On branching laws of Speh representations and local zeta integrals

京都大学・数理解析研究所　伊藤　望
Nozomi Ito
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

本稿は、本研究集会における同名の発表、及びその元となった筆者の論文 [Itoa] の概説である。

1　研究の動機：宮脇リフト

本研究の動機である、宮脇リフトについて説明する。

F を代数体、E をその二次拡大とし、それらの adele 環をそれぞれ $\mathbb{A}_F, \mathbb{A}_E$ と書く。F の任意の素点 v に対して F の v による完備化を F_v と書き、また $E_v = F_v \otimes_F E$ と定める。任意の E 上の非退化エルミート形式付き空間 V に対し、その isometry group を $\mathrm{U}(V)$ と書く。

V_1, V_2 を E 上の非退化エルミート形式付き空間で、$\dim_E V_1 = n, \dim_E V_2 = n+2l$ $(n, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ となるものとする。$\Pi = \otimes_v \Pi_v$ を $\mathrm{U}(V_1 \oplus V_2)(\mathbb{A}_F)$ の既約離散的保型表現であり、その standard base change（例えば [KMSW] を見よ）$\mathrm{BC}(\Pi)$ が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)$ の、中心指標 χ_π を持つ（conjugate self-dual で parity が $(-1)^{n+l}$ の）既約カスプ表現 $\pi = \otimes_w \pi_w$ を用いて

$$\mathrm{BC}(\Pi) = \boxplus_{i=1}^{n+l} \pi |\cdot|_{\mathbb{A}_E}^{\frac{n+l+1}{2}-i}$$

と isobaric sum で書ける（即ち、Π の Arthur パラメータが $\pi \boxtimes S_{n+l}$（S_i は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の i 次元既約代数的表現））ものとする。任意の $\mathrm{U}(V_1)(\mathbb{A}_F)$ の保型形式 f と $\mathcal{F} \in \Pi$ に対し、$\mathrm{U}(V_2)(\mathbb{A}_F)$ の保型形式 $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(f)$ を

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(f)(g) := \int_{\mathrm{U}(V_1)(F)\backslash \mathrm{U}(V_1)(\mathbb{A}_F)} \mathcal{F}|_{(\mathrm{U}(V_1)\times\mathrm{U}(V_2))(\mathbb{A}_F)}(h, g)\overline{f(h)}dh, \ g \in \mathrm{U}(V_2)(\mathbb{A}_F)$$

で（積分が収束する限り）定める。そして、$\mathrm{U}(V_1)(\mathbb{A}_F)$ の既約離散的保型表現 $\tau = \otimes_v \tau_v$ に対し、

$$\mathcal{M}_\Pi(\tau) := \langle \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(f) \mid f \in \tau, \mathcal{F} \in \Pi \rangle_{\mathbb{C}}$$

と定める。この $\mathcal{M}_\Pi(\tau)$ は、池田氏によって定義された Siegel モジュラー形式のリフティングである宮脇リフト [Ike06] の、跡部-小嶋両氏による Hermite モジュラー形式類似 [AK18] の表現論的一般化と言える。そこでこれを、τ の Π による宮脇リフトと呼ぶ（より詳しいことについては [Itob] を参照せよ）。

$\mathcal{M}_\Pi(\tau)$ について次の事実が成り立つ。

事実 1.1 ([Itob, Proposition 3.10]). $\mathcal{M}_\Pi(\tau)$ が二乗可積分であるとする。このとき、$\mathcal{M}_\Pi(\tau)$ の任意の既約部分表現 τ' について、

$$\mathrm{BC}(\tau') = (\boxplus_{i=1}^{l} \pi |\cdot|_{\mathbb{A}_E}^{\frac{l+1}{2}-i}) \boxplus \mathrm{BC}(\tau)^\vee \chi_\pi$$

が成立（あるいは、同じことだが τ' の Arthur パラメータが τ の Arthur パラメータ ψ_τ を用いて

$$\pi \boxtimes S_l \boxplus \psi_\tau^\vee \chi_\pi$$

と書ける）。

つまり $\mathcal{M}_\Pi(\tau)$ は near equivalence class が定まっている。

宮脇リフトを理解するにあたり、問題は（theta リフトなどと同様）大まかに二つに分かれる。

(G) $\mathcal{M}_\Pi(\tau)$ の非消滅性を決定する問題。あるいはもっと詳しく、$\mathcal{F}_f \in \mathcal{M}_\Pi(\tau)$ のノルムを、L 関数の特殊値などを用いて記述する問題。

(L) F の各素点 v に対する、$\Pi_v|_{(\mathrm{U}(V_1)\times\mathrm{U}(V_2))(F_v)}$ の分岐則の問題。典型的には、$\mathrm{U}(V_1)(F_v)$ の既約表現 τ_1 と $\mathrm{U}(V_2)(F_v)$ の既約表現 τ_2 に対し、$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{U}(V_1)\times\mathrm{U}(V_2))(F_v)}(\Pi_v, \tau_1 \boxtimes \tau_2) \neq 0$ なる条件を決定する問題。

今回考えるのは後者で、さらに v が E 上分裂するような非アルキメデス素点の場合である。このとき、$(\mathrm{U}(V_1)\times\mathrm{U}(V_2))(F_v)$ の、自然な同型 $\mathrm{U}(V_1\oplus V_2)(F_v) \simeq \mathrm{GL}_{2n+2l}(F_v)$ による像は $\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_n(F_v), \mathrm{GL}_{n+2l}(F_v))$ と（$\mathrm{GL}_{2n+2l}(F_v)$ 内で）共役であり、また Π_v は Speh 表現 $\mathrm{Sp}(\pi_w, n+l)$（後述）に同型となる（$w : v$ の上の素点)。ゆえに、結局考えるのは（GL_2 の表現に関する）Speh 表現を対角的な二つの一般線型群の直積に制限したときの分岐則、ということになる。

2 Speh 表現と Shalika モデル

Speh 表現と、そのモデルの一種である Shalika モデルについて説明する。

以後、F は標数 0 の非アルキメデス的局所体とし、その正規化された絶対値を $|\cdot|$ と書く。任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\mathrm{GL}_m(F)$ を単に GL_m と書く。τ_i $(i = 1, \ldots, r)$ を GL_{m_i} $(m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の表現としたとき、$\underline{\tau} = \tau_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \tau_r$ を $M = \mathrm{diag}(\mathrm{GL}_{m_1}, \ldots, \mathrm{GL}_{m_r})$ の表現とみなし、$\underline{\tau}$ の、M を Levi 部分群に持つブロック上半三角な放物型部分群に関する正規化された放物誘導表現を $\tau_1 \times \cdots \times \tau_r$ と書く。

π を中心指標 χ_π を持つ GL_k $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ の既約 generic 表現とする。このとき、π の cuspidal support を $\{\rho_i\}_{i=1}^r$(multi-set である) とすると、π は Zelevinsky 分類（[BZ77] を見よ）で、singleton な segment のみからなる multi-segment $\sum_{i=1}^r \{\rho_i\}$ に対応する。そこで、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、multi-segment

$$\sum_{i=1}^r \{\rho_i|\cdot|^{-(m-1)/2}, \ldots, \rho_i|\cdot|^{(m-1)/2}\}$$

に対応する GL_{km} の既約表現を $\mathrm{Sp}(\pi, m)$ と書き、π の m 次の Speh 表現と呼ぶ。

Speh 表現は次の特徴を持つ。

事実 2.1 (cf. [LM20, §3]). ψ を F の非自明な加法指標とする。GL_{km} の部分群 U を

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1_m & * & * & * \\ & 1_m & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & 1_m \end{pmatrix} \right\}$$

で定め、U の指標 ψ_U を

$$\psi_U\left(\begin{pmatrix} 1_m & X_1 & * & * & * \\ & 1_m & X_2 & * & * \\ & & \ddots & \ddots & * \\ & & & 1_m & X_{k-1} \\ & & & & 1_m \end{pmatrix}\right) = \psi(\mathrm{tr}(X_1 + \cdots + X_{k-1}))\ (X_i \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(F))$$

で定める。このとき以下が成立。

(1) 誘導表現 $\mathrm{Ind}_U^{\mathrm{GL}_{km}}\psi_U$ は $\mathrm{Sp}(\pi,m)$ と同型な部分表現をただ一つ持つ（以後、これを $\mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\pi,m))$ と書く）。

(2) $\mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\pi,m))$ の任意の元 W_{Sh} は

$$W_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{diag}(g,\ldots,g)\cdot)=\chi_\pi(\det g)W_{\mathrm{Sh}}\ (\forall g\in\mathrm{GL}_m)$$

を満たす。

(3) $k=2$ のとき、$\mathcal{K}(\mathrm{Sp}(\pi,m)):=\{\Phi_{W_{\mathrm{Sh}}}\mid W_{\mathrm{Sh}}\in\mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\pi,m))\}$ は $\mathcal{S}(\mathrm{GL}_m)$ を部分空間として含む。但し、$\Phi_{W_{\mathrm{Sh}}}:=W_{\mathrm{Sh}}|_{\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_m,1_m)}$ である。

$\mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{Sp}(\pi,m))$ は $\mathrm{Sp}(\pi,m)$ の Shalika モデルと呼ばれる。

後のため、approximately tempered の概念を導入する。π は generic 表現のため π をある二乗可積分表現たち $\{\pi_i\}_{i=1}^p$ と実数たち $\{r_i\}_{i=1}^p$ を用いて

$$\pi=\pi_1|\cdot|^{r_1}\times\cdots\times\pi_p|\cdot|^{r_p}$$

と書ける。$|r_i-r_j|<1$ が任意の i,j に対して成り立つとき、π は approximately tempered であるという。特に、unitary 表現は approximately tempered である。また、π が approximately tempered であるとき $\mathrm{Sp}(\pi,m)$ は $\pi|\cdot|^{(m-1)/2}\times\cdots\times\pi|\cdot|^{-(m-1)/2}$ のただ一つの既約商となる ([LM20, Corollary 2.8])。以上から、§1 の末尾で述べた $\Pi_v\simeq\mathrm{Sp}(\pi_w,n+l)$ が正当化される。

3 zeta 積分

Shalika モデルを用いて、zeta 積分を定義する。

以後、ψ を F の非自明な加法指標とし、$n\in\mathbb{Z}_{>0}$、π を中心指標 χ_π を持つ approximately tempered な GL_2 の既約 generic 表現とする。また $\Pi:=\mathrm{Sp}(\pi,n)$ とし、$\tau\neq 0$ を適当な既約表現の放物誘導表現の部分表現として実現される GL_n の表現とする。そして、任意の $W_{\mathrm{Sh}}\in\mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\Pi)$、$s\in\mathbb{C}$、及び τ の行列係数 f に対し、zeta 積分 $Z(W_{\mathrm{Sh}},s,f)$ を

$$Z(W_{\mathrm{Sh}},s,f):=\int_{\mathrm{GL}_n}\Phi_{W_{\mathrm{Sh}}}(g)f(g)|\det g|^{s-\frac{1}{2}}dg=\int_{\mathrm{GL}_n}W_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{diag}(g,1_n))f(g)|\det g|^{s-\frac{1}{2}}dg$$

と定める。このとき、s の実部が十分大（これは W_{Sh},f に依らない）で積分が絶対収束することが比較的容易（[Itoa] の §2.1 の章末を見よ）に分かる。

事実 2.1 (2) から、$g_1,g_2\in\mathrm{GL}_n$ に対し

$$\int_{\mathrm{GL}_n}W_{\mathrm{Sh}}(\mathrm{diag}(gg_1,g_2))f(g_2^{-1}gg_1)|\det g|^{s-\frac{1}{2}}dg=|\det g_1^{-1}g_2|^{s-1/2}\chi_\pi(\det g_2)Z(W_{\mathrm{Sh}},s,f)$$

であるので、事実 2.1 (3) から、この zeta 積分は well-defined な限り、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n}(\Pi\otimes(\tau\boxtimes\tau^\vee),|\cdot|^{-s+1/2}\boxtimes|\cdot|^{s-1/2}\chi_\pi(\det))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n}(\Pi,\tau^\vee|\cdot|^{-s+1/2}\boxtimes\tau|\cdot|^{s-1/2}\chi_\pi(\det))$$

の非自明な元を与えていることに注意する（$\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_p,\mathrm{GL}_q)$ をしばしば $\mathrm{GL}_p\times\mathrm{GL}_q$ と書く）。

注意 3.1. 一つ重要な事実を指摘をしておく。上記の zeta 積分は筆者が自ら考案したものであるが、実は本研究よりも前に別の文脈で、Kaplan 氏によって既に導入されていた ([CFK, Appendix C]) ことが後に明らかになった。その事実を指摘してくださった Cai 氏に、この場を借りて感謝申し上げます。

4 主定理

主定理を述べる。

定理 4.1 ([Itoa, Theorem 2.1]). 先の zeta 積分は次を満たす。

(1) $Z(W_{\mathrm{Sh}}, s, f)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型接続される。さらに、$P(0) = 1$ なる多項式 $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ で、

$$\langle Z(W_{\mathrm{Sh}}, s, f)\rangle_{\mathbb{C}} = P(q^{-s})^{-1}\mathbb{C}[q^{-s}, q^{s}]$$

を満たすものが（ただ一つ）存在する（以後 $P(q^{-s})^{-1}$ を $L(\pi; s, \tau)$ と書く）。

(2) $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ であるとき

$$L(\pi; s, \tau) = L(\pi; s, \tau_1)L(\pi; s, \tau_2)$$

である。

(3) 関数 $\gamma(s) \in \mathbb{C}(q^{-s})$ で、

$$Z(\widetilde{W_{\mathrm{Sh}}}, 1 - s, f^{\vee}) = \gamma(s)Z(W_{\mathrm{Sh}}, s, f)$$

が任意の W_{Sh} 及び f に対し成り立つものが存在する（以後、$\gamma(s)$ を $\gamma(\pi; s, \tau, \psi)$ と書く）。但し、$f^{\vee} := f(\cdot^{-1}), \widetilde{W_{\mathrm{Sh}}} := \chi_{\pi}^{-1}(\det)W_{\mathrm{Sh}}(\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{smallmatrix}\right))(\in \mathcal{W}_{\mathrm{Sh}}^{\psi^{-1}}(\Pi^{\vee}))$ である。

(4) τ が $\tau_1 \times \tau_2$ の部分表現であるとき、

$$\gamma(\pi; s, \tau, \psi) = \gamma(\pi; s, \tau_1, \psi)\gamma(\pi; s, \tau_2, \psi)$$

である。

(5) τ が既約 generic 表現であるとき、

$$L(\pi; s, \tau) = L(s, \pi \boxtimes \tau)$$

である。但し、上式の右辺は Jacquet、Piatetski-Shapiro 及び Shalika による局所 L 因子である ([JPSS83]).

注意 4.2. (1)、(3) 及び (4) は既に Kaplan 氏によって示されている。一方で、(2) 及び (5) は真に新しい結果と言える。

この結果から、$L(\pi; s, \tau)^{-1}Z(W_{\mathrm{Sh}}, s, f)|_{s=1/2}$ は

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n}(\Pi, \tau^{\vee} \boxtimes \tau\chi_{\pi}(\det))$$

の非自明な元を与えることがわかる。すると、誘導表現に関する素朴な議論によって、一般に次の結果を得ることができる。

系 4.3. $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n+2l}}(\mathrm{Sp}(\pi, n + l), \tau^{\vee} \boxtimes \tau\chi_{\pi} \times \mathrm{Sp}(\pi, l)) \neq 0$$

である。

5 証明の概要

最後に主定理の証明の概要を述べる。

(1) まず τ が generic な場合を考える。τ の Whittaker モデルを $\mathcal{W}^{\psi}(\tau)$ と書く。任意の $W'_{\mathrm{Sh}} \in \mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\Pi)$、$s \in \mathbb{C}$、及び $W \in \mathcal{W}^{\psi}(\tau)$ に対し新たな zeta 積分 $Z(W'_{\mathrm{Sh}}, s, W)$ を

$$Z(W'_{\mathrm{Sh}}, s, W) := \int_{\mathrm{GL}_n} \Phi_{W'_{\mathrm{Sh}}}(g) W(g) |\det g|^{s-\frac{1}{2}} dg$$

と定める。するとこれは s の実部が十分大で W'_{Sh}, W に依らず絶対収束し、また計算により $Z(W'_{\mathrm{Sh}}, s, W)$ は $\pi \boxtimes \tau$ の Rankin-serberg zeta の線型結合で書けると分かる。さらに、$Z(W_{\mathrm{Sh}}, s, f)$ は $Z(W'_{\mathrm{Sh}}, s, W)$ たちの線型結合で書けることが容易に分かるので、この場合に (1) が言える。

一般の場合には [LM20] の、モデルの変形に関する結果から得られる次の補題を用いる。

補題 5.1. 任意の $W_{\mathrm{Sh}} \in \mathcal{W}^{\psi}_{\mathrm{Sh}}(\Pi)$ と $n_1 + n_2 = n$ なる $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、

$$\left(\int_{\mathrm{Mat}_{n_1 \times n_2}(F)} \Phi_{W_{\mathrm{Sh}}} \left(\begin{pmatrix} 1_{n_1} & X \\ & 1_{n_2} \end{pmatrix} \cdot \right) dX \right) \Bigg|_{\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_{n_1}, \mathrm{GL}_{n_2})} \in \mathcal{K}(\mathrm{Sp}(\pi, n_1)) |\cdot|^{n_2/2} \otimes \mathcal{K}(\mathrm{Sp}(\pi, n_2)) |\cdot|^{-n_1/2}$$

（注意：この補題のために、π が approximately tempered という条件がついている）

τ は generic 表現の放物誘導表現の部分表現として実現できるので、補題 5.1 を帰納的に用いることで（[GJ72] などと同様の議論で）一般の場合にも (1) が言える。

(2),(4) 補題 5.1 を使い、[GJ72] で使われた議論と同様の議論で (2),(4) は容易に示される。

(3) $Z(\widetilde{W_{\mathrm{Sh}}}, 1-s, f^{\vee})$ と $Z(W_{\mathrm{Sh}}, s, f)$ はいずれも

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n}(\Pi, \tau^{\vee} |\cdot|^{-s+1/2} \boxtimes \tau |\cdot|^{s-1/2} \chi_{\pi}(\det))$$

の非自明な元を定める。また補題 5.1 を使うことで、τ が supercuspidal であるとして良いことが分かるので、次の補題を示せば良い。

補題 5.2. GL_n の任意の既約 supercuspidal 表現 σ に対し

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n}(\Pi, \sigma \boxtimes \sigma^{\vee} \chi_{\pi}(\det)) \leq 1$$

である。

この補題は、π が supercuspidal でない場合には Π が $\chi_1(\det_n) \times \chi_2(\det_n)$ なる形の（$\chi_i : F^{\times}$ の指標）、退化主系列表現と呼ばれる表現の部分表現になるため、doubling 法の文脈で既に知られている。

π が supercuspidal である場合は、詳細は割愛するが、Speh 表現の mirabolic 部分群への制限に関する主張 [Zel80, Theorem 3.5] を帰納的に用いることで、GL_{2n} の部分群 $D = \{ \begin{pmatrix} * & * \\ & 1_n \end{pmatrix} \}$ に関する $\Pi|_D$ のフィルトレーション

$$\Pi|_D = J_0 \supset \cdots \supset J_t$$

で、次の二つ

- 任意の $i = 0, \ldots, t-1$ に対し、$(J_i / J_{i+1})|_{\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_n, 1_n)}$ は真の放物型部分群に関する放物誘導表現になっている

- J_t は $\Pi|_{\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)}$ の部分表現でもあって、$\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$ の表現として

  $$\mathrm{ind}_{\Delta \mathrm{GL}_n}^{\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)} \chi_{\pi}(\det)$$

  と同型（ind : compact 誘導表現、$\Delta \mathrm{GL}_n = \{ \mathrm{diag}(g, g) \mid g \in \mathrm{GL}_n \} \simeq \mathrm{GL}_n$）

を満たすものが存在する。すると σ が supercuspidal だから自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n}(\Pi,\sigma\boxtimes\sigma^\vee\chi_\pi(\det))\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n}(\mathrm{ind}_{\Delta\mathrm{GL}_n}^{\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_n,\mathrm{GL}_n)}\chi_\pi(\det),\sigma\boxtimes\sigma^\vee\chi_\pi(\det))\simeq\mathbb{C}$$

となり補題が示される（詳細については [Itoa, §3] を見よ）。

(5) ここまでの議論で、

$$\langle Z(W_{\mathrm{Sh}},s,f)\rangle_{\mathbb{C}}\subset L(s,\pi\boxtimes\tau)\mathbb{C}[q^{-s},q^s]$$

が分かっている。また、(3) は既に示したので、[JPSS83] で用いられていた関数等式で局所 L 因子の極を調べ因数を決定する手法の類似、(2)、及び低次の場合の具体的な計算によって (5) が示される。

参考文献

[AK18] H. Atobe and H. Kojima, *On the Miyawaki lifts of hermitian modular forms*, J. Number Theory **185** (2018), 281–318.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups. I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 4, 441–472.

[CFK] Y. Cai, S. Friedberg, and E. Kaplan, *Doubling constructions: local and global theory, with an application to global functoriality for non-generic cuspidal representations*, arXiv:1802.02637.

[GJ72] Roger Godement and Hervé Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Ike06] T. Ikeda, *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture*, Duke Math. J. **131** (2006), no. 3, 469–497.

[Itoa] N. Ito, *On branching laws of Speh representations*, arXiv:2110.14145.

[Itob] ———, *On Miyawaki lifts with respect to Hermitian Maass lifts*, arXiv:1911.10177.

[JPSS83] H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro, and J. A. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 2, 367–464.

[KMSW] Tasho Kaletha, Alberto Mínguez, Sug Woo Shin, and Paul-James White, *Endoscopic classification of representations: inner forms of unitary groups*, arXiv:1409.3731.

[LM20] E. M. Lapid and Z. Mao, *Local Rankin-Selberg integrals for Speh representations*, Compos. Math. **156** (2020), no. 5, 908–945.

[Zel80] A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 2, 165–210.