# 時間遅れを考慮に入れたBurgers方程式の時間大域解について[1]

久保　隆徹　(お茶の水女子大学基幹研究院)*

## 1. 序論

交通流の数理モデルの 1 つとして次の形の粘性Burgers方程式がよく知られている：

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x \left\{ V_m \rho \left( 1 - \dfrac{\rho}{\rho_m} \right) \right\} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{B}$$

ここで，未知関数 $\rho = \rho(x,t)$ は車の密度，定数 $\nu, V_m, \rho_m$ はそれぞれ拡散係数，$\rho \to 0$ のときの最大速度，車の最高密度を表す正定数であり，$\rho_0$ は初期密度を表す既知関数である（例えば，[1] を参照）．(B) は，車の密度 $\rho$ と車の流量 $q$ に対する保存則 $\partial_t \rho + \partial_x q = 0$ に

$$q = \rho v, \qquad v = V_m \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

を代入して得られる．ただし，$v$ は車の速度を表す．この速度 $v$ に注目すれば，この数理モデルは運転手が刻一刻と変わる渋滞の状況を $\rho$ により把握し，瞬時に自分が運転する車の速度を変えて運転していることを意味している．しかし，現実では渋滞の状況を把握し，アクセルやブレーキを使って車の速度を調整するタイムラグが伴う．そのため，現実の状況をより精確に表すためには速度 $v$ を以下のように時間遅れをもつ項を入れたほうがよいと考えられる：

$$v = V_m \left( 1 - \frac{\rho_\tau}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

ただし，$\rho_\tau = \rho(x, t - \tau)$ とした．

以上のことを考慮して，本講演では固定された遅れパラメータ $\tau > 0$ に対して，時間遅れを考慮に入れた次の粘性Burgers方程式の初期履歴問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x \left( \rho V(\rho_\tau) \right) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \rho(x,t) = \rho_0(x,t), & x \in \mathbb{R},\ -\tau \le t \le 0. \end{cases} \tag{DB}$$

ただし，$V(\rho)$ は $\rho$ に関して $C^1$ 級とし，$\rho_0$ は既知関数とする．

時間遅れを考慮に入れた粘性Burgers方程式の初期履歴問題に対してはいくつか既存の結果が知られている．Liu [4] は次の 0-ディィリクレ境界条件下での粘性Burgers方程式の解の漸近挙動について考察を行っている：

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \rho_\tau \partial_x \rho = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \rho(x,t) = \rho_0(x,t), & 0 < x < 1,\ -\tau \le t \le 0, \\ \rho(0,t) = \rho(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

---

本研究は科研費 (課題番号:19K03577) の助成を受けたものである。

* e-mail: `kubo.takayuki@ocha.ac.jp`

[1] 本講演は上田好寛氏（神戸大学）との共同研究に基づく．

Liu はエネルギー法を用いることで，初期履歴関数 $\rho_0 \in C([-\tau,0];H_0^1)$ に対して，(1) の時間大域解 $\rho \in C([-\tau,\infty);H_0^1)$ が存在することを示し，$\tau$ が十分小さい場合に $\partial_x\rho$ の指数安定性を示した．さらに，$\tau$ が十分小さい場合に，Tang と Wang [7] により (1) の時間大域解 $\rho$ 自身の指数安定性も示されている．また，Smaoui と Mekkaoui により周期境界条件下での時間遅れを考慮に入れた粘性 Burgers 方程式が考察され，Liu[4] と同様の時間大域解の一意存在性や指数安定性が示されている．

また，Tang[6] は時間遅れを空間非局所項にとり入れた以下の問題も考察している．

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \left(\int_0^1 \varphi(x)\rho_\tau(x,t)dx\right)\partial_x\rho = 0, & 0<x<1,\ t>0, \\ \rho(x,t) = \rho_0(x,t), & 0<x<1,\ -\tau \le t \le 0, \\ \rho(0,t) = \rho(1,t) = 0, & t>0. \end{cases}$$

ここで，$\varphi \in L^2$ は既知関数とする．Tang は [7] と同様の方法で Liu[4] と同様の時間大域解の一意存在性と指数安定性を示している．

上で紹介した安定性に関する結果は，すべて時間遅れパラメータが十分小さい場合に対しての結果であることに注意したい．

## 2. 主定理

初期履歴を用いて，$I_0$ を以下で定義する初期履歴関数に対するノルムとする：

$$I_0 = \left(\sup_{-\tau\le t\le 0}\|\rho_0(t)\|_{H^1}^2 + \int_{-\tau}^0 \|\partial_x\rho_0(t)\|_{L^2}^2 dt\right)^{1/2}$$

この $I_0$ をひとつの指標とした次の時間大域解の存在定理が示される．

**定理 1** (時間大域解の存在定理, [2])**.** 次を満たす正数 $\delta$ が存在する：
初期履歴 $\rho_0 \in C([-\tau,0];H^1)$ が

$$(1+|V(0)|\sqrt{\tau})^2\sqrt{\tau}(1+I_0^2)I_0 \le \delta \tag{SC}$$

を満たすならば，(DB) の時間大域解 $\rho \in C([-\tau,\infty);H^1)$ が存在し，

$$\partial_x\rho \in L^2(0,\infty;H^1), \quad \partial_t\rho \in L^2(0,\infty;L^2)$$

と次のエネルギー評価を満たす：

$$\|\rho(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^\infty (\|\partial_t\rho(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x\rho(t)\|_{H^1}^2)dt \le C(1+I_0^4)I_0^2, \qquad t \ge 0.$$

ただし，$C$ は $\tau$ に依らない定数である．さらに，$\|\rho(t)\|_{L^\infty} \to 0$ $(t\to\infty)$ が成立する．

**注 2.** 定理 1 は，$\tau$ と $I_0$ が条件 (SC) を満たすならば時間大域解が存在することを主張している．すなわち，$\tau$ もしくは $I_0$ が十分小さくなくても，時間大域解が得られることを示唆している．

次に，定理 1 で得られた時間大域解の正則性について得られた結果を紹介する．そこで，$C_{loc}^\alpha((\beta,\infty);X)$ を，バナッハ空間 $X$ に値をとり $t$ の関数として $t\in(\beta,\infty)$ 内の局所 Hölder 連続な関数の空間と定める．このとき，以下が成り立つ：

**定理 3** (時間大域解の $t$ に関するHölder連続性,[2]). $V$ が $\rho$ の $C^1$ 級関数とする．このとき，定理 *1* で得られた時間大域解 $\rho$ は $\rho \in C^{1/2}_{loc}((0,\infty);H^1)$ であり

$$\|\rho(t)-\rho(s)\|_{H^1} \le J_1(s^{-1/2}+1)(t-s)^{1/2} \qquad (t>s>0)$$

が成り立つ．ただし，$J_1$ は $\tau$ によらない正定数である．

定理3により，$V \in C^2$ であれば $\partial_x(\rho V(\rho_\tau)) \in C^{1/2}_{loc}((\tau,\infty);L^2)$ であることがわかる．よって，積分方程式の解 $\rho$ が $\partial_t\rho, \partial_x^2\rho \in C((\tau,\infty):L^2)$ となり，$L^2$ に値をとる連続関数の枠組みで $\rho$ が方程式を満たすこともわかる．同様の考察を繰り返すことで正則性が上がることもわかる．すなわち，以下を示すことができる．

**定理 4** (時間大域解の $x$ に関する正則性, [2]). $n \in \mathbb{N}$ に対し，$V$ は $C^{n+1}$ 級であるとする．このとき，任意の $k\,(2 \le k \le n+1)$ に対し，定理 *1* で得られた時間大域解 $\rho$ は

$$\partial_x^k\rho,\, \partial_t\partial_x^{k-2}\rho \in C^{1/2^k}_{loc}(((k-1)\tau,\infty);L^2) \cap L^2((k-1)\tau,\infty;L^2)$$

を満たし，

$$\|\partial_x^k\rho(t)\|_{L^2} \le \mathcal{I}_k(\tau)\{(t-(k-1)\tau)^{-\frac{1}{2}}+1\}, \qquad t>(k-1)\tau$$

なる評価も満たす．ここで，$\mathcal{I}_k(\tau)$ は $\tau$ に依存する正定数である．

定理4では時間が経過するにつれて解が滑らかになる性質を示しており，時間遅れの効果を捉えたひとつの結果であると考えられる．

**注 5.** 定理4により，時間大域解の $t$ に関する正則性も上がることがわかる．例えば，$\partial_t^2\rho$ については方程式(DB)から

$$\begin{aligned}\partial_t^2\rho &= \nu\partial_t\partial_x^2\rho + \partial_t\partial_x(\rho V(\rho_\tau))\\ &= \nu\partial_t\partial_x^2\rho + \partial_t\partial_x\rho V(\rho_\tau) + (\partial_x\rho\partial_t\rho_\tau + \partial_t\rho\partial_x\rho_\tau + \rho\partial_x\partial_t\rho_\tau)V'(\rho_\tau) + \rho V''(\rho_\tau)\partial_t\rho_\tau\partial_x\rho_\tau\end{aligned}$$

とかけるので，左辺が表す項に注目すれば，$\partial_t^2\rho \in C^{1/2^4}_{loc}((3\tau,\infty);L^2) \cap L^2(3\tau,\infty;L^2)$ であることがわかる．このように方程式を用いれば，$t$ についても徐々に正則性が上がることがわかる．

## 3. 主定理の証明のアウトライン

### 3.1. 定理1の証明のアウトライン

定理1を示すための重要なカギとなる補題は，時間局所解の存在定理とアプリオリ評価である．アプリオリ評価を用いて時間大域解の存在定理を考えるために，$t' \ge 0$ を任意に1つ固定し，$t \ge t'$ に対して以下の初期履歴問題を考える：

$$\begin{cases}\partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x(\rho V(\rho_\tau)) = 0, & x\in\mathbb{R},\quad t>t',\\ \rho(\theta,x) = a_{t'}(\theta,x), & x\in\mathbb{R},\quad t'-\tau\le\theta\le t'\end{cases} \tag{DB$'$}$$

このとき，(DB$'$) に対して以下の時間局所解の存在定理が成り立つ：

**補題 6** (時間局所解の存在定理)**.** 任意の正数$M$に対して，次を満たす$t'$によらない定数$t_0 = t_0(M)$が存在する：初期履歴$a_{t'} \in C([t'-\tau, t']; H^1)$が

$$(1 + |V(0)|\sqrt{\tau})^2\sqrt{\tau} \sup_{t'-\tau \le s \le t'} \|a_{t'}(s)\|_{H^1} \le M$$

を満たすならば，初期履歴問題(DB$'$)は区間$[t', t'+t_0]$上で一意解$\rho \in C([t'-\tau, t'+t_0]; H^1) \cap L^2(t', t'+t_0; H^2)$をもち， $\partial_t \rho \in L^2(t', t'+t_0; L^2)$であり，以下が成り立つ：

$$(1 + |V(0)|\sqrt{\tau})^2\sqrt{\tau} \sup_{t'-\tau \le s \le t'+t_0} \|\rho(s)\|_{H^1} \le 2M$$

(DB)の解$\rho(t)$に対して，次のアプリオリ評価が成り立つ：

**補題 7** (アプリオリ評価)**.** $T > 0$とし，$\rho \in C([-\tau, T]; H^1)$を(DB)の解であり，$\partial_t \rho \in L^2(0, T; L^2)$, $\partial_x \rho \in L^2(0, T; H^1)$を満たすとする．このとき，以下を満たす正定数$\delta_0$が存在する：

$$(1 + |V(0)|\sqrt{\tau})^2\sqrt{\tau} \sup_{-\tau \le s \le T} \|\rho(s)\|_{L^\infty} \le \delta_0$$

であれば，解$\rho$は$0 \le t \le T$に対して以下を満たす：

$$\|\rho(t)\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\partial_t \rho(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|\partial_x \rho(s)\|_{H^1}^2 ds \le C_0(1 + I_0^4)I_0^2.$$

ただし，$C_0$は$\tau$によらない正定数である．

アプリオリ評価（補題7）を示すために，以下の補助関数を用意する：

$$z(t, \theta, x) = \rho(t+\theta, x), \qquad t > 0, \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad x \in \mathbb{R}.$$

このとき，$z(t, 0, x) = \rho(t, x)$, $z(t, -\tau, x) = \rho_\tau(t, x)$, $z(0, \theta, x) = \rho_0(\theta, x)$が成り立ち，

$$\partial_t z - \partial_\theta z = 0, \qquad t > 0, \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad x \in \mathbb{R}$$

なる関係式も成り立つことに注意する．このとき，(DB)の解$\rho$の低階項については以下のアプリオリ評価が成り立つ：

**補題 8.** 補題 7と同じ仮定下では，(DB)の解$\rho$に対して，次が成り立つ：$t \in [0, T]$に対して

$$\begin{aligned}
&\|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_{-\tau}^0 e^{\theta/\tau}\|\partial_x z(t,\theta)\|_{L^2}^2 d\theta + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|\partial_x \rho(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{\nu}{4e}\int_0^t \|\partial_x \rho_\tau(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&+ \frac{\nu}{\tau}\int_0^t \int_{-\tau}^0 e^{\theta/\tau}\|\partial_x z(s,\theta)\|_{L^2}^2 d\theta ds + \frac{\nu}{4(e\nu + 2|V(0)|^2\tau)}\omega(t)\int_\tau^t \int_{s-\tau}^s \|\partial_t \rho(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds \\
&\le \tilde{C}_0 \tilde{I}_0^2.
\end{aligned}$$

ただし，$\tilde{C}_0$は$\tau$によらない正定数，$\omega(t)$は

$$\omega(t) := \begin{cases} 1 & for \quad t > \tau, \\ 0 & for \quad 0 \le t \le \tau, \end{cases}$$

で定義される関数であり，$\tilde{I}_0$は以下で定義される初期履歴関数に対するノルムである：

$$\tilde{I}_0 = \left( \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|\rho_0(\theta)\|_{L^2}^2 + \int_{-\tau}^0 \|\partial_x \rho_0(\theta)\|_{L^2}^2 d\theta \right)^{1/2}$$

また，(DB) の解 $\rho$ の高階項の評価については，以下が成り立つ．

**補題 9.** 補題 7と同じ仮定下では，(DB) の解 $\rho$ に対して次が成り立つ：$t \in [0,T]$ に対して，

$$\|\partial_x \rho(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\partial_t \rho(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|\partial_x^2 \rho(s)\|_{L^2}^2 ds \le \tilde{C}_1(1+\tilde{I}_0^4) I_0^2$$

ただし，$\tilde{C}_1$ は $\tau$ によらない正定数である．

補題8と補題9から直ちに補題7が示される．

### 3.2. 定理3の証明のアウトライン

解の $t$ に関する Hölder 連続性（定理3）については，解の積分表示：

$$\rho(t) = S(t)a_0(0) - \int_0^t S(t-s)\partial_x(\rho V(\rho_\tau))(s) ds.$$

と初等的な評価式

$$\int_a^b \sigma^{-1} d\sigma \le a^{-\theta}\int_a^b (\sigma - a)^{\theta-1} d\sigma = \frac{1}{\theta} a^{-\theta}(b-a)^\theta$$

$(b > a > 0,\ \theta \in (0,1))$ を用いることで証明することができる．

### 3.3. 定理4の証明のアウトライン

定理4の証明のカギは，数学的帰納法によって解の正則性が上がることを体系的に捉えることである．そのため，以下の2つの補題を用意する：

**補題 10.** $V$ は $C^2$ 級とする．このとき，(DB) の解 $\rho(t)$ に対して

$$\|\partial_x^2 \rho(t)\|_{L^2} \le I_2\{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\}, \quad t > \tau,$$

かつ，

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^2(\rho(t)-\rho(s))\|_{L^2} \\
&\le J_2^1\left\{(s-\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right\}(t-s)^{\frac{1}{2}} + J_2^2\left\{(s-\tau)^{-\frac{3}{4}} + t^{\frac{1}{4}}\right\}(t-s)^{\frac{1}{4}}, \quad t > s > \tau
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$I_2, J_2^1, J_2^2$ は正定数である．

**補題 11.** $V$ は $C^{n+1}$ 級とし，$k$ を $n$ 以下の任意の非負整数とし，(DB) の解を $\rho(t)$ とする．$0 \le \ell \le k$ を満たすすべての整数 $\ell$ に対し，

$$\|\partial_x^\ell \rho(t)\|_{L^2} \le I_\ell(\tau)\{(t-(\ell-1)\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{\ell-1}{2}}\}, \qquad t > (\ell-1)\tau,$$

かつ

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^\ell(\rho(t)-\rho(s))\|_{L^2} \\
&\le J_\ell^1(\tau)\{(s-(\ell-1)\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{\ell-1}{2}}\}(t-s)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\ell} J_\ell^j(\tau)\{(s-(\ell-1)\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^j}} + t^{\frac{\ell-1}{2}-\frac{1}{2^j}}\}(t-s)^{1/2^j}, \qquad t > s > (\ell-1)\tau
\end{aligned}$$

が成り立つと仮定する．ここで，$I_\ell(\tau), J_\ell^j(\tau)$ は $\tau$ に依存する正定数である．

このとき，

$$\|\partial_x^{k+1}\rho(t)\|_{L^2} \le I_{k+1}(\tau)\{(t-k\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{k}{2}}\}, \qquad t > k\tau$$

かつ，

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^{k+1}(\rho(t)-\rho(s))\|_{L^2} \\
&\le J_{k+1}^1(\tau)\{(s-k\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{k}{2}}\}(t-s)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k+1} J_{k+1}^j(\tau)\{(s-k\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^j}} + t^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2^j}}\}(t-s)^{1/2^j}, \qquad t > s > k\tau
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$I_{k+1}(\tau), J_{k+1}^j(\tau)$ は $\tau$ に依存する正定数である．

これらの補題により，解の導関数のHölder連続性が示され，任意の $k$ $(2 \le k \le n+1)$ に対して

$$\|\partial_x^k\rho(t)\|_{L^2} \le I_k(\tau)\{(t-(k-1)\tau)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{k-1}{2}}\} \qquad t > (k-1)\tau$$

が導出される．ここでさらに，エネルギー法を用いて解の時間に関する一様な評価を導くことで，定理4が証明される．

## 参考文献


[1] 田中光宏,「非線形波動の物理」，森北出版，(2017）.

[2] T. Kubo and Y. Ueda, ”Existence theorem for global in time solution to Burgers equation with a time delay”, (投稿中).

[3] 藤田宏，黒田成俊，伊藤清三,「関数解析」，岩波出版，(1991).

[4] W. Liu, “Asymptotic behavior of solutions of time-delayed Burgers’ equation”, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, Vol. **2**, Number **1**, (2002), 47-56.

[5] N. Smaoui and M. Mekkaoui, “The generalized Burgers equation with and without a time delay”, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, No.**1**, (2004), 73-96.

[6] Y. Tang, “Exponential stability of nonlocal time-delayed Burgers equation”, Perspectives in Mathematical Sciences, Interdisciplinary Mathematical Sciences, Vol.**9**, (2009), 265-274.

[7] Y. Tang and M. Wang, “A remark on exponential stability of time-delayed Burgers equation”, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, Vol. **12**, Number **1**, (2009), 219-225.