Localization of a $KO^*(\mathrm{pt})$-valued index and the orientability of the $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole moduli space

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻
宮澤 仁
Jin MIYAZAWA
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

Abstract

本講演は, 閉多様体上の楕円型線形偏微分作用素の $KO^*(\mathrm{pt})$ に値をとる指数とその局所化についての講演である. まずこの研究のふたつの背景である, $KO^*(\mathrm{pt})$ に値をとる指数とゲージ理論で現れるモジュライ空間の向き付けの問題について説明する. そのあとこの講演と同じタイトルの論文 [1] の結果を紹介する. 主結果はふたつで, ひとつめは Spin 構造, Spin^c 構造, $\mathrm{Pin}^\pm$ 構造を含む一般化された構造を定義し, $KO^*(\mathrm{pt})$ に値をとる指数を, 局所化させて計算できるという定理である. ふたつめは, 局所化定理を用いて, ゲージ理論であらわれるモジュライ空間の向き付け可能性を決定した結果である. 最後に, 局所化の手法である Witten deformation について説明する.

1　指数の変種とモジュライ空間の向き付け

ここでは本講演のふたつの背景である, $KO^*(\mathrm{pt})$ に値をとる指数と, ゲージ理論のモジュライ空間の向き付けについて述べる.

1.1　$KO^*(\mathrm{pt})$ に値をとる指数

ここではまず Fredholm 作用素の指数について説明する. ヒルベルト空間 H_1, H_2 の間の有界作用素 $D\colon H_1 \to H_2$ が Fredholm であるとは D の kernel と cokernel が有限次元であることである. Fredholm 作用素の重要な例として閉多様体上の楕円型作用素がある. Fredholm 作用素 D について $\dim(\ker(D)) - \dim(\mathrm{coker}(D))$ を D の指数といい, これは D を Fredholm 性を保ったまま作用素ノルムで連続になるように変形しても変わらない.

指数には様々な変種があるが, ここでは特に $KO^*(\mathrm{pt})$ に値をとる指数について簡単に触れる. 指数はふたつのベクトル空間の次元の差であり, いわば $KO^0(\mathrm{pt})$(複素なら $K^0(\mathrm{pt})$) に値をとる指数といえる. 楕円型作用素から得られる不変量にはもっと精密なものがある. 高次の KO 群に値をとる指数である. リーマン面の Spin 構造の mod 2 指数がある. これは $KO^{-2}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数である. 一般に, n 次元 Spin 多様体に対し $KO^{-n}(\mathrm{pt})$ に値をとる指数が定義できる. これを Atiyah-Milnor-Singer 不変量という. Atiyah-Milnor-Singer 不変量は Spin コボルディズム不変量で

ある.

1.2 モジュライ空間の向き付け

ゲージ理論と呼ばれる分野で行うことのひとつに, ASD 方程式やサイバーグ・ウィッテン方程式などの非線形偏微分方程式を用いて 4 次元多様体の微分同相で保たれる不変量を作り, 微分構造についての情報を得る, というものがある.

不変量を構成する方法として, 考えている非線形偏微分方程式の解の空間を無限次元の群で割って得られる空間, モジュライ空間を用いる方法がある. この方法について実際にサイバーグ・ウィッテン理論で出てくる状況を単純化した状況で説明する.

A, B をヒルベルト多様体, $f\colon A \to B$ を C^∞ フレドホルム写像, つまり f は C^∞ 級で, 各 $a \in A$ における f のフレシェ微分 $df_a\colon T_aA \to T_{f(a)}B$ がフレドホルム写像であるものとする. いま, $b_0 \in B$ を f の正則値とすると $M = f^{-1}(b_0)$ は有限次元多様体である. 実際の状況では f は偏微分方程式から定まる写像で, M はモジュライ空間に相当する. (実際にはさらに有限次元の群作用があり, その作用で割ったものがモジュライ空間である.)

モジュライ空間そのものは多様体の計量や方程式の摂動の取り方に依存する. したがって, 計量や摂動の取り方を変えても同じ値を返すように不変量を定義したい. ここでは, その条件が満たされるような向きの与え方を説明する. A 上の rank 1 の実ベクトル束であって各 $a \in A$ でのファイバーが $\wedge^{\max} \ker df_a \otimes \wedge^{\max}(\operatorname{coker} df_a)^*$ であるようなものが取れる. これを l とする. M と l の定義から $l|_M = \det TM$ であるから, TM が向き付け可能な十分条件として $l \to A$ が向き付け可能であればよい. そして l の向き付けを固定して TM の向きを入れることにする. この文章では A のことを ambient space といい, l のことを determinant line bundle と呼ぶことにする.

このようにして向きを入れると次のような利点がある: すなわち, f_t を C^∞ フレドホルム写像のなめらかな 1-パラメーター族とする. $b \in B$ は $f_\bullet\colon [0,1] \times A \to B$, f_0 および f_1 の正則値であるとする. このとき, $M_0 = f_0^{-1}(b)$ と $M_1 = f_1^{-1}(b)$ に l の向きを用いて向きを入れれば M_0 と M_1 は oriented cobordant である. したがって, もし $M = f_\bullet^{-1}(b)$ がコンパクトならば, M 上のコホモロジー類を M_0, M_1 に制限して積分した値は一致する. したがって, その積分の値は計量や方程式の摂動によらない不変量である.

サイバーグ・ウィッテン方程式の場合にはモジュライ空間上に自然な $U(1)$ 束が与えられている. この $U(1)$ 束のチャーン類をモジュライ空間の次元 /2 乗してモジュライ空間のある向きで積分したのがサイバーグ・ウィッテン不変量である. とくに, モジュライ空間が 0 次元のときにはモジュライ空間の点の個数の符号込みの数え上げである.

以下, この文章ではモジュライ空間に向きが付くという場合には ambient space 上の determinant line が自明束と同型であることを指していうことにする.

2 主結果

ここまでの背景を踏まえ, [1] の主結果の説明をする.

2.1 $KO^*(pt)$ に値をとる指数とその局所化

[1] では, Spin 構造, Spin^c 構造, Pin$^\pm$ 構造の共通の一般化である, n 次元多様体上の $G^+(n,s^+,s^-)$ 構造を定義し, その構造に対し $KO^{s^- - n - s^+}(pt)$ に値をとる指数を定義した. これは Atiyah-Milnor-Singer 不変量の一般化である. 主定理のひとつめはこの不変量の局所化定理である. すなわち, n 次元多様体 X 上の $G^+(n,s^+,s^-)$ 構造 $\mathfrak{s}$ があるとき, X のある $n-s^-$ 次元部分多様体 C(Spin^c 構造の場合には特性部分多様体に相当する) に $G^+(n-s^-,s^+,0)$ 構造 $\mathfrak{s}_C$ が誘導される.

Theorem 2.1. *$G^+(n,s^+,s^-)$ ボルディズム類 $(X,\mathfrak{s})$ から $G^+(n-s^-,s^+,0)$ ボルディズム類 $(C,\mathfrak{s}_C)$ を与える写像を f とする. このとき以下の図式は可換である:*

$$\begin{tikzcd}
\Omega_n^{G^+(n,s^+,s^-)}(pt) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \Omega_{n-s^-}^{G^+(n-s^-,s^+,0)}(pt) \arrow[d] \\
 & KO^{-n-s^++s^-}(pt)
\end{tikzcd}$$

ただし KO 群への写像は指数で与えられる.

2.2 Pin$^-(2)$ monopole モジュライの向き付け

サイバーグ・ウィッテン方程式の変種に中村信裕氏が [2] で導入した Pin$^-(2)$-monopole 方程式がある. この方程式の解のモジュライ空間が (うまく摂動すると) サイバーグ・ウィッテンの場合と同じように有限次元の閉多様体になることは容易にわかる. このモジュライ空間に向きがつくための obstruction はとある $KO^{-1}(pt) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数である. しかし, この指数を位相的な情報から計算するのはそのままでは容易ではない. 高次の KO 群に値をとる指数については, 特性類の積分のような簡単な位相不変量から計算する一般的な方法は知られていないからである. このような事情から, 自明に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数が消えることがわかる場合をのぞいて Pin$^-(2)$ monopole 不変量は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 値の不変量しか定義されていない. それにも関わらず Pin$^-(2)$ monopole は通常のサイバーグ・ウィッテン不変量では検出できない, 連結和の形の 4 次元多様体の微分構造に関する情報が検出できる. Pin$^-(2)$ monopole の $\mathbb{Z}$ 値の不変量が定義できる場合が広がればより精密な情報を検出できることが予想される.

主定理のふたつめは, 局所化定理 (Theorem 2.1) を用いて, Pin$^-(2)$ monopole の向き付け可能性の obstruction である $KO^{-1}(\mathrm{pt})$ に値をとる指数を位相的に計算する方法を与え, その obstruction が消えていない例を構成したというものである.

3 Witten deformation について

ここでは主定理の証明に使われる Witten-deformation について説明する. Witten-deformation というのは楕円型作用素の指数を変えないように変形し, 指数をある部分多様体上に局所化させる

操作である．これは Witten によって [3] ではじめて行われた方法である．この場合は作用素は de Rham 作用素 $d + d^*$ で, 局所化させる部分多様体は Morse 関数 f の臨界点である．

Witten deformation のアイデアを説明する．まず基本となる簡単な状況を説明する．$E = E_0 \oplus E_1$ を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded なベクトル束として, $D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ を odd で自己共役な 1 階楕円型作用素とする．いま, $h\colon E \to E$ を odd で対称なベクトル束の同型とする．さらに D と反可換であるとすると,

$$(D+h)^2 = D^2 + h^2$$

であり, h の定義から上の作用素の kernel は 0 だから $\ker(D+h) = 0$ である．D と $D+h$ の指数は等しいから D の指数は 0 である．

ここで, h が同型であるという仮定を緩めて, ある部分多様体の近傍の外では同型であることにする．さらに, 単に反可換というのではなくて, D の主表象と反可換であるとする．このとき, 正の実数 m について

$$(D+mh)^2 = D^2 + m^2h^2 + m\{D,h\}$$

であり, h が主表象と反可換なことから $\{D,h\}$ は微分を含まない項である．したがって, m が十分大きいときに h が同型であるような領域では $m^2h^2 + m\{D,h\}$ は同型で正定値であから, もし $D+mh$ の kernal あるいは十分小さい固有値の固有関数があれば, h が退化している部分多様体の近傍に局所化されていることが予想できる．そして実際に (h や計量に仮定を置くと) 解析的に固有関数の局所化を示すことができる．これが Witten deformation による指数の局所化である．指数の局所化の観点から指数定理を証明し, 周辺の話題に触れている本に [4] がある．

References

[1] Jin Miyazawa. Localization of a $KO^*(pt)$-valued index and the orientability of the $Pin^-(2)$ monopole moduli space. *arXiv preprint arXiv:2109.10579*, 2021.

[2] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. *Math. Ann.*, Vol. 357, No. 3, pp. 915–939, 2013.

[3] Edward Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geometry*, Vol. 17, No. 4, pp. 661–692 (1983), 1982.

[4] 古田幹雄. 指数定理. 岩波書店, 2008.