 前節と同じものを用いる.

3.1　重み付き一用分布性

以下, $\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}^{0+} = \prod_{v\in S\cup\Sigma_\infty}\mathfrak{X}_v^{0+}$ とおく. $z\in[0,1)$ に対して, $C_c^0(\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}^{0+})$ 上の線型汎関数 $\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}(\mathfrak{n})$ を次で定義する.

$$\left\langle\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}(\mathfrak{n}),f\right\rangle = \frac{D_F^{-\frac{3}{2}}}{2\mathrm{M}(\mathfrak{n})^{\delta(z=0)}} \prod_{v\in S(\mathfrak{n})} \frac{q_v^{\frac{z-1}{2}}}{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}} \times \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n})} W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)\frac{L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})}{L(1,\pi;\mathrm{Ad})} f(\nu_{S,\Sigma_\infty}(\pi)), \quad f\in C_c^0(\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}^{0+}),$$

ここで, $\mathrm{M}(\mathfrak{n})=\sum_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{\log q_v}{1+q_v^{-\frac{1}{2}}}$ である. GL_2 の Ramanujan 境界に関する結果 ([2],[5]) を用いると, $W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)\geq 0$ であることが分かる. 以下では, $\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}(\mathfrak{n})$ が $\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}^{0+}$ 上の Radon 測度であることを保証する次の命題を仮定する.

(P) 任意の $z\in[0,1)$, square-free イデアル $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{o}$, $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ に対して, $L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})\geq 0$.

これは $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ についての一般 Riemann 予想を仮定すると, 中間値の定理から成り立つ. なぜなら $z\in[0,1]$ で $L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})$ は実数であり, $L(1,\pi;\mathrm{Ad})>0$ だからである (cf. 例えば ([9, 2.8]) など).

次に, $\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}^{0+}$ 上の別の Radon 測度 $\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}$ を次のように定義する.

$$\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}=\left\{2^{-\frac{z+3}{2}}\pi^{-\frac{z+3}{4}}\Gamma(\tfrac{-z+1}{4})\right\}^{n_F}r(z)\prod_{v\in S\cup\Sigma_\infty}\lambda_v^{(z)},$$

ここで, $r(z)=\begin{cases}\zeta_F(z+1) & (z\neq 0)\\ \operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_F(s) & (z=0)\end{cases}$, $\lambda_v^{(z)}$ は $\mathfrak{X}_v^{0+}$ 上の, 虚軸を台に持つ Radon 測度で,

$$d\lambda_v^{(z)}(\sqrt{-1}y)=\begin{cases}\frac{\log q_v}{4\pi}(1+q_v^{-\frac{z+1}{2}})\frac{\left|1-q_v^{-\sqrt{-1}y}\right|^2}{\left|1-q_v^{-\sqrt{-1}y-\frac{z+1}{2}}\right|^2} & (v\in S)\\ \frac{\cos(\frac{z+1}{4})\pi}{2\pi^2}y(e^{\frac{\pi}{2}y}-e^{-\frac{\pi}{2}y})\left|\Gamma(\frac{\sqrt{-1}y}{2}+\frac{z+1}{4})\right|^2 & (v\in\Sigma_\infty)\end{cases}.$$

で与えられる.

Theorem 3.1. **(P)** を仮定する. この時, 測度 $\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}(\mathfrak{n})$ は, 測度 $\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}$ に $\mathrm{N}(\mathfrak{n})\to+\infty$ で弱収束する. 即ち任意の $f\in C_c^0(\mathfrak{X}_{S,\Sigma_\infty}^{0+})$ に対して,

$$\left\langle\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}(\mathfrak{n}),f\right\rangle\to\left\langle\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)},f\right\rangle\qquad(\mathrm{N}(\mathfrak{n})\to+\infty)$$

が成り立つ.

これは, 今回の主結果である跡公式を用いると証明できる. $\mathrm{N}(\mathfrak{n})\to+\infty$ とした時に, 左辺の主要項は $\mathbb{I}_{\mathrm{cusp}}$, 右辺の主要項は $\mathbb{J}_{\mathrm{uni}}$ になることが分かる. あとは少しの計算と f の "良い" 近似 $\alpha\in\mathcal{A}_{S,\Sigma_\infty}$ を考えることで示せる. この時の不等式の評価に $\lambda_{S,\Sigma_\infty}^{(z)}(\mathfrak{n})$ の非負性を用いる.

3.2 $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ の非消滅性

前節の定理の系として, Hilbert Maass 形式に対する対称 2 次 L 関数 $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ 特殊値の非消滅性を証明できる.

Theorem 3.2. **(P)** を仮定する. $z\in[0,1)$ と $\mathbb{R}$ の部分区間の族 $(J_v)_{v\in S\cup\Sigma_\infty}$ で, $v\in S$ に対して $J_v\subset[-2,2]$, $v\in\Sigma_\infty$ に対して $J_v\subset[\frac{1}{4},+\infty)$ を満たすものを任意に与える. このとき, 次を満たす $M>0$ が存在する.

$\mathrm{N}(\mathfrak{n})>M$ を満たす任意の素イデアル $\mathfrak{n}$ に対して,

- $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{n}$
- $L(\frac{z+1}{2}, \pi; \mathrm{Ad}) \neq 0$
- $v \in S$ に対して, $q_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} + q_v^{-\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} \in J_v$
- $v \in \Sigma_\infty$ に対して, $\frac{1-\nu_v(\pi_v)^2}{4} \in J_v$

を満たす $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ が存在する.

謝辞

今回の講演の機会を与えてくださった世話人代表の森本和輝 氏, 副代表の宮崎直 氏に深く感謝申し上げます. また, 本研究は JSPS 科研費 JP19J20176 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] P. Appell, *Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles.* C. R. Acad. Sci. **90** (1880) 296–298, 731–735.

[2] V. Blomer, F. Brumley *On the Ramanujan conjecture over number fields.* Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 581–605.

[3] S. Gelbart, H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978) no. 4, 471–542.

[4] H. Jacquet, D. Zagier, *Eisenstein series and the Selberg trace formula II.* Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1) (1987) 1–48.

[5] W. Luo, Z. Rudnick, P. Sarnak, *On the generalized Ramanujan conjecture for $GL(n)$.* Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 301–310.

[6] S. Mizumoto, *On the second L-functions attached to Hilbert modular forms.* Math. Ann. **269** (1984) 191–216.

[7] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms.* J. Funct. Anal. **275** (2018), no. 11, 2978–3064.

[8] K. Takase, *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L-functions attached to the Hilbert modular forms.* Manuscripta Math. **55** (1986) 137–170.

[9] M. Tsuzuki, *Spectral means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$.* Mem. Amer. Math. Soc. **235** (2015), no. 1110.

[10] H. Wu, *Deducing Selberg trace formula via Rankin-Selberg method for GL_2*. (English summary) Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), no. 12, 8507–8551.

[11] D. Zagier, *Modular Forms Whose Fourier Coefficients Involve Zeta-Functions of Quadratic Fields*, Lecture Notes in Math., vol. 627, Springer, 1977, 105–169.

[12] D. Zagier, *Eisenstein series and the Selberg trace formula I*, in: Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Tata Institute, Bombay, 1979, 303–355.