Localized S^1-equivariant index of non-compact manifolds and an analytic counterpart of Witten's equivariant index of loop spaces

新潟大学・教育学部　高田　土満

Doman Takata
Facalty of Education,
Niigata University

概要

本稿では，2022 年 5 月に行われた研究集会「変換群論の新潮流」での筆者の講演の概要，そのもととなった論文 [Tak6] の概要，およびその周辺，予備知識について，主に幾何学を専門とした読者を想定して論ずる．

1　導入

Atiyah-Singer の指数定理とは，コンパクト多様体の Dirac 作用素の Fredholm 指数が，特性類の積分という多様体の微分トポロジー的な量で書けるということを主張する定理である（[ASi1, ASi2, ASe]）．本稿の目的は，その定理の同変版をループ空間に対して定式化するという私の論文 [Tak6] について，その周辺も含めて解説することである．

まず，Atiyah-Singer の指数定理そのものの復習から始める．M を閉多様体，W を M 上の Clifford 束，D をその上の Dirac 作用素とする．Dirac 作用素とは，二乗するとラプラシアンになるような一階の微分作用素のことであり，Clifford 束とは，それが定義できるようなベクトル束のことである [古田, 第 1，2 章]．このとき，D はフレドホルム（すなわち，$\ker(D)$ および $\mathrm{coker}(D)$ がともに有限次元）であって，その指数 $\dim(\ker(D)) - \dim(\mathrm{coker}(D))$ は W の特性類の積分で書ける，というのが指数定理の主張である．

M がコンパクト Lie 群 G の作用を持ち，それが W に持ち上がるとき，この定理は改良される．D が G 同変であるとすると，$\ker(D)$ および $\mathrm{coker}(D)$ はともに G の作用を持つ（$\ker(D)$ の元や $\mathrm{Im}(D)$ の元を G で動かしても再び $\ker(D)$ の元や $\mathrm{Im}(D)$ の元になるため）．すなわち，G の有限次元表現が二つ得られるのだが，その「形式的な差」を **D の同変指数**と呼ぶ．その指数は G の表現環 $R(G)$ に属する．Atiyah-Segal-Singer の固定点定理は，その同変指数が，M の G 作用に関する固定点集合 M^G 上のデータで決まることを主張する [ASe]．この定理を標語的に書くと，以下のようになる．

$$D\text{ の解析的同変指数} = \int_{M^G} \text{特性類} \tag{1}$$

Witten は，この右辺がコンパクト多様体のループ空間で意味を持つことに気づき，その右辺を以て「左辺を定義」した [Wit]．Witten は同論文で，その「同変指数」の性質を，ループ空間の位相的な考察から予想した．その予想は Bott や Taubes によって，有限次元的な手法で示された [Tau, BT]．[Tak6] の主結果は，[Wit] を念頭におきつつ，ループ空間の同変指数定理を定式化し証明することである．本稿では，Atiyah-Segal-Singer の固定点公式のべき級数環を用いた証明の概要の説明から始めて，それを

非コンパクト多様体に一般化し，さらにそれのループ空間版を定義する．講演と同様に，理論の解析サイドを主に論ずることにして，トポロジーサイドは論文 [Tak6] に譲ることにする．

2 固定点公式のべき級数環による証明とその一般化

この節では，コンパクト多様体の固定点公式のべき級数環による証明を紹介する．そのための道具の紹介から始めよう．

2.1 KK 理論

非可換幾何の成果の一つは，指数理論の「代数トポロジー化」である．代数トポロジーは，具体的な幾何学的対象の考察を，それらのなす集合に代数的な構造を入れたものの考察や，それらの間の関係の考察に置き換える．例えば基本群は，位相空間のループのホモトピー類の集合に他ならない．その空間が多様体で，一次閉形式が与えられていれば，ループに沿った閉形式の積分によって基本群から $\mathbb{R}$ への準同型が定義された．それと同様に，「ベクトル束や Dirac 作用素のホモトピー類の集合」を，代数的な対象やそれらの間の関係を用いて上手く扱いたい．そのときに非可換幾何は威力を発揮する．すなわち，非可換幾何的不変量である KK 理論は，ベクトル束，Dirac 作用素，指数準同型，コンパクト群の表現環，空間の間の連続写像，その誘導準同型などの概念を一挙に整理統合したものである．厳密な定義を理解するのは簡単ではないうえに本稿を読むためにはその必要もないので，細かいことを省略して，形式的・代数的・幾何的な側面だけを説明する．この小節の内容はさしあたり読み飛ばし，必要に応じて辞書的に参照していただきたい．詳細が知りたい方は [Bla, JT, Kas1] 等を参照されたい．

まず，C^* 環とは，「対合」と呼ばれる複素共役の一般化を備えた $\mathbb{C}$ 上の Banach 環であって，C^* 条件という，対合とノルムの整合性を持ったもののことである．対合は代数的な性質で，ノルムは解析的な性質だから，「それらが整合的である」という条件から良い性質が成り立つ．例えば，局所コンパクトハウスドルフ空間 X に，コンパクト台の複素数値関数のなす環 $C_c(X)$ の完備化 $C_0(X)$ を対応させることで，局所コンパクトハウスドルフ空間のなす圏と可換な C^* 環のなす圏は反変同値である．この性質を **Gelfand-Naimark の定理**と呼ぶ（C^* 環の教科書，例えば [Mur] 参照）．それ以外の C^* 環の例としては，Hilbert 空間上の有界線形作用素全体のなす環やコンパクト作用素全体のなす環が挙げられる．また，C^* 環をファイバーに持つファイバー束があれば，その「切断環」を考えることで再び C^* 環を得ることができる．

G を群とするとき，G 同変 KK 群とは，G 作用を持つ C^* 環のペアに対して以下のように定義される不変量である．

定義 2.1. (1) A，B を G 作用を持つ C^* 環とする．G **同変 Kasparov** (A, B) **加群**とは，

- G 作用を持つ Hilbert B 加群 E（B に値を取る「内積」が定義された Banach 空間で，右 B 加群の構造を持つもの）
- A から「B 線形写像全体」への G 同変準同型 π，すなわち E の左 A 加群の構造
- E 上の B 線形写像 T であって，適切な条件（$\pi(a)$ との整合性，ある種のフレドホルム性，ある種の同変性）を満たすもの

の三つ組のことである．

(2) 同変 KK 群 $KK_G(A, B)$ とは，G 同変 Kasparov (A, B) 加群の「ホモトピー類」のなす集合である．これは加群の直和によって和が定義されたアーベル群である．

KK 群の元としては，以下のようなものが挙げられる[*1]．

例 2.2. (1) M が閉多様体のとき，$KK(C(M), \mathbb{C})$ は M の K ホモロジー群に同型である．特に，M 上の Clifford 束 W，その上の Dirac 作用素 D が与えられたとき，Hilbert 空間 $L^2(M, W)$，関数の掛け算で定義される $C(M)$ の $L^2(M, W)$ 上の表現 π，作用素 D の三つ組は $KK(C(M), \mathbb{C})$ の要素 $[D]$ を定める．

(2) X がコンパクト群 G の作用を持つ局所コンパクトハウスドルフ空間のとき，$KK_G(\mathbb{C}, C_0(X))$ は X の位相的 G 同変 K 群 $K_G^0(X)$ に一致する．特に，X がコンパクトなとき，X 上の有限階数複素ベクトル束 E は，連続切断の空間 $C(X, E)$，関数の掛け算で定義される左 $C(X)$ 加群の構造 π，作用素 0 の三つ組によって，$KK(\mathbb{C}, C(X))$ の要素 $[E]$ を定める．本稿では E が階数 1 の自明束である場合が特に重要なので，そのような自明束を $\underline{\mathbb{C}}_X$ と書く．

(3) G がコンパクト群のとき，$KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong R(G)$.

(4) より一般に，A を C^* 環とすると，$KK(A, \mathbb{C})$ は解析的 K ホモロジー群（例えば [HR] 参照）に一致し，$KK(\mathbb{C}, A)$ は C^* 環の K_0 群に（例えば [Bla] 参照）一致する．

(5) C^* 環の間の $*$ 準同型 $f : A \to B$ は，KK 群の元 $[f] \in KK(A, B)$ を定める． 特に，$\mathrm{id}_A : A \to A$ は $KK(A, A)$ の元を定めるが，これを $\mathbf{1}_A$ と書く．

(6) 特に，局所コンパクトハウスドルフ空間 X，Y の間の固有連続写像 $F : X \to Y$ は関数の引き戻しによって $*$ 準同型 $F^* : C_0(Y) \to C_0(X)$ を定めるため，$[F^*] \in KK(C_0(Y), C_0(X))$ を定める．また，開埋め込み $\iota : U \hookrightarrow X$ はゼロ拡張によって $*$ 準同型 $\iota_* : C_0(U) \to C_0(X)$ を定めるため，$[\iota_*] \in KK(C_0(U), C_0(X))$ を定める．

(7) E を局所コンパクト空間 X 上の（$\mathbb{Z}_2$ 次数などはついていない普通の）ベクトル束とすると，E は $K^0(X)$ の元は定めないが，$KK(C_0(X), C_0(X))$ の元を定める[*2]

KK 理論の一番の強みは，Kasparov 積と呼ばれる積

$$KK_G(A, A_1) \times KK_G(A_1, B) \to KK_G(A, B)$$

が定義されることである．Kasparov (A, A_1) 加群 (E_1, π_1, T_1) と Kasparov (A_1, B) 加群 (E_2, π_2, T_2) との Kasparov 積は，だいたい以下のように与えられる．まず，加群はA_1 上のテンソル積 $E_1 \widehat{\otimes}_{A_1} E_2$，表現は $\pi_1 \widehat{\otimes} \mathrm{id}$，作用素は T_1 と T_2 の情報が両方入ったものを**頑張って定義**する[*3]．ただし，記号 $\widehat{\otimes}_{A_1}$ は「A_1 上の次数つきテンソル積」を意味する．そのため，$x \in KK_G(A, A_1)$ と $y \in KK_G(A_1, B)$ の Kasparov 積は $x \widehat{\otimes}_{A_1} y$ または単に $x \widehat{\otimes} y$ と書かれる．Kasparov 積は結合的，すなわち $(x \widehat{\otimes} y) \widehat{\otimes} z = x \widehat{\otimes} (y \widehat{\otimes} z)$ が成り立つ．

KK 理論にはもう一つ，$\tau_D : KK_G(A, B) \to KK_G(D \widehat{\otimes} A, D \widehat{\otimes} B)$ という操作がある．ただし D は C^* 環で，$\tau_D(E, \pi, T) := (D \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} E, \mathrm{id} \widehat{\otimes} \pi, \mathrm{id} \widehat{\otimes} T)$ で定義される．これによって，Kasparov 積は

$$KK_G(A, A_0 \widehat{\otimes} A_1) \times KK_G(A_1 \widehat{\otimes} A_2, B) \to KK_G(A \widehat{\otimes} A_2, A_0 \widehat{\otimes} B)$$

に拡張される．すなわち，$x \widehat{\otimes}_{A_1} y := \tau_{A_2}(x) \widehat{\otimes}_{A_0 \widehat{\otimes} A_1 \widehat{\otimes} A_2} \tau_{A_0}(y)$.

この Kasparov 積は，以下に挙げるように変幻自在である．

[*1] ここで余談を．私がペンシルバニア州立大学に滞在したときの受け入れ教員である Nigel Higson 先生は，セミナーで「geometric K-homology の元は，タキシードを着て蝶ネクタイをしているようなもので，サイクルも同値関係も少ない．一方 analytic K-homology は**ゴミ箱**のようなもので，サイクルも同値関係もめちゃくちゃ多い（曖昧な記憶による意訳）」ということを言っていた．例を見れば分かる通り，「ゴミ箱」具合で言えば，KK 理論の方が圧倒的に高い．

[*2] これは間違ったことは言っていないが，後で少しだけ説明する $\mathcal{R}KK$ 理論を使うほうが自然である．

[*3] 詳しくは先に挙げた文献を参考のこと．関数解析的にハードな議論によって（まさに「頑張って」）証明される Kasparov technical theorem を用いることで，その存在・ホモトピー不変性・結合律を証明する．ちなみに，Kasparov 加群に付加的な情報を与えることで，Kasparov 積を明示的に書けるようにするという研究がある [Mes]．発想は単純だし，指数理論の微分幾何的な枠組みを少しでも知っている人にはわかりやすいが，C^* 環で話が閉じず，理論の枠組みがハードになる．

例 2.3. (1) Kasparov 積によって $KK_G(A,B)$ は $R(G)=KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ 加群の構造を持つ．

(2) C^* 環の間の $*$ 準同型 $f:A\to B$ について，$[f]$ による Kasparov 積は K 理論，K ホモロジーへの誘導準同型に一致する．すなわち，$x\in KK(\mathbb{C},A)=K_0(A)$ に対して $f_*(x)=x\widehat{\otimes}[f]\in KK(\mathbb{C},B)=K_0(B)$，$y\in KK(B,\mathbb{C})=K^0(B)$ に対して $f^*(y)=[f]\widehat{\otimes}y\in KK(A,\mathbb{C})=K^0(A)$ が成り立つ．

(3) 任意の $x\in KK(A,B)$ に対して $\mathbf{1}_A\widehat{\otimes}x=x$ および $x\widehat{\otimes}\mathbf{1}_B=x$ が成り立つ．

(4) M を完備 Riemann 多様体としたとき，Diac 作用素 D は K ホモロジー群の元 $[D]$ を，[古田, 第 9 章] の意味でコンパクト台ベクトル束 E は M の K 群の元 $[E]$ を定めるが，$[E]\widehat{\otimes}[D]\in KK(\mathbb{C},\mathbb{C})\cong\mathbb{Z}$ は D を E でひねって得られるベクトル束のフレドホルム指数に一致する．

(5) X を局所コンパクトハウスドルフ空間，E を X 上の複素ベクトル束とすると，Thom 同型 $H^*_{cv}(E)\cong H^{*-\mathrm{rank}(E)}(X)$ が成り立つが，その K 理論版が次のように定式化できる．すなわち，E の Thom 類と呼ぶべき KK 群の元 $[\tau_E]\in KK(C_0(X),C_0(E))$ と「その逆」と呼ぶべき元 $[d_E]\in KK(C_0(E),C_0(X))$ が定義され，$[\tau_E]\widehat{\otimes}_{C_0(E)}[d_E]=\mathbf{1}_{C_0(X)}$ および $[d_E]\widehat{\otimes}_{C_0(X)}[\tau_E]=\mathbf{1}_{C_0(E)}$ が成り立つ[*4]．

2.2　コンパクトな場合の証明のアウトライン

さて，話を指数理論に戻そう．フレドホルム作用素の指数は核の次元から余核の次元を引いて定義されたが，フレドホルム作用素は指数が等しければホモトピックであるから，「指数を取る」という操作は，「関数環の情報を忘れ，『作用素と関数空間の組』のホモトピー類を取る操作」であると言って良い．前節冒頭でも述べた意味で代数トポロジーの精神に則るのであれば，「解析的指数を取る」という操作は，「Dirac 作用素のなす集合から指数のなす集合への準同型」であってほしい．実際に，次の補題が成り立つ．

補題 2.4. (1) M を閉多様体とする．M 上の Dirac 作用素 D に対してその指数 $\mathrm{ind}(D)$ を返す準同型 $KK(C(M),\mathbb{C})\to\mathbb{Z}$ は，次の（互いに同値な）いずれの操作でも得られる．

- $z\in\mathbb{C}$ に対して恒等的に z を取る関数を対応させる写像 $\pi_M^*:\mathbb{C}\to C(M)$ による K ホモロジー群の元 $[D]$ の引き戻し．
- M 上の自明束が定める K 群の元 $[\underline{\mathbb{C}}_M]\in KK(\mathbb{C},C(M))$ との Kasparov 積．

(2) 同じ性質の同変版が成り立つ．すなわち，閉多様体 M にコンパクト Lie 群 G が作用しているとき，M 上の G 同変 Dirac 作用素の指数は

$$[\underline{\mathbb{C}}_M]\widehat{\otimes}_{C(M)}[D]=\pi_M^*([D])\in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})=R(G)$$

で得られる．

注意 2.5. いずれの操作でも，M がコンパクトであることが重要である．

この節の目的は，$G=S^1$ のとき，上の補題 (2) の同変指数が，M の G 作用による固定点集合のデータで記述できることを，KK 理論の言葉で説明することである．

そのためのアイディアは次のとおりである．M をコンパクト Riemann 多様体で，等長 S^1 作用があるものとする．M^{S^1} を固定点集合，U をその管状近傍とする．包含写像を $M^{S^1}\xrightarrow{j}U\xrightarrow{k}M$ という記号で表す．$i:=k\circ j:M^{S^1}\hookrightarrow M$ としておく．すると，Kasparov 積が結合的であることから次は可換

*4 [Kas2] で述べられている通り，$\mathcal{R}KK$ 理論で述べる方が自然であるが，本稿では KK 理論でも用いる．

である．

$$\begin{array}{ccc} KK_{S^1}(C(M^{S^1}),\mathbb{C}) & \xrightarrow{[i^*]\widehat{\otimes}-} & KK_{S^1}(C(M),\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle [\mathbb{C}_{M^{S^1}}]\widehat{\otimes}-}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\mathbb{C}_M]\widehat{\otimes}-} \\ R(S^1) & \xrightarrow{=} & R(S^1). \end{array} \tag{2}$$

したがって，もし $[i^*]\widehat{\otimes}-$ が可逆ならば，これで問題は解決である．実際には，そのままでは可逆とは限らず，原論文 [ASe] の議論と同様，何か代数的なトリックが必要である．$R(S^1)=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ であることに注意して，本稿では次を代数的なトリックとして採用する．

定義 2.6. $R(S^1)$ 上の代数

$$R(S^1)_{\mathrm{pos}} := \left\{ \sum_n a_n X^n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{Z}, n \ll 0 \text{ ならば } a_n = 0 \right\}$$

を考え，$R(S^1)$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して，その係数拡大 $\mathcal{M}_{\mathrm{pos}}$ を $\mathcal{M}\otimes_{R(S^1)} R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ によって定義し，$R(S^1)$ 上の加群 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の準同型 f に対応する $R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ 上の加群 $\mathcal{M}_{\mathrm{pos}}$ と $\mathcal{N}_{\mathrm{pos}}$ の間の準同型を f_{pos} と書く．

するとこの代数には，可逆元がたくさん含まれることが分かる．次は等比級数の公式の簡単な演習問題である．

補題 2.7. $\sum_{n\geq N} a_n q^n \in R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ が可逆であるための必要十分条件は $a_N=\pm 1$ であることである．

これを念頭において，M，U，M^{S^1} の K ホモロジー群を比較しよう．そのために関数環における可換図式

$$\begin{tikzcd} C(M) & & C_0(U) \arrow[ll, "k_*"'] \arrow[dl, "j^*"] \\ & C(M^{S^1}) \arrow[from=ul, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

を考える．ただし，k_* は開埋め込みが誘導するゼロ拡張，i^*，j^* は固有埋め込みが誘導する引き戻しである．すると，可換性 $i^*\circ k_* = j^*$ から，KK_{S^1} 理論の可換図式

$$\begin{tikzcd} KK_{S^1}(C(M),\mathbb{C}) \arrow[rr, "{[k_*]\widehat{\otimes}-}"] & & KK_{S^1}(C_0(U),\mathbb{C}) \\ & KK_{S^1}(C(M^{S^1}),\mathbb{C}) \arrow[ul, "{[i^*]\widehat{\otimes}-}"] \arrow[ur, "{[j^*]\widehat{\otimes}-}"'] & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって，

$$\text{“}[i^*]^{-1} = [j^*]^{-1}\widehat{\otimes}[k_*]\text{”} \tag{3}$$

が成り立ちそうである．

ここで $[j^*]$ についてなのだが，U は M^{S^1} の管状近傍だから，M^{S^1} の法束のゼロ切断の近傍と微分同相である．この法束には S^1 作用によって複素ベクトル束の構造が入る．このとき，法束の各ファイバーには S^1 の表現空間の構造を持つが，その表現のウェイトがすべて正になるように複素構造を定義する．よって例 2.3 (5) の Thom 同型によって，両者は KK 理論においては全く同等である．Thom 類を $[\tau_U]\in KK_{S^1}(C(M^{S^1}),C_0(U))$ と書くと，住んでいる KK 群だけで判断すれば，$[\tau_U]$ は $[j^*]$ の逆元の候補である．残念ながら $[\tau_U]\widehat{\otimes}[j^*]$ と $\mathbf{1}_{C(M)}$ は異なり，$[\tau_U]$ は $[j^*]$ の逆元ではないのだが，例 2.3 (2) の C^* 環の準同型が作る KK 群の元との Kasparov 積は誘導準同型に一致するため，$[\tau_U]\widehat{\otimes}[j^*]$ は Thom 類のゼロ切断による引き戻し，すなわち U の Euler 類 $[e_U]$ に他ならない．すなわち $[\tau_U]\widehat{\otimes}[j^*]=[e_U]$．よって次が分かる．

観察 2.8. 「$[j^*]$ の逆元」が定義できるとすれば，それは $[\tau_U]$ と「U の Euler 類の逆元」との Kasparov 積であるべきである．

もともとの KK 理論のままでは，Euler 類が可逆であるとは限らない，そこで，$R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ をテンソルすることで可逆元を増やしてしまう．すると，補題 2.7 と，M^{S^1} の法束の複素構造の決め方から，$[e_U]$ は $KK_{S^1}(C(M^{S^1}), C(M^{S^1}))_{\mathrm{pos}}$ において可逆である．その逆元を $[e_U^{-1}]$ と書くと次が成り立つ．

$$[e_U^{-1}]\widehat{\otimes}[\tau_U]\widehat{\otimes}[j^*] = \mathbf{1}_{C(M)}.$$

したがって，次が示された．

定理 2.9. 同変指数準同型 $K_0^{S^1}(M) \to R(S^1)$ に包含写像 $R(S^1) \hookrightarrow R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ を合成させたものは，次の合成で書ける．

$$KK_{S^1}(C(M),\mathbb{C}) \xrightarrow{[k_*]\widehat{\otimes}-} KK_{S^1}(C_0(U),\mathbb{C}) \xrightarrow{[\tau_U]\widehat{\otimes}-} KK_{S^1}(C(M^{S^1}),\mathbb{C}) \xrightarrow{[e_U^{-1}]\widehat{\otimes}-}$$
$$KK_{S^1}(C(M^{S^1}),\mathbb{C})_{\mathrm{pos}} \xrightarrow{[\mathbb{C}_{M^{S^1}}]\widehat{\otimes}-} R(S^1)_{\mathrm{pos}}.$$

特に，M の S^1 同変指数は M の固定点集合の情報で書ける．

したがって，指数の情報が固定点とその法束の情報にまで局所化していることが分かる．もっとも，$[\tau_U]\widehat{\otimes}-$ という操作はファイバーごとに Bott 元とのペアリングを取る操作であるため，事実上指数を計算していることになるはずで，上の定理は実用性に欠ける．しかし，[Kas2, Theorem 4.3] を用いて（以下 **K 理論的 Poincaré 双対**と呼ぶ），「多様体の K ホモロジー群たちの系列」を，「接束の位相的 K 理論の系列」に書き換えることで，上の準同型を位相的データで書き換えることができる．すると，K 理論的 Poincaré 双対では，Thom 同型はゼロ切断による引き戻しに対応するため[*5]，公式は極めて実用的なものになる．多様体が偶数次元かつ $Spin^c$ のとき，すなわちいわゆる「K 理論的に向き付可能」な場合，多様体の K ホモロジーと K 理論は同型になるので，公式は更に簡単になる．詳細は [Tak6] に譲る．

2.3 非コンパクト多様体への一般化

この節の目的は，前節の定理の非コンパクト多様体版を定式化することであるが，新しく付け加えることは何もない．固定点公式を逆手に取って定義としてしまうだけである．

定義 2.10. X を完備 Riemann 多様体で，等長な S^1 作用を持つものとする．X の S^1 作用に関する固定点集合 X^{S^1} がコンパクトであると仮定する．U を X^{S^1} の管状近傍とする．包含写像を $X^{S^1} \xrightarrow{j} U \xrightarrow{k} X$ という記号で表し，$i := k \circ j : X^{S^1} \hookrightarrow X$ としておく．このとき，**S^1 同変局所化指数** $\mathrm{ind}_{S^1}^{\mathrm{pos}} : KK_{S^1}(C_0(X),\mathbb{C}) \to R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ を，次の合成で定義する．

$$KK_{S^1}(C_0(X),\mathbb{C}) \xrightarrow{[k_*]\widehat{\otimes}-} KK_{S^1}(C_0(U),\mathbb{C}) \xrightarrow{[\tau_U]\widehat{\otimes}-} KK_{S^1}(C(X^{S^1}),\mathbb{C}) \xrightarrow{[e_U^{-1}]\widehat{\otimes}-}$$
$$KK_{S^1}(C(X^{S^1}),\mathbb{C})_{\mathrm{pos}} \xrightarrow{[\mathbb{C}_{X^{S^1}}]\widehat{\otimes}-} R(S^1)_{\mathrm{pos}}.$$

注意 2.11. S^1 同変局所化指数は，$[D] \in KK_{S^1}(C_0(X),\mathbb{C}) = K_0^{S^1}(X)$ と

$$[\underline{\mathbb{C}}_{X^{S^1}}]\widehat{\otimes}[e_U^{-1}]\widehat{\otimes}[\tau_U]\widehat{\otimes}[k_*] \in KK_{S^1}(\mathbb{C}, C_0(X))_{\mathrm{pos}}$$

---

*5 これは，ホモロジー群の間の Gysin 準同型は，Poincaré 双対の下でコホモロジー群の引き戻しに対応することに全く平行する．

との Kasparov 積に一致する．したがって S^1 同変局所化指数は，Dirac 作用素とベクトル束とのある種のペアリング（の列）と言える．

K 理論的 Poincaré 双対は非コンパクト多様体でも問題なく成り立つので，上の系列を位相的 K 理論の系列に書き換えられることも定理 2.9 と全く同様である．

コホモロジー公式を書いていない以上，本稿の情報だけでは以下の例は理解できないが，一応挙げておこう．

例 2.12. $X = \mathbb{C}$ とし，S^1 がウェイト $k \neq 0$ で線形に作用するとする．このとき，固定点は原点 O のみで，定理の仮定を満たす．X の複素構造を用いて定義される Spinor 束 $S = \underline{\mathbb{C}}_X \widehat{\oplus} TX$ 上の Dirac 作用素 D の指数を定義したい．O における法束の複素構造は，$k > 0$ ならば X の複素構造そのもの，$k < 0$ ならば X の複素構造と共役な複素構造によって与えられる．この微妙な差によって，指数の表示は k の符号によって変わり，結果だけを書くと

$$\mathrm{ind}^{\mathrm{pos}}_{S^1}([D]) = \begin{cases} q^0 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \cdots & (k > 0), \\ -q^k(q^0 + q^{|k|} + q^{2|k|} + q^{3|k|} + \cdots) & (k < 0). \end{cases}$$

となる．

指数定理の非コンパクト多様体への一般化としては [HW] 以外にも多く知られており，筆者の非力によりまとめきれないが，順不同に挙げておく．まず，[Cal] では，無限遠で可逆なポテンシャルをもつ Dirac 作用素の指数定理が扱われている．この指数は，K 理論と K ホモロジーのペアリングとしても得られるようである．このポテンシャルは Clifford 積とは反可換であるが，Clifford 積によって Dirac 作用素を摂動させて得られる指数理論として [Bra] がある．その KK 理論的な再定式化が [LRS] で論じられた．群作用方向の Dirac 作用素によって Dirac 作用素を摂動させて得られる指数理論として [FFY, Fuj] があり，その KK 理論的な解釈が藤田氏自身によって研究されている．これらの関係は判然としないが，何か「共通の言語」で記述することで，その性質や関係を調べることができるのではないかと思う．KK 理論は，例 2.2，2.3 で述べた通り非常に柔軟な道具なので，非常に有用な「共通な言語」を提供しうるのではないかと思っている．

2.4　先行研究との比較

前小節までの構成は，[HW] を大いに参考にしている．それだけではなく，結果として得られる指数もほとんど同じ情報を与える．ここでは，[HW] の指数と我々の指数を比較する．

そのために [HW] の指数の構成（[ASe] とほとんど同じである）を復習する．$g \in S^1$ を生成元とする．$R(S^1)$ は，表現の指標を考えることで S^1 の関数環の部分環になる．そこで I_g を，指標が g で消える表現で生成される $R(G)$ のイデアルとする．このとき，$R(G)$ 加群の g での局所化とは，$R(G)_g := (R(G) - I_g)^{-1} R(G)$ とのテンソル積のことである．[HW] の指数とは，定義 2.10 の構成で「$R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ とのテンソル積」を「g による局所化」に置き換え，「『Thom 同型』と『Euler 類の逆のテンソル積』の合成」を『$[i^*]$ の逆元（局所化によって $[i^*]$ は可逆になる）との Kasparov 積』に置き換えたものである．その指数を ind_g と書く．

この時点で，我々の指数と [HW] の指数はいかにも対応しそうだが，正確な対応は次のように定式化できる．

定義 2.13. S_g を，g で指標が消えない，最低次係数が 1 の $R(G)$ の元を集めた集合とし，$R(G)_{g,\mathrm{New}} := S_g^{-1} R(G)$ とする．

すると，局所化の不変性から，準同型 $\Phi_1 : R(G)_{g,\mathrm{New}} \to R(G)_g$ および $\Phi_2 : R(G)_{g,\mathrm{New}} \to R(G)_{\mathrm{pos}}$

が定義できる．また，通常の局所化を S_g を用いた局所化に置き換えることで，$\mathrm{ind}_{g,\mathrm{New}}: K_0^{S^1}(X) \to R(G)_{g,\mathrm{New}}$ も定義できる．

命題 2.14. 次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} & K_{S^1}(X) \arrow[dl, "\mathrm{ind}_{S^1}^{\mathrm{pos}}"'] \arrow[d, "\mathrm{ind}_{g,\mathrm{New}}"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_g"] & \\ R(S^1)_{\mathrm{pos}} & R(S^1)_{g,\mathrm{New}} \arrow[l, "\Phi_2"] \arrow[r, "\Phi_1"'] & R(S^1)_g. \end{tikzcd}$$

では，これまで我々の構成は単に既存の指数を $G = S^1$ に限定したものかというと，そんなことは決して無い．べき級数環を使うメリットは，無限次元化を許す点にある．例えば，S^1 作用を持つ位相空間 X と，各整数 n に対して定まる X の S^1 同変 K 理論の元 $[E_n]$ が，「$n \ll 0$ ならば $[E_n] = 0$」であって，かつ適当な条件を満たすなら，無限和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}[E_n] \otimes q^n$ は $K_{S^1}^*(X)_{\mathrm{pos}}$ の元を定める*6．次節では，この性質を用いて，S^1 同変局所化指数のループ空間版を定義する．

3 ループ空間の指数定理

3.1 無限次元の難しさと非可換幾何的準備

前節の内容をループ空間に拡張したい．前節での議論を見れば分かるように，関数環を用いて幾何学の話を作用素環の世界に移してしまえば，あとの構成はすべて KK 理論的に記述されてしまう．しかし無限次元では，その最初のステップでいきなり困る．何故なら，既に言及した Gelfand-Naimark の定理によって可換な C^* 環のなす圏と局所コンパクトハウスドルフ空間のなす圏は反変同値であるから，局所コンパクトでない空間である無限次元多様体上の「可換な連続関数環」を考えると，それは別の局所コンパクトハウスドルフ空間の関数環になってしまう．これでは「無限次元多様体を非可換幾何を用いて研究できている」とは言えない．

しかし上の定理は，非可換な C^* 環については何も言っていない*7．Gelfand-Naimark の定理ほどきれいな対応はできなくても，何らかの意味で，「無限次元多様体に C^* 環を人工的に対応させる」ということはできるかもしれない．そのような研究は，次の Higson-Kasparov-Trout の結果に始まる．

定義 3.1 ([HKT]). (1) $\mathcal{S}$ を，$C_0(\mathbb{R})$ に偶関数／奇関数によって $\mathbb{Z}_2$ 次数を与えたものとする．

(2) 有限次元 Riemann 多様体 M のクリフォード代数値関数環を $Cl_\tau(M) := C_0(M, Cl(TM))$ と書く．V を有限次元ユークリッド空間とし，$Cl_\tau(V)$ 上の作用素 C_V を次で定義する：

$$(C_V f)(v) = vf(v).$$

(3) $\beta_{V,W\oplus V} : \mathcal{S}\widehat{\otimes}Cl_\tau(V) \to \mathcal{S}\widehat{\otimes}Cl_\tau(W\oplus V)$ を，$Cl_\tau(W\oplus V) \cong Cl_\tau(W)\widehat{\otimes}Cl_\tau(V)$ の下で，次のように定義する：

$$\beta_{V,W\oplus V}(f\widehat{\otimes}\phi) := f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C_W)\widehat{\otimes}\phi.$$

(4) Hilbert 空間 H に対し，C^* 環 $\mathcal{A}(H)$ を C^* 環の帰納極限

$$\mathcal{A}(H) := \varinjlim_{V\subseteq H} \mathcal{S}\widehat{\otimes}Cl_\tau(V)$$

によって定義する．ただし V は H の有限次元部分空間を走る．

---

*6 例えば S^1 作用が自明で，$K_{S^1}^0(X) \cong K^0(X)\otimes R(S^1)$ の下で $E_n = E_n' \otimes q^0$ と書けるときは，無限和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}[E_n]\otimes q^n$ は $K_{S^1}^*(X)_{\mathrm{pos}}$ の元を定める．$[E_n] = [\underline{\mathbb{C}}_X]\otimes q^{-n}$ の場合は，無限和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}[E_n]\otimes q^n$ は $K_{S^1}^*(X)_{\mathrm{pos}}$ の元を定めない．無限和が意味を持つ条件を考えることに意味があるように思えないので，ここでは曖昧な書き方をしておいた．

*7 余談．「任意の C^* 環は，ある Hilbert 空間上の有界作用素全体の C^* 環の部分 C^* 環として実現できる」という定理があるが，ややこしいことに，これも Gelfand-Naimark の定理という．

すると，次が分かる．要するに，$\mathcal{A}(H)$ は「Bott 周期性の無限次元版」を実現している．明確な定式化については，[Tak5] も見よ．

命題 3.2 ([HKT])**.** (1) $\beta_{V,W\oplus V}$ は K 理論に同型を導き，Bott 周期性に対応する．

(2) $\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{A}(H)$ は K 理論に同型を導く．

この定義では $\mathcal{A}(H)$ の元がかなり具体的に書け，それを用いた解析をすることができる [Tak3]．しかしその定義は，Hilbert 空間以外の空間に一般化しづらいという弱点がある．[GWY] では，$\mathcal{A}(H)$ を再定式化することで Hilbert 空間に対する定義である上を，Hilbert-Hadamard 空間（一種の非正曲率空間）にまで拡張した．その定義を，単射半径が下から抑えられている Hilbert 多様体にまで一般化したのが [Yu] である．後者の定義を説明しておく．$\mathcal{S}_\varepsilon$ を，$C_0(-\varepsilon,\varepsilon)$ に $\mathcal{S}$ と同様に $\mathbb{Z}_2$ 次数を与えたものとする．

定義 3.3 ([GWY, Yu, Tak5])**.** (1) $\mathcal{M}$ を任意の点で単射半径がいたるところで ε より大きい Hilbert 多様体とし，$\Pi(\mathcal{M})$ を，$\mathcal{M}$ 上の *Cliff*$(T\mathcal{M})$ 値有界連続切断全体の環と $\mathcal{S}_\varepsilon$ とのテンソル積とする．指数写像を用いて，局所的な「Euler ベクトル場 C_x」を定義し，$\mathcal{A}(\mathcal{M})$ を

$$\left\{ f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C_x) \,\middle|\, x \in \mathcal{M}, f \in \mathcal{S}_\varepsilon \right\} \text{ で生成される } \Pi(\mathcal{M}) \text{ の部分 } C^* \text{ 環}$$

によって定義する．f に $f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C_x)$ を対応させる写像を x **における Bott 写像**と呼ぶ．

(2) $\mathcal{N}$ を $\mathcal{M}$ の部分集合としたとき，$\mathcal{A}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ を「$\mathcal{A}(\mathcal{M})$ の中で $\left\{ f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C_x) \,\middle|\, x \in \mathcal{N}, f \in \mathcal{S}_\varepsilon \right\}$ で生成される部分 C^* 環」によって定義する．

この C^* 環によって，無限次元多様体を非可換幾何，KK 理論の俎上に乗せることができるようになった．ただしこの対応は，関手性に関する考察が難しい．Gelfand-Naimark の定理は，C^* 環が同型であることと位相空間が同相であることが同値だったが，今回は指数写像を，したがって多様体の計量を陽に用いているため，そのような結果は望めない．$\mathcal{M}$ に $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ を対応させる操作の性質の研究は，非可換幾何的無限次元多様体の研究の大事な課題の一つであるように思われるが，その先駆けと言える結果が次である．技術的には [GWY] を，それを用いた証明については [Tak5] を見よ．

命題 3.4 ([GWY, Tak5])**.** $\mathcal{M}$ を単射半径がいたるところで ε より大きい Hilbert 多様体とし，すべての断面曲率が δ より小さく，ε が有限値の場合は δ と ε は $\varepsilon < \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ を満たすとする．このとき，$\mathcal{M}$ の等長変換群は $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ に作用する．

注意 3.5. この結果は，[GWY] の非正曲率多様体に対する結果を一般の Hilbert 多様体に拡張したものである．指数写像に対する評価を使うので，曲率に条件がついている．[Tak5] を書いたときは，群が等長，余コンパクトに作用した状況を考えていたから「曲率の条件が多少厳しくても良いや」と，あまり深く考えずに曲率に対する条件を課して定式化してしまった．それ以来深く考察できていないので，もう少し緩い仮定で定理が成り立つかも知れない．

命題 3.6 ([Tak6])**.** $\mathcal{M}$ を単射半径がいたるところで ε より大きい Hilbert 多様体とする．

(1) $k : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ の部分集合 $\mathcal{Y}$ からの包含写像とする．このとき，ゼロ拡張 $k_* : \mathcal{A}(\mathcal{M},\mathcal{Y}) \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{M})$ が，生成元を生成元に移すことで定義される．

(2) M を $\mathcal{M}$ の中の全測地的部分多様体とする．包含写像 $M \hookrightarrow \mathcal{M}$ を i と書く．このとき，$\mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(\mathcal{M})$ が，$x \in M$ と $f \in \mathcal{S}_\varepsilon$ に対応する生成元 $f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C_x)$ に，$f(X\widehat{\otimes}1 + 1\widehat{\otimes}C_{i(x)}) \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$ を対応させることで定義される．

注意 3.7. 前者は $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ の定義から直ちに証明される．

後者は「M の測地線と $\mathcal{M}$ の測地線が一致する」という性質から従う．

上の (2) の定義は簡単なものだが，次の性質を満たす．

命題 3.8. 上記 (2) の準同型を，$\mathcal{M}$ が M 上のベクトル束の全空間であるときに適用すると，Thom 同型に対応したものが得られる．

何故なら，この準同型は事実上 Bott 写像を並べたものだからである．Thom 同型とは，Bott 周期性写像の族版であった．

これで定義 2.10 をループ空間に拡張する準備ができた．

3.2 構成

M をコンパクトな偶数次元 $Spin^c$ 多様体とする[*8]．$C^\infty(S^1, M)$ の接空間に L^2 内積を入れることで $C^\infty(S^1, M)$ に距離空間の構造を入れ，その距離で $C^\infty(S^1, M)$ を完備化したものを LM をとする[*9]．LM にはパラメータの付替えで S^1 が等長に作用し，すべての断面曲率が上から評価されることから，$\mathcal{A}(LM)$ には S^1 が作用する．これで LM を KK 理論的に考察できることになった．

LM の中の S^1 固定点集合は定数ループ全体で，M と同一視できる．その LM の中の管状近傍を U とする．包含写像を $k : U \hookrightarrow LM$，$j : M \hookrightarrow U$ と書いておく．定義 2.10 に登場する KK 群の元を順に無限次元化しよう．

(1) 包含写像 $\mathcal{A}(LM, U) \hookrightarrow \mathcal{A}(LM)$ を $\widetilde{k_*}$ と書く．

(2) 等長作用による固定点集合は全測地的であるため [Kob, Chapter II Theorem 5.1]，$*$ 準同型 $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}(LM)$ が定まる．この準同型の像は $\mathcal{A}(LM, U)$ に含まれるので，上の準同型をそのようにみなしたものを

$$\widetilde{\tau_U} : \mathcal{A}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}(LM, U) \tag{4}$$

と書いておく．これはThom 同型の無限次元化である．

(3) M の LM の中の法束は，Fourier 級数の理論によって

$$\nu(M) \cong \coprod_{m \in M} T_m M \otimes \bigoplus_{k>0} \{\mathbb{R}\cos(k\theta) \oplus \mathbb{R}\sin(k\theta)\}$$

で与えられる．これには複素構造が入り，複素ベクトル束の構造込みで法束を考える場合は

$$\nu_{\mathbb{C}}(M) \cong \bigoplus_{k>0} (TM \otimes \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_k \tag{5}$$

と書く．ただし $\mathbb{C}_k$ は S^1 のウェイト k の表現空間である．負のウェイトが現れないような複素構造を用いるのが，意味のある不変量を取り出すための肝である．これは階数が無限なので，同変 K 理論の元を定めないが，各ウェイトにテンソルされているベクトル束が有限階数なので，$KK_{S^1}(C(M), C(M))_{\mathrm{pos}}$ の元を定める．$T = TM \otimes \mathbb{C} \in K^0(M)$ とおくと，同型 $KK_{S^1}(C(M), C(M))_{\mathrm{pos}} \cong K^0(M) \otimes R(S^1)_{\mathrm{pos}}$ の下で

$$\nu_{\mathbb{C}}(M) = \sum_{k>0} T \otimes q^k$$

と書ける．この外積代数 $[e_U]$ は

$$\wedge^* \nu_{\mathbb{C}}(M) = \wedge^* \sum_{k>0} T \otimes q^k = \prod_{k>0} \wedge^* T \otimes q^k = \prod_{k>0} \left(\underline{\mathbb{C}}_M \otimes q^0 + T \otimes q^k + \wedge^2 T \otimes q^{2k} + \cdots \right)$$

---

*8 このとき，$C(M)$ と $Cl_\tau(M)$ が KK 同値なので，$[\underline{\mathbb{C}}_M] \in KK_{S^1}(\mathbb{C}, C(M))$ に対応する元が $KK_{S^1}(\mathbb{C}, Cl_\tau(M))$ にある．

*9 もう少し一般の Sobolev 計量で理論を作るべきとも思うが，ループ空間の曲率の表示は非常にややこしいので [MRT]，今後の課題としたい．

の形である．特に

$$\underline{\mathbb{C}}_M \otimes q^0 + q^1\text{以上の項} \tag{6}$$

の形なので，これは $KK_{S^1}(C(M),C(M))_{\mathrm{pos}}$ において可逆である．$[e_U]$ の逆元から KK 同値 $C(M) \cong Cl_\tau(M)$ によって $KK_{S^1}(Cl_\tau(M),Cl_\tau(M))_{\mathrm{pos}}$ の元を作り，それに $\tau_{\mathcal{S}_\varepsilon}$ を施したものを $[\widetilde{e_U^{-1}}]$ と書く．

これで準備ができた．

定義 3.9 ([Tak6])**.** ループ空間の S^1 同変局所化指数 $\widetilde{\mathrm{ind}}_{S^1}^{\mathrm{pos}} : KK_{S^1}(\mathcal{A}(LM),\mathcal{S}_\varepsilon) \to KK_{S^1}(\mathcal{S}_\varepsilon,\mathcal{S}_\varepsilon)_{\mathrm{pos}}$ を，次の合成で定義する．

$$\begin{aligned} KK_{S^1}(\mathcal{A}(LM),\mathcal{S}_\varepsilon) &\xrightarrow{[\widetilde{k_*}]\widehat{\otimes}-} KK_{S^1}(\mathcal{A}(LM,U),\mathcal{S}_\varepsilon) \xrightarrow{[\widetilde{\tau_U}]\widehat{\otimes}-} KK_{S^1}(\mathcal{A}(M),\mathcal{S}_\varepsilon) \xrightarrow{[\widetilde{e_U^{-1}}]\widehat{\otimes}-} \\ &KK_{S^1}(\mathcal{A}(M),\mathcal{S}_\varepsilon)_{\mathrm{pos}} \xrightarrow{\mathrm{ind}} KK_{S^1}(\mathcal{S}_\varepsilon,\mathcal{S}_\varepsilon)_{\mathrm{pos}}. \end{aligned} \tag{7}$$

この指数が固定点公式を持つことも，有限次元の場合と同様に証明できる．詳しいことは説明できないが，ポイントだけ述べておく．

Kasparov の $\mathcal{R}KK$ 理論とは，Kasparov の KK 理論と Segal の RK 理論を統合して一般化したような理論で，局所コンパクトハウスドルフ空間 X および $C_0(X)$-C^* 環の二つ組にアーベル群を対応させる理論で，$\mathcal{R}KK(X;A,B)$ と書かれる [Kas1]．サイクルの定義は $KK(A,B)$ と同じだが，付加的な条件 $\pi(f\cdot a)(eb) = \pi(a)(e(f\cdot b))$ が要求される．ここで，C^* 環 A が $C_0(X)$-C^* 環とは，だいたい，A が $C_0(X)$ 上の多元環であることを意味する[*10]．$C_0(X)$-C^* 環は X 上の C^* 環の連続族の切断代数で書けることが知られている [TXLG]．$RK^0(X)$ を Segal の reprentable K 群とすると[*11]，同型 $\mathcal{R}KK(X;C_0(X),C_0(X)) \cong RK^0(X)$ が成り立つなど，位相幾何的に自然な不変量が作用素環の言葉だけで書かれているのが有り難い．もちろん同変版 $\mathcal{R}KK_G(X;A,B)$ も定義される．

$\mathcal{R}KK$ 理論の定義には $C_0(X)$ が現れるが，$C_0(X)$-C^* 環の，C^* 環の連続族による記述をみれば分かる通り，$\mathcal{R}KK$ 理論は非常に幾何的な不変量である．その考え方を推し進めることで，局所コンパクトで無い X に対して，$\mathcal{R}KK(X)$ 理論を定義することができる[*12]．ただし，引数になる C^* 環は，「C^* 環の連続族」に置き換えなければならない．ともかく，こうして K 理論的 Poincaré 双対の受け皿となるべき位相的 K 理論は定義される（[Tak5] 参照）．K 理論的 Poincaré 双対を定式化してしまえば，K ホモロジーの間の準同型を位相的に書き換えるのは有限次元の場合と全く同様である．

3.3 Future work

最後に，[Tak6] ではできなかったことについて，問題の形でまとめておく．

問題 3.10. $\widetilde{\mathrm{ind}}_{S^1}^{\mathrm{pos}}$ と Witten 種数との関係は何か?

Witten 種数には，ζ 関数による繰り込みが入っているが，本稿の指数にはそのようなものは現れない．また，本稿の Spinor 束は S^1 作用によって人工的に定義した複素構造を使っているため，幾何学的に自然なものとは言い難い（[Tak6] の difference line bundle 参照）．楽観的に状況証拠から考えれば，difference line bundle と ζ 関数による繰り込みが対応していそうだが，果たしてどうだろうか．

[*10] A に $C_0(X)$ が含まれていなくても良かったり，位相的なことを気にしないといけなかったりするので，正確には以下のように定義する．すなわち，A が $C_0(X)$-C^* 環とは，$*$ 準同型 $C_0(X) \to \mathcal{Z}(\mathcal{M}(A))$ が与えられていることをいう．ただし，$\mathcal{M}(A)$ は A の multiplier 代数，$\mathcal{Z}(B)$ は C^* 環 B の中心を表す．

[*11] Segal の reprentable K 群とは，直感的には「台がコンパクトと限らないベクトル束の K 群」で，[古田] では単に $K^0(X)$ と書かれており，Atiyah の K 群の方が $K_c^0(X)$ と書かれている．

[*12] [Tak5] 参照．これもペンシルバニア州立大学に滞在したときに，当時そこの学生だった西川慎太郎君にそのアイディアを教えてもらった．そのアイディアを位相幾何的な観点から私がある程度形にし，その基礎理論について共同研究を進めている．

問題 3.11. $\widetilde{\mathrm{ind}_{S^1}^{\mathrm{pos}}}$ の性質を，LM の大域的な構造から考察せよ．

[Wit] には，LM の大域的な構造から Witten 種数の剛性を予想する議論がある．その議論を，非可換幾何的に再現できると面白い．

問題 3.12. $KK_{S^1}(\mathcal{A}(LM), \mathcal{S}_\varepsilon)$ の具体的な要素（$\fallingdotseq$ LM 上の Dirac 作用素）を構成せよ．

LM の Wiener 測度を使うと，「LM の関数空間」ができそうである．私は [Tak4, Tak5] において，「Hilbert 空間の C^* 環の K ホモロジー群の元」を構成したが，そこでは，「C_0 を定義するための空間の計量を決めるための Sobolev レベルと，L^2 を定義するための空間の計量を決めるための Sobolev レベルを**そろえない**」ことが重要であった．すなわち，ループ空間の計量を予め決めるのではなく，すべての Sobolev レベルを同時に（しかも Sobolev レベルをずらして）考えることが重要であった．この考え方は [大森] の ILH 多様体に通ずるものがあるようにも思われる．ILH は inverse limit of Hilbert の略で，ILH 空間とは Hilbert 空間の逆極限として書ける位相ベクトル空間のこと，ILH 多様体とは ILH 空間をモデルとする多様体のことである．$C^\infty(S^1, M) = \cap L^2_k(S^1, M)$ なので，これは ILH 多様体である．上の状況は「Hilbert 多様体ではないが Hilbert 多様体の極限で書けること」が，積極的な意味を持つことを意味しているように思われる．

問題 3.13. LM の K 理論的 Poincaré 双対写像は同型か．

もしこれが同型ならば，$\mathcal{A}(LM)$ の K ホモロジーを計算するのに，LM の位相幾何的なデータが使えることになり，作用素環論的に非常に良い結果である．個人的には，$\mathcal{A}(LM)$ がそこまで忠実に LM のトポロジーを反映しているとは思えないが（$\mathcal{A}(LM)$ の定義に，その計量を使っているから），研究の作業仮説としては真っ当であると思う．

問題 3.14. Hilbert 多様体 $\mathcal{M}$ の C^* 環 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ の性質を研究せよ．

本文でも述べたが，$\mathcal{A}(\mathcal{M})$ の関手的な性質は，その重要性にも関わらずまだまだ知られていない．本稿では開埋め込みと全測地的な埋め込みについて論じたが，完全に一般的な連続写像に対する誘導準同型を構成するのは無理でも，せめて「有限次元を除いて等長」や「コンパクト作用素を除き等長」というような状況に対する関手性はあってほしい[*13]．その研究には，作用素環，トポロジーだけでなく，微分幾何に対する深い理解も要求されるように思われる．

謝辞

新型コロナウイルス感染症流行が続く中，素晴らしい研究集会を開いてくださったオーガナイザーの藤田先生および数理解析研究所のスタッフの皆様に感謝いたします．久しぶりの対面式の研究集会で，研究発表および研究討議の機会をいただき，非常に楽しい時間を過ごさせていただきました．ありがとうございました．

本研究は JSPS 科研費 21K20320 の助成を受けたものです．

参考文献

[ASe] M. Atiyah and G. Segal, “*The index of elliptic operators: II*”, Ann. of Math. (2) 87 1968 531-545.

[*13] フレドホルム作用素は「コンパクト作用素を除いて同型」な線形写像なわけだが，その定量版として，「恒等写像とトレースクラス作用素を除き等しい」や「恒等写像とヒルベルトシュミット作用素を除き等しい」のようなバリエーションが考えられる．

[ASi1] M. Atiyah and I. Singer, "*The index of elliptic operators: I*", Ann. of Math. (2) 87 1968 484-530.

[ASi2] M. Atiyah and I. Singer, "*The index of elliptic operators: III*", Ann. of Math. (2) 87 1968 546-604.

[Bla] B. Blackadar, "*K-theory for operator algebras*", Mathematical Sciences Research Institute Publications, 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Bra] M. Braverman, "*Index theorem for equivariant Dirac operators on noncompact manifolds*". K-Theory 27 (2002), no. 1, 61–101.

[BT] R. Bott and C. Taubes, "*On the rigidity theorems of Witten*", J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 1, 137–186.

[Cal] C. Callias, "*Axial anomalies and index theorems on open spaces*", Comm. Math. Phys. 62 (1978), no. 3, 213–234.

[古田] 古田幹雄, 「指数定理」, 岩波書店（2008）

[FFY] H. Fujita, M. Furuta and T. Yoshida, "*Torus fibrations and localization of index I—III*", J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17 (2010), no. 1, 1–26.

[Fuj] H. Fujita, "*Deformation of Dirac operators along orbits and quantization of noncompact Hamiltonian torus manifolds*, Canad. J. Math. 74 (2022), no. 4, 1062–1092.

[GWY] S. Gong, J. Wu and G. Yu, "*The Novikov conjecture, the group of volume preserving diffeomorphisms and Hilbert-Hadamard spaces*", Geom. Funct. Anal. 31 (2021), no. 2, 206–267.

[HKT] N. Higson, G. Kasparov and J. Trout, "*A Bott periodicity theorem for infinite-dimensional Euclidean space*", Adv. Math. 135 (1998), no. 1, 1-40.

[HR] N. Higson and J. Roe, "*Analytic K-homology*", Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[HW] P. Hochs and H. Wang, "*A fixed point theorem on noncompact manifolds*", Ann. K-Theory 3 (2018), no. 2, 235–286.

[JT] K. Jensen and K. Thomsen, "*Elements of KK-theory*", Mathematics: Theory and Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.

[Kas1] G. Kasparov, "*Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*", Invent. Math. 91 (1988), no. 1, 147-201.

[Kas2] G. Kasparov, "*Elliptic and transversally elliptic index theory from the viewpoint of KK-theory*", J. Noncommut. Geom. 10 (2016), no. 4, 1303-1378.

[Kob] S. Kobayashi, "Transformation groups in differential geometry", Reprint of the 1972 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. viii+182 pp.

[LRS] Y. Loizides, Rodsphon and Y. Song, "*A KK-theoretic perspective on deformed Dirac operators* ", Adv. Math. 380 (2021), Paper No. 107604, 34 pp.

[Mes] B. Mesland, "*Unbounded bivariant K-theory and correspondences in noncommutative geometry*", J. Reine Angew. Math. 691 (2014), 101–172.

[MRT] Y. Maeda, S. Rosenberg and F. Torres-Ardila, "*The geometry of loop spaces II: characteristic classes*", Adv. Math. 287 (2016), 485-518.

[Mur] G. Murphy, "*C^*-algebras and operator theory*", Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[Tak1] D. Takata, "*An analytic LT-equivariant index and noncommutative geometry*", J. Noncommut. Geom. 13 (2019), no. 2, 553-586.

[Tak2] D. Takata, "*LT-equivariant index from the viewpoint of KK-theory. A global analysis on the infinite-dimensional Heisenberg group*", J. Geom. Phys. 150 (2020), 103591, 30 pp.

[Tak3] D. Takata, "*A loop group equivariant analytic index theory for infinite-dimensional manifolds*", PhD thesis, available on `https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/232217/2/drigk04334.pdf`

[Tak4] D. Takata, "*An infinite-dimensional index theorem and the Higson-Kasparov-Trout algebra*", Ann. K-Theory 7 (2022), no. 1, 1-76.

[Tak5] D. Takata, "*Topological Aspects of the Equivariant Index Theory of Infinite-Dimensional LT-Manifolds*", preprint, arXiv:2007.08899.

[Tak6] D. Takata, "*An index theorem for loop spaces*", preprint, arXiv:2208.12129.

[Tau] C. Taubes, "*S^1-actions and elliptic genera*, Comm. Math. Phys. 122 (1989), no. 3, 455–526.

[TXLG] J. L. Tu, P. Xu, C. laurent-Gengoux "*Twisted K-theory of differential stacks*", Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (2004), no. 6, 841-910.

[大森] 大森英樹, 「無限次元リー群」, 紀伊國屋書店（1978）.

[Wit] E. Witten, "*The index of the Dirac operator in loop space*", Elliptic curves and modular forms in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986), 161-181, Lecture Notes in Math., 1326, Springer, Berlin, 1988.

[Yu] G. Yu, "*K-theory of C^*-algebras associated to infinite-dimensional manifolds (Talk)*", NCG Festival 2019 held in Washington University in St. Louis, May 3rd (2019).

Facalty of Education
Niigata University,
Niigata 950-2181
JAPAN
E-mail address: `d.takata@ed.niigata-u.ac.jp`