自由群のSU(2)-Fricke環について

東京理科大学理学研究科　加藤　瑶
Yoh Katoh
Graduate School of Science,
Tokyo University of Science

1　概要

自由群のFricke指標は，歴史的には[3]において，Riemann面の分類問題の研究のために導入された．自由群のFricke指標は$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$のトレースの関係式から環を生成する．この環をFricke環と呼ぶ．Fricke環についてはHorowitz[6]，[7]により，環として有限生成であることが示され，特にその明示的な生成系が与えられた．さらに，Magnus[8]では，自由群の自己同型群$\mathrm{Aut}(F_n)$によるFricke環への作用を表現論的立場から考察している．このようにして，Fricke環に対しては多くの研究が行われてきたが，依然としてその構造は複雑である．その理由の一つとしては，Horowitzの生成系はかなり大きく，扱いづらいことが挙げられる．Fricke環は$\mathbb{C}$代数としての構造を自然に導入することで，自由群の$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-指標多様体の座標環として解釈できる．Hatakenaka-Satoh[4]は有理係数の座標環において，その自明表現に対応する極大イデアルが$\mathrm{Aut}(F_n)$不変であることに着目し，Johnson準同型に類似した準同型を構成した．それをもとに，$\mathrm{Aut}(F_n)$のAndreadakis-Johnsonフィルトレーションの類似の構成を行うことで，$\mathrm{Aut}(F_n)$の中心的降下列を得た．さらに同論文において，自明表現に対応する極大イデアルの冪イデアルのたちのなす次数商の低次の場合の$\mathbb{Q}$ベクトル空間としての基底と，中心的降下列の最初の項の具体的な形を決定している．

一般に，表現を$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$の部分群$\Gamma$に制限することによって，各$\Gamma$に対して自由群の$\Gamma$-指標多様体のアファイン代数的集合を得る事ができ，Johnson準同型の類似の準同型を構成できる．そして，$\mathrm{Aut}(F_n)$の多くの中心的降下列を得ることができる．本稿では，$\Gamma=\mathrm{SU}(2),\mathrm{SO}(2)$の場合についての計算結果と，それらから得られる系を紹介する．

2　Andreadakis-Johnsonフィルトレーション

この節ではAndreadakis-Johnsonフィルトレーションについて復習する．詳しくは[9]を参照されたい．以下，$n\geq 3$とし，F_nで$x_1,\dots,x_n$により生成されるランクnの自由群を表すことにする．また．F_nの自己同型群を$\mathrm{Aut}(F_n)$で表すことにする．F_nに対して，

$$G_n(1)=F_n,\ G_n(k)=[G_n(k-1),F_n],\ (k\geq 2)$$

と帰納的に定義する．このとき，各$k\geq 0$に対して，F_nの冪零商$F_n/G_n(k+1)$上に$\mathrm{Aut}(F_n)$は自然に作用する．この作用は，

$$\mathrm{Aut}(F_n)\to\mathrm{Aut}(F_n/G_n(k+1))$$

なる群準同型を引き起こす．各 k に対し，この準同型の核を $\mathcal{A}_n(k)$ と記すことにする．このとき，

$$\mathrm{Aut}(F_n) = \mathcal{A}_n(0) \supset \mathcal{A}_n(1) \supset \cdots \mathcal{A}_n(k) \supset \cdots$$

なる正規部分群からなる降下列が得られる．この降下列に対しては，以下が知られている．

Theorem 2.1 (Andreadakis [1]). (1) 任意の $k, l \geq 1$ に対し，$\sigma \in \mathcal{A}_n(k)$，$x \in G_n(l)$ なら，$x^{-1}x^{\sigma} \in G_n(k+l)$ である．

(2) 任意の $k, l \geq 1$ に対して， $[\mathcal{A}_n(k), \mathcal{A}_n(l)] \subset \mathcal{A}_n(k+l)$.

$\mathcal{A}_n(k)$ からなる中心的降下列を Andreadakis-Johnson フィルトレーションという．特に，$\mathcal{A}_n(1)$ を $\mathrm{IA}(F_n)$ で表し，F_n の IA-自己同型群という．

3 Γ-Fricke 環と $\mathrm{Aut}(F_n)$ による作用

Γ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の部分群とし，$\mathrm{Hom}(F_n, \Gamma)$ をその Γ 表現全体とする．$x \in F_n$ とする．$\rho \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{tr}(x)(\rho) = \mathrm{tr}(\rho(x))$ により，$\mathrm{tr}(x) : \mathrm{Hom}(F_n, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$ を定める．このとき，

$$\mathrm{Hom}(F_n, \Gamma) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(F_n, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \xrightarrow{\mathrm{tr}(x)} \mathbb{C}$$

で定まる写像を $\mathrm{tr}_{\Gamma}(x)$ で表し，これを x の Γ-Fricke 指標と呼ぶことにする．特に，$\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の場合を x の Fricke 指標という．Fricke 指標では，以下の公式が成り立つことが知られている．

(1) $\mathrm{tr}(x^{-1}) = \mathrm{tr}(x)$,

(2) $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$,

(3) $\mathrm{tr}(xy) + \mathrm{tr}(xy^{-1}) = \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)$,

(4) $\mathrm{tr}(xyz) + \mathrm{tr}(yxz) = \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(yz) + \mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(xz) + \mathrm{tr}(z)\mathrm{tr}(xy) - \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(z)$,

(5)

$$\begin{aligned}
2\mathrm{tr}(xyzw) = {} & \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(yzw) + \mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(zwx) + \mathrm{tr}(z)\mathrm{tr}(wxy) + \mathrm{tr}(w)\mathrm{tr}(xyz) \\
& + \mathrm{tr}(xy)\mathrm{tr}(zw) - \mathrm{tr}(xz)\mathrm{tr}(yw) + \mathrm{tr}(xw)\mathrm{tr}(yz) \\
& - \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(zw) - \mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(z)\mathrm{tr}(xw) - \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(w)\mathrm{tr}(yz) \\
& - \mathrm{tr}(z)\mathrm{tr}(w)\mathrm{tr}(xy) + \mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)\mathrm{tr}(z)\mathrm{tr}(w),
\end{aligned}$$

ここで，$x, y, z, w \in F_n$ である．

$X_n(\Gamma) = \{f \mid f : \mathrm{Hom}(F_n, \Gamma) \to \mathbb{C}\}$ とし，各点ごとに和と積とスカラー倍を入れ,$\mathbb{C}$ 代数とみなす．このとき，(3) により，$\mathrm{tr}(x)$ なる形の元が生成する部分 $\mathbb{Q}$ 代数を考えることができる．この $\mathbb{Q}$ 代数を Fricke 環という．一般に，Fricke 指標で成り立つ公式は，Γ-Fricke 指標でも成り立つ．したがって，同様に $\mathrm{tr}_{\Gamma}(x)$ なる元で生成される $\mathbb{Q}$ 代数を考えることができ，これを Γ-Fricke 環ということにする．以下，自由群 F_n に対し，Γ-Fricke 環を $\mathfrak{X}_n^{\Gamma}$ で表すことにする．構成から，$\mathfrak{X}_n^{\Gamma} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ は自由群 F_n の Γ-指標多様体の座標環である．包含写像 $j : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ は全射 $\mathbb{Q}$ 代数射 $j^* : \mathfrak{X}_n^{\Gamma_2} \to \mathfrak{X}_n^{\Gamma_1}$ を誘導する．

自由群 F_n の自己同型群を $\mathrm{Aut}(F_n)$ と表すことにする．特に $\mathrm{Aut}(F_n)$ は F_n に右から作用しているものとし，$\sigma \in \mathrm{Aut}(F_n)$ に対して x^σ でその作用を表すことにする．このとき，

$$\mathrm{tr}_\Gamma(x)^\sigma = \mathrm{tr}_\Gamma(x^\sigma)$$

により，Γ-Fricke 環上に $\mathrm{Aut}(F_n)$ の右からの作用を定める．すると，包含写像 $j : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ から誘導される $j^* : \mathfrak{X}_n^{\Gamma_2} \to \mathfrak{X}_n^{\Gamma_1}$ が，$\mathrm{Aut}(F_n)$ 準同型になることが簡単にわかる．
各 $\mathfrak{X}_\Gamma$ のイデアル J_Γ を以下のように定める．

$$J_\Gamma = (\mathrm{tr}_\Gamma(x) - 2 \mid x \in F_n)$$

簡単にわかるように，これは極大イデアルである．この 2 は，自明表現のトレースの値である．すなわち，座標環の言葉で述べると，これは自由群の Γ 指標多様体の自明表現に対応する点と対応する極大イデアルである．ここで，$J_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$ は $\mathrm{Aut}(F_n)$ 不変なイデアルである [4]．したがって，全ての $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して，J_Γ は $\mathrm{Aut}(F_n)$ 不変なイデアルである．各イデアル J_Γ について，J_Γ への $\mathrm{Aut}(F_n)$ による作用から誘導される準同型

$$\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{GL}(J_\Gamma / J_\Gamma^{k+1})$$

を考える．$k \geq 1$ に対して，この準同型の核を $E_\Gamma(k)$ で表す．

$$E_\Gamma(1) \supset E_\Gamma(2) \supset \cdots \supset E_\Gamma(k) \supset \cdots$$

なる降下列を考える．明らかに $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ なら $E_{\Gamma_2}(k) \subset E_{\Gamma_1}(k)$ である．

以下，Johnson 準同型に類似した準同型を構成する．$\mathrm{gr}^k(J_\Gamma) = J_\Gamma^k / J_\Gamma^{k+1}$ とする．$f \in J_\Gamma$ に対して，$s_\sigma^\Gamma(f) = f^\sigma - f$ とおく．このとき，

$$\eta_k^\Gamma : E_\Gamma(k)/E_\Gamma(k+1) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}^1(J_\Gamma), \mathrm{gr}^{k+1}(J_\Gamma))$$

を，$\eta_k^\Gamma(\sigma)(f) = s_\sigma^\Gamma(f)$ によって定める．直接計算により，以下の式が成り立つことがわかる．

Lemma 3.1. 任意の $f \in J_\Gamma$，$\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(F_n)$ に対して，以下が成り立つ．

(1) $s_{\sigma\tau}^\Gamma(f) = (s_\sigma^\Gamma(f))^\tau - s_\tau^\Gamma(f)$,

(2) $s_1^\Gamma(f) = 0$,

(3) $s_{\sigma^{-1}}^\Gamma(f) = -(s_\sigma^\Gamma(f))^{\sigma^{-1}}$,

(4) $s_{[\sigma,\tau]}^\Gamma = (s_\tau^\Gamma(s_\sigma^\Gamma(f)) - s_\sigma^\Gamma(s_\tau^\Gamma(f)))^{\sigma^{-1}\tau^{-1}}$.

この写像を用いると，[4] と全く同様に，一般の $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して，以下の事実がわかる．

Proposition 3.2. 任意の $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して，$\{E_\Gamma(k)\}$ は中心的降下列をなし，特に *Andreadakis-Johnson* フィルトレーション $\{\mathcal{A}_n(k)\}$ に対し，$k \geq 1$ なら $E_\Gamma(k) \supset \mathcal{A}_n(2k)$.

4　$\Gamma = \mathrm{SU}(2)$，$\mathrm{SO}(2)$ の場合

η_k^Γ を計算するために必要な情報は，まずイデアル J_Γ の次数商の基底を決定することである．$\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の時には $k = 1, 2$ の $\mathrm{gr}^k(J_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})})$ についての基底は [4] において計算されている．この節では，$\Gamma = \mathrm{SU}(2)$ の場合の計算結果と，$\Gamma = \mathrm{SO}(2)$ の場合の計算結果について紹介する．

4.1 SU(2) の場合

まずはSU(2) の場合についての結果を紹介する．SU(2) の場合はSL$(2,\mathbb{C})$ の場合と同様の方針で計算を行うことができる．とくに，本証明はSL$(2,\mathbb{C})$ の場合の結果が導かれるため，SL$(2,\mathbb{C})$ の場合の証明より強い証明を与えている．

Theorem 4.1. $k=1,2$ に対し，$\mathrm{gr}^k(J_{\mathrm{SU}(2)}) \cong \mathrm{gr}^k(J_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})})$.

以下，計算の方針を $k=1$ の場合に記述する．

証明の概略． $1 \le j_1 < \ldots < j_l \le n$，$1 \le l \le 3$ に対して，$\mathrm{tr}_{\mathrm{SU}(2)}(x_{j_1}\ldots x_{j_l}) - 2 = t'_{j_1\ldots j_l}$ とおく．$g(t) \in J^2_{\mathrm{SU}(2)}$ とし，$d_i, d_{ij}, d_{ijk} \in \mathbb{Q}$ に対して，

$$f = \sum_{1\le i\le n} d_i t'_i + \sum_{1\le i<j\le n} d_{ij} t'_{ij} + \sum_{1\le i<j<k\le n} d_{ijk} t'_{ijk} + g(t)$$

とおく．$1 \le a < b < c \le n$ を固定する．表現 $\rho : F_n \to \mathrm{SU}(2)$ を以下のように定義する．

$$\rho(x_r) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{x\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & e^{-x\sqrt{-1}} \end{pmatrix} & (r=a), \\ \begin{pmatrix} \cos x & \sqrt{-1}\sin x \\ \sqrt{-1}\sin x & \cos x \end{pmatrix} & (r=b), \\ \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} & (r=c), \\ E_2 & (r \ne a,b,c), \end{cases}$$

$f(\rho)=0$ である．$f(\rho)$ を x に関してべき級数展開を行う．次数3の部分の係数を見ると，$d_{abc}=0$ となることがわかる．それぞれの係数に適した表現を見つけることで，全ての係数が0であることを示せる．

$k=2$ の場合も同様の方針で計算を行うことができる．とくに，得られる $k=2$ の場合の基底を書き下すと，以下のようになる．

$$\begin{aligned} S_2 = &\{t'_i t'_j \mid 1 \le i \le j \le n\} \cup \{t'_i t'_{ab} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le a < b \le n\} \\ &\cup \{t'_i t'_{abc} \mid 1 \le i \le n, 1 \le a < b < c \le n\} \\ &\cup \{t'_{ij} t'_{ab} \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le a < b \le n,\ (i,j) \le (a,b)\} \\ &\cup \{t'_{ab}t'_{abc}, t'_{ac}t'_{abc}, t'_{bc}t'_{abc} \mid 1 \le a < b < c \le n\} \\ &\cup \{t'_{ia}t'_{abc}, t'_{ib}t'_{abc}, t'_{ic}t'_{abc}, t'_{ia}t'_{ibc}, t'_{ib}t'_{iac}, t'_{ab}t'_{ibc}, t'_{ab}t'_{iac}, t'_{ac}t'_{ibc} \mid 1 \le i < a < b < c \le n\} \\ &\cup \{t'_{ja}t'_{ibc}, t'_{jb}t'_{iac}, t'_{jc}t'_{iab}, t'_{ab}t'_{ijc}, t'_{ac}t'_{ijb}, t'_{bc}t'_{ija} \mid 1 \le i < j < a < b < c \le n\}. \end{aligned}$$

この同型は包含写像 $j : \mathrm{SU}(2) \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が引き起こす準同型によって与えられる事がわかる．この準同型は，$\mathrm{Aut}(F_n)$ 同変な準同型だったので，以下の系を得る．

Corollary 4.2. $k=1,2$ に対して，$E_{\mathrm{SU}(2)}(k) \cong E_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$.

$E_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}(1) = E_{\mathrm{SU}(2)}(1)$ については，$\mathcal{A}_n(2)\cdot \mathrm{Inn}(F_n)$ と一致することが [4] で示されているが，$k \ge 2$ の場合にはほとんど何もわかっていない．

4.2 SO(2) の場合

SO(2) の場合はアーベル群であるから，明らかに SL(2, ℂ) の場合とは異なる結果が得られる．特に (4) の式が簡明になるため，結果が比較的簡単になる．

$$
{}_kT_l = \left\{ t'_{p_1,q_1} \cdots t'_{p_l,q_l} t'_{i_{l+1}} \cdots t'_{i_k} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le p_1 < q_1 < \cdots < p_l < q_l \le n, \\ 1 \le i_{l+1} \le \cdots \le i_k \le n \end{array} \right\}
$$

とおく．ここで，$t'_{j_1,\dots,j_l} = \mathrm{tr}_{\mathrm{SO}(2)}(x_{j_1} \dots x_{j_l}) - 2$ である．各 $k \ge 1$ に対して，

$$
T_k = \bigcup_{l=0}^{k} {}_kT_l
$$

とおく．技術的な補題により，各 T_k が $\mathrm{gr}^k(J_{\mathrm{SO}(2)})$ を生成することがわかる．

Theorem 4.3. 各 $k \ge 1$ に対して，T_k は $\mathrm{gr}^k(J_{\mathrm{SO}(2)})$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底である．

証明の方針は，$\Gamma = \mathrm{SU}(2)$ の場合と同様，べき級数展開を行い，その係数を比較することによって得られるが，より一括した結果を得ることができる．基底が決定できたので，$E_{\mathrm{SO}(2)}(k)$ の構造が計算できる．

Theorem 4.4. 各 $k \ge 1$ に対し， $E_{\mathrm{SO}(2)}(k) = \langle \iota \rangle \mathrm{IA}(F_n)$．ここで，$\iota$ は以下で定義される自己同型写像である．$\iota(x_i) = x_i^{-1}$, $i = 1, \dots, n$.

これにより，$E_{\mathrm{SO}(2)}(k)$ の構造がわかった．加えて，[2] の結果から，以下がわかる．

Corollary 4.5. Γ を $\mathrm{SO}(2) \subset \Gamma$ なる $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の部分群とする．$k \ge 2$，$n \ge 2k + 3$ に対して， $E_\Gamma(k)$ は有限生成である．

References

[1] S. Andreadakis; *On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups*,Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 239-268.

[2] T. Church, M. Ershov, A. Putman; *On finite generation of the Johnson filtrations*, preprint 2017. arXiv:1711.04779.

[3] R. Fricke and F. Klein, Vorlesungen; *über die Teorie der automorphen Functionen*, Volume 1, B.G. Teuber (1897), 365–370.

[4] E. Hatakenaka and T. Satoh; *On the graded quotients of the ring of Fricke characters of a free group*, arXiv:1206.1500.

[5] E. Hatakenaka and T. Satoh; *On the rings of Fricke characters of free abelian groups*, arXiv:1401.6268.

[6] R. Horowitz; *Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group*, Comm. on Pure and Applied Math., Vol. XXV (1972), 635-649.

[7] R. Horowitz; *Induced automorphisms on Fricke characters of free groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 208 (1975), 41–50.

[8] W. Magnus; *Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups*, Math. Z. 170 (1980), 91-103.

[9] T. Satoh; *A survey of the Johnson homomorphisms of the automorphism groups of free groups and related topics*, in Handbook of Teichmüller theory, V, edited by A. Papadopoulos, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 26, Eur. Math. Soc., Zürich, (2016), 167–209.

[10] A. Whittemore; *On special linear characters of free groups of rank $n \geq 4$*, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 383–388.