無限型のアルティン群の非シリンダー的双曲性について

愛媛大学大学院理工学研究科 尾國 新一 *
Shin-ichi Oguni
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Ehime University

概要

アルティン群は, ラベル付きグラフから定められる生成系と関係子によって与えられる群である. 各生成元がインボリューションであるという関係子を追加することでアルティン群からコクセター群が得られる. アルティン群が無限型であるとは, この操作によって商として得られるコクセター群が無限群であるときを言う. 無限型のアルティン群は, 適当な意味で双曲性や非正曲率性を持つことが期待されている. 非正曲率性の代表的なものとして, CAT(0) 性が有名であるが, 本報告では, 双曲性の一例である非シリンダー的双曲性について取り扱う. 本報告は, 加藤本子氏（琉球大学）との共同研究 [8] に基づく.

1 序

位相幾何学や微分位相幾何学において重要な役割を果たす基本群のような離散群について, 様々な立場から活発な研究がおこなわれている. 実際, 離散群は, 幾何学的群論においてはもちろんのこと, 非可換幾何学や粗幾何学 (大尺度幾何学とも呼ばれる) においても重要な研究対象となっている. 各立場での研究において, 微分幾何学由来の双曲性や非正曲率性に類する概念が活躍していることは特筆に値するだろう ([1], [2], [3], [4] やこれらの参考文献を参照).

本報告では, アルティン群と呼ばれる離散群が, 非シリンダー的双曲性と呼ばれる双曲性を有するかどうかという問題を取り扱う.

The author is supported by JSPS KAKENHI Grant Number 20K03590.

2 アルティン群

アルティン群の定義から始める． 有限単純グラフ Γ を考える． $V(\Gamma) = \{s_1, \ldots, s_n\}$ を頂点集合とし, $E(\Gamma)$ を辺集合とする．それぞれの辺 $(s_i, s_j) \in E(\Gamma)$ はラベル $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を付されているとする．このとき, この ($\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に値をとる) ラベル付きグラフ Γ に付随した**アルティン群**を

$$A_\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_n \mid \forall (s_i, s_j) \in E(\Gamma), \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{ij}\text{ 個}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{ij}\text{ 個}} \rangle$$

により定義する．また, Γ に付随した**コクセター群**を

$$W_\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_n \mid \forall (s_i, s_j) \in E(\Gamma), \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{ij}\text{ 個}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{ij}\text{ 個}}, \forall s_i \in V(\Gamma), s_i^2 = 1 \rangle$$

により定義する．W_Γ は A_Γ の商であることに注意する．W_Γ が**有限群**/**無限群**であるとき, A_Γ は**有限型**/**無限型**であると呼ばれる．一般に, ($\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に値をとる) ラベル付きグラフ Γ に対して, Γ^t なるグラフを, 頂点集合は $V(\Gamma^t) = V(\Gamma)$ であり, 辺集合は

$$E(\Gamma^t) = \{(v_i, v_j) \in E(\Gamma) \mid m_{ij} \neq 2\} \sqcup \{(v_i, v_j) \in V(\Gamma) \times V(\Gamma) \setminus E(\Gamma) \mid v_i \neq v_j\}$$

であるグラフとして定義することにする．このとき, $(v_i, v_j) \in V(\Gamma) \times V(\Gamma) \setminus E(\Gamma)$ $(v_i \neq v_j)$ にラベル ∞ を付すことで, Γ^t は $\mathbb{Z}_{\geq 3} \sqcup \{\infty\}$ に値をとるラベル付きグラフとなる (コクセター群や有限型のアルティン群を考える際は, こちらを**コクセター図形**と呼んで定義グラフとして採用する方が一般的であるので, アルティン群に関わる文献を読む際は, 定義グラフとしてどちらの定義を採用しているかに注意する必要がある)．Γ^t が連結であるとき, W_Γ および A_Γ は**既約**であるという．

例をいくつか挙げよう．

例 2.1. 図 1 の Γ において,

$$A_\Gamma = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_3 = s_3 s_1 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^2,$$
$$W_\Gamma = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_3 = s_3 s_1, s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

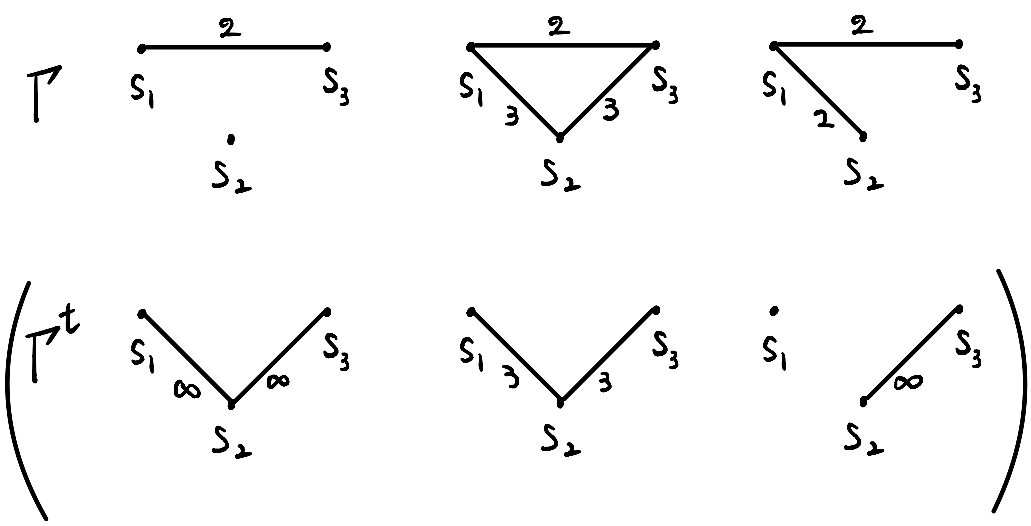
である．W_Γ が無限群なので A_Γ は無限型である．Γ^t は連結なので, W_Γ および A_Γ は既約である．

例 2.2. 図 2 の Γ において,

$$A_\Gamma = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_2 s_3 s_2 = s_3 s_2 s_3, s_1 s_3 = s_3 s_1 \rangle$$

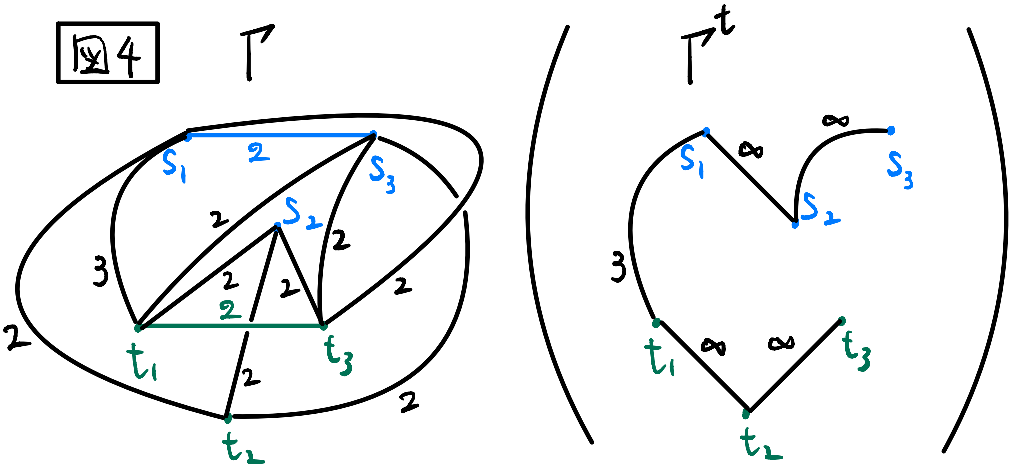
は 4 次組み紐群であり, W_Γ は 4 次対称群である．W_Γ が有限群なので A_Γ は有限型である．Γ^t は連結なので, W_Γ および A_Γ は既約である．

図1 図2 図3

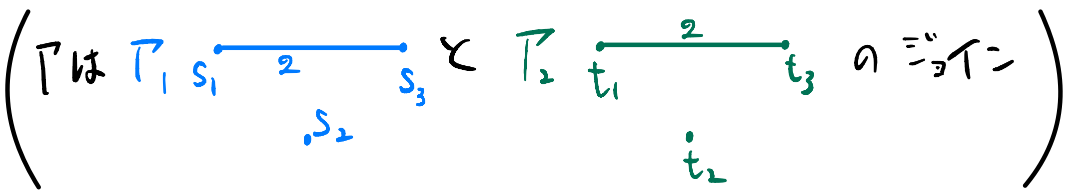


Γ
s_1 s_2 s_3 2
s_1 s_2 s_3 2 3 3
s_1 s_2 s_3 2 2
Γ^t
s_1 s_2 s_3 ∞ ∞
s_1 s_2 s_3 3 3
s_1 s_2 s_3 ∞

図4



Γ
s_1 s_2 s_3 t_1 t_2 t_3
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3
Γ^t
s_1 s_2 s_3 t_1 t_2 t_3
∞ ∞ ∞ ∞ 3



Γ は Γ_1 s_1 2 s_3 s_2 と Γ_2 t_1 2 t_3 t_2 のジョイン

例 2.3. 図 3 の Γ において,

$$\begin{aligned} A_\Gamma &= \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1s_2 = s_2s_1, s_1s_3 = s_3s_1 \rangle \cong \mathbb{Z} \times F_2, \\ W_\Gamma &= \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1s_2 = s_2s_1, s_1s_3 = s_3s_1, s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

である. W_Γ が無限群なので A_Γ は無限型である. Γ^t は連結でないので, W_Γ および A_Γ は既約でない. 特に直積に分解している.

例 2.4. 図 4 の Γ において,

$$A_\Gamma = \left\langle s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} s_1s_3 = s_3s_1, t_1t_3 = t_3t_1, \\ s_1t_1s_1 = t_1s_1t_1, s_1t_2 = t_2s_1, s_1t_3 = t_3s_1, \\ s_2t_1 = t_1s_2, s_2t_2 = t_2s_2, s_2t_3 = t_3s_2, \\ s_3t_1 = t_1s_3, s_3t_2 = t_2s_3, s_3t_3 = t_3s_3 \end{array} \right\rangle$$

であり, W_Γ は無限群なので A_Γ は無限型である. Γ^t は連結なので, W_Γ および A_Γ は既約である.

注意 2.5. 既約な有限コクセター群 W_Γ はコクセター図形 Γ^t で分類されている. なお, 既約な有限コクセター群 W_Γ において, コクセター図形 Γ^t と違って, この報告で用いる定義グラフ Γ は完全グラフである.

Γ を有限単純グラフとする. この有限単純グラフ Γ が**ジョイン分解可能**であるとは,

$$\begin{aligned} &V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \sqcup V(\Gamma_2) \\ &E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \sqcup E(\Gamma_2) \sqcup (V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)) \sqcup (V(\Gamma_2) \times V(\Gamma_1)) \end{aligned}$$

を満たす部分グラフ $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$ が存在するときをいう. さらに, Γ_1 が一点からなる部分グラフとできるとき, Γ は**錐**であるという. 図 1 の Γ はジョイン分解可能でない. 図 2,3 の Γ はジョイン分解可能で, さらに錐である. 図 4 の Γ はジョイン分解可能であるが, 錐ではない.

3　先行研究と主定理

今回取り扱う予想は以下である.

予想 3.1. 無限型で既約なアルティン群は非シリンダー的双曲的である.

非シリンダー的双曲的の定義を与えておく ([9] を参照せよ).

定義 3.2. G を有限生成な無限群で, $\mathbb{Z}$ を有限指数部分群としてもたないとする. このとき, G が**非シリンダー的双曲的**であるとは, G がある双曲的距離空間 Y へ非シリンダー的に等長作用するときをいう. ここで, 等長作用が**非シリンダー的**とは,

$$\begin{aligned} &\forall D \geq 0, \exists R, N \geq 0, \forall y_1, y_2 \in Y, \\ &d(y_1, y_2) \geq R \Rightarrow \#\{h \in G \mid d(y_1, hy_1), d(y_2, hy_2) \leq D\} \leq N \end{aligned}$$

を満たすことをいう.

有限型のアルティン群や既約でないアルティン群は非シリンダー的双曲的でないことが知られている．予想 3.1 の反例は知られていない．予想 3.1 の肯定的な部分的解決に関する先行研究はいくつもあるが, 最近の以下の二つがこれまでのほとんどの先行研究を包含している (より詳しくは, [8] およびその参考文献を参照).

定理 3.3 (Charney & Morris-Wright [7])**.** 無限型で既約なアルティン群 A_Γ は, Γ がジョイン分解可能でないとき, 非シリンダー的双曲的である.

定理 3.4 (Vaskou [10])**.** 無限型で既約なアルティン群 A_Γ は, A_Γ が 2 次元以下であるとき, 非シリンダー的双曲的である．ここで, A_Γ が 2 **次元以下**であるとは, Γ の任意の 3 辺形 $\triangle v_i v_j v_k$ において, $\frac{1}{m_{ij}} + \frac{1}{m_{jk}} + \frac{1}{m_{ki}} \leq 1$ を満たすことをいう.

図 1 の Γ はジョイン分解可能でない, また, 3 辺形を持たないので, 定理 3.3, 3.4 いずれからも A_Γ が非シリンダー的双曲的であるとわかる．図 2 の Γ における A_Γ は有限型であり, 図 3 の Γ における A_Γ は既約でないので, 予想 3.1 の対象でない. 図 4 の Γ はジョイン分解可能で, さらに, A_Γ が 2 次元以下でないので, 定理 3.3, 3.4 いずれも適用できず, 非シリンダー的双曲的であるかどうかは明らかにならない.

加藤本子氏との共同研究の主定理は以下であり, 定理 3.3 の強化版である.

定理 3.5 (加藤 & 尾國 [8])**.** 無限型で既約なアルティン群 A_Γ は, Γ が錐でないとき, 非シリンダー的双曲的である.

この定理 3.5 によって, 新たに非シリンダー的双曲的であることがわかるアルティン群がたくさんあり, 例えば, 図 4 の Γ における A_Γ が非シリンダー的双曲的であることがわかる．定理 3.5 の証明は, 定理 3.3 の証明における [7] の議論を発展させることで行う．流れは以下のとおりである．[7] の議論にあるクリークキューブ複体へのアルティン群の作用を詳細に調べる．その作用において, WPD 縮約元とよばれる元をうまく構成する．この元の存在から [5] の定理によって非シリンダー的双曲的であることが従う．証明の詳細については, [8] を見られたい.

4　今後の課題

最後に今後の課題を述べる．予想 3.1 の肯定的な解決ができることを期待している．その際に, 次の二つに分けて考えるのが良いと思われる.

(1) Γ が完全グラフの場合.

(2) Γ が完全グラフではない錐の場合.

(1) については, 現在, 定理 3.4 が適用できない場合でも, W_Γ がアフィンとなる場合の A_Γ は非シリンダー的双曲的であることが知られている ([6])．完全グラフは錐なので, 定理 3.3, 3.5 は適用できない．(2) については, 現在, 定理 3.4 が適用できない場合についての結果はないようである．こちらについては, 現在, 加藤本子氏と取り組んでおり, 近いうちに良い報告ができればうれしい.

参考文献

[1] 大鹿 健一, 離散群. 岩波書店; オンデマンド版, 2018.

[2] 尾國 新一, 粗 Baum-Connes 予想とその周辺. 数学 68(2) 177-199, 2016.

[3] 深谷友宏, 粗幾何学入門: 「粗い構造」で捉える非正曲率空間の幾何学と離散群 (SGC ライブラリ). サイエンス社, 2019.

[4] 藤原 耕二, 離散群の幾何学 (現代基礎数学 5). 朝倉書店, 2021.

[5] Mladen Bestvina, Ken Bromberg and Koji Fujiwara. Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 122:1–64, 2015.

[6] Matthieu Calvez. Euclidean Artin-Tits groups are acylindrically hyperbolic. preprint, 2020, arXiv:2010.13145

[7] Ruth Charney and Rose Morris-Wright. Artin groups of infinite type: trivial centers and acylindrical hyperbolicity. Proc. Amer. Math. Soc., 147(9):3675–3689, 2019.

[8] Motoko Kato and Shin-ichi Oguni. Acylindrical hyperbolicity of Artin groups associated with graphs that are not cones. preprint, 2022, arXiv:2204.13377.

[9] D. Osin. Acylindrically hyperbolic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 368(2):851–888, 2016.

[10] Nicolas Vaskou. Acylindrical hyperbolicity for Artin groups of dimension 2. Geom. Dedicata 216, no. 1, Paper No. 7, 28 pp, 2022.