遅延微分方程式の解の爆発現象についての考察

芝浦工業大学 石渡 哲哉
Tetsuya Ishiwata
Shibaura Institute of Technology

青山学院大学 中田 行彦
Yukihiko Nakata
Aoyama Gakuin University

1 はじめに

微分方程式における爆発解は, 方程式が非線形である場合に現れることがある特徴的な解の 1 つであり, 様々な非線形微分方程式に対して精力的に研究されている対象である. 本稿では, 非線形遅延微分方程式に現れる解の爆発現象について, 履歴の参照の仕方と解の爆発との関係についてこの数年取り組んできた内容について紹介する. なお, 本稿では「解の爆発」という場合は有限時間で解の大きさが発散することを指すものとする.

さて, ここで扱う遅延微分方程式とは解の過去の情報が盛り込まれた微分方程式であり, 過去の履歴の参照の仕方も様々である. 現在時刻より一定時間前の解の情報を参照する定数遅延や, 参照する時間と現在の時間の差（タイムラグ）が時間変化する時間依存型遅延, タイムラグが解そのものに依存する状態依存型遅延, 過去のある時間区間上の解の履歴情報に依存する分布型遅延などがある. 現象の数理モデリングという観点から見れば, 瞬時に情報が届かない状況や, システムへの何らかのインプットからそれに対する応答までタイムラグが発生することは比較的よく起きうるであろうから, タイムラグの効果を数理モデルに取り込むか取り込まないかや, 取り込むとしたらどのように取り込むのが適切なのかは, それ自

体重要な問題であろう．[1] 本稿ではそういった数理モデリングの観点には踏み込まず, 遅延の解の爆発に与える影響を考察した内容について報告する．

まずはじめに, 簡単な例として次のマルサスモデルを考える:

$$x'(t) = -x(t) \qquad (t > 0).$$

この方程式の解と, 右辺の $x(t)$ に定数のタイムラグ $\tau(> 0)$ を導入した $x(t-\tau)$ に置き換えた

$$x'(t) = -x(t-\tau) \qquad (t > 0)$$

の解を考える． なお, 後者の遅延微分方程式の場合は初期条件として $[-\tau, 0])$ 上の連続関数を与える． このとき, 時間遅れが $0 < \tau < 1/e$ の場合はすべての解は $t \to \infty$ で振動することなく[2] 平衡解 $x = 0$ に収束する．つまり, 漸近挙動は $\tau = 0$ の場合と同じである．タイムラグを $\tau > 1/e$ とすると解に振動性が現れ, $\tau > \pi/2$ では零解に収束しなくなり振動しながら振幅が増加することが知られている．(例えば [8] を見よ.) この例では, タイムラグが小さいときにはタイムラグがない場合と同じ漸近挙動を示し, タイムラグが大きくなるとシステムを不安定化させる効果 (delay-induced instability) を持つ．このような描像が成り立つ場合は, 解析を少しでも容易にするためタイムラグが小さい場合はタイムラグを無視した数理モデルで詳細な解析をするというのは 1 つの自然な考えであろう．しかし, 次節で紹介するようにこのような描像は常に成り立つわけではない．特に非線形系において, どのようなときにこのような描像が成立するか, あるいは成立しないのか, についてこれを判定する一般的な条件は筆者の知るところ得られていない．また, タイムラグは上記のような不安定化という効果だけではなく, 逆に適切に時間遅れ項を導入すると不安定軌道を安定化させることができる (Delay-Feedback 制御,[9]) ことがあることも知られている．

本稿では解の爆発という観点から遅延微分方程式と常微分方程式の関連について調べた結果を紹介する．数理モデリングや制御に関する話題は踏み込まないが, 次節に述べる遅延誘導爆発の例のように, タイムラグの大きさによらずタイムラグがある場合とない場合とで本質的に解のダ

[1]もちろん, そのようなタイムラグが発生する過程も組み込んだフルモデルを扱うという立場もある．この両者の関係を数理的に考察することも重要かつ面白いテーマであると筆者は考えている．

[2]時間発展当初に初期関数の影響による振動が現れることはある．

イナミクスが異なることがあるので, 様々なタイプのタイムラグが非線形系の解構造にどのように影響を及ぼすかという数学解析の知見は, 将来的には数理モデリングや制御の分野で生かせるのではないかと考えている.

2 時間遅延が解の爆発を引き起こすか

タイムラグと解の爆発との関係を調べるにあたってまず考えた問は次である:

「タイムラグが入るからこそ解の爆発が起こり, タイムラグがない場合は解の爆発が起こらない, ということがあるか」[3]

この節で述べる遅延誘導爆発の例はそんな疑問からスタートした研究である. この研究を始めた当時, 遅延微分方程式の解の爆発についての研究はそれほど多くなく, 1 次元問題についてある程度系統的に扱ったものとして K. Ezzinbi ら ([4]) の結果や積分方程式に対する結果があったが, 上記のような問題意識での研究は調べた範囲では皆無であった.

次の問題を考える:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= x(t) - y(t) - x(t-\tau)(x^2(t) + y^2(t)),\\
y'(t) &= x(t) + y(t) - y(t-\tau)(x^2(t) + y^2(t)).
\end{aligned}
$$

x, y にそれぞれ $[-\tau, 0]$ 上の連続関数を初期関数として与える初期値問題を考える. $\tau = 0$ とした常微分方程式系はよく知られた 2 次元非線形振動系であり, 周期解は単位円周上を角速度 1 で動くものただ 1 つであり, 不安定な平衡点である原点以外から出発した解はすべて $t \to \infty$ でこの周期解に漸近する. なお, すべての解の角速度は常に 1 であり, 平衡解・周期解以外の解の半径 $r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ は時間に関して単調であり, $t \to \infty$ で 1 に収束する.

この問題に対して, 我々は [3] で以下を示した:

- 任意の $\tau > 0$ に対して, 有限時間で解の半径 $r(t)$ が発散する解が存在する.
- 任意の $\tau > 0$ に対して, 無限個の不安定な円形周期解が存在する.

[3]もちろんその逆を考えてもよい. あるいは, 適切に過去の情報を参照した項を導入することで「解の爆発」を防げるか, というある種の制御の問題とするのも面白い.

- ある τ_* が存在して, $\tau \in (0, \tau^*)$ に対しただ 1 つの漸近安定な円形周期解が存在する.

つまり, $\tau > 0$ の場合と $\tau = 0$ の場合とでは, 解の描像が大きく異なることが分かる. 1 つ目の結果のように, 時間遅れによって引き起こされる解の爆発現象を我々は「遅延誘導爆発」と名付けた. なお, このような 2 次元遅延振動系に現れる爆発解は矢ヶ崎 ([11]) によっても調べられている.[4]

ここで一旦この節冒頭の問いへ戻ると, その解答はイエスということになる. また, 小さい時間遅れであっても爆発が引き起こされているため, §1 で述べた描像: 『タイムラグが小さいときにはタイムラグがない場合と解の挙動は定性的に同じである』は, この場合は成り立たないということになる. ただし, 周期解については上の 3 つ目に挙げた漸近安定な円形周期解は, $\tau \to 0$ のとき $\tau = 0$ のときに唯一存在していた円形周期解に収束する. つまり, 漸近安定な周期解については, $\tau > 0$ の場合と $\tau = 0$ の場合が連続的に繋がっているとことになる.

現段階では, この系に関する数学的な結果は以上であり, その他の解についてはまだよく分かっていない. この節の締めくくりとして筆者が興味を持っている未解決問題について述べる.

- 時間大域解の分類. 平衡点 (原点), 円形周期解以外に時間大域解があるか？例えば楕円形や星型の周期解, 接続軌道, 非有界大域解などは存在するのか. また, それらの挙動や性質.

- 爆発のための必要十分条件や爆発レートなどの爆発解の性質. 数値計算では, 平衡点, 円形周期解を除くと, $0 < \tau < \tau^*$ の場合には漸近安定な周期解に収束する解でないものは有限時間爆発を起こしているように見える. $\tau > \tau^*$ の場合は平衡点, 円形周期解を除くと, すべての解は有限時間爆発するように見える. この数値的予想は正しいであろうか？

- 数値計算でしばしば見られる挙動に, τ が τ^* と同程度のときに, 何らかの円軌道周辺でしばらく回り続けたのちに爆発する, というも

[4] この 2 次元系の遅延なしの常微分方程式系は, 半径と偏角 (r, θ) の系として $r' = ar - r^3, \theta' = 1$ の $a = 1$ の場合になっている. $a = 0$ が Hopf 分岐点であるので, 漸近安定な周期解が存在しない $a \leq 0$ の場合はどうなのかという興味も沸いてくる. 特に $a < 0$ の場合は原点が大域漸近安定な平衡点となる. しかし, これに今回と同様の時間遅れを導入すると, 同様の主張を示すことが出来る. つまり, 任意の正の時間遅れに対して有限時間爆発解や無限個の周期解が出現する.

のがある. 割とよく見られる挙動であるが, これを引き起こすメカニズムは何であろうか？

3 爆発から見た遅延微分方程式と常微分方程式の関連

前節で見たように 2 次元系での爆発解の解析は始まったばかりである. それでは 1 次元問題ではどうかというと, それほど爆発解の研究が多いわけではない ([1, 2, 5, 10] やその参考文献を参照). Ezzinbi ら ([4]) の結果は, 爆発解を持つ常微分方程式に遅延項を追加した遅延微分方程式が同様に爆発解を持つか, という観点から系統的に調べた数少ない研究である. 彼らは $x'(t) = f(x(t))$ が爆発解を持つとき, $x'(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$ や $x'(t) = f(x(t))g(x(t-\tau))$, およびこれらを含むより一般的な方程式が爆発解を持つ十分条件が示されている. つまり, 爆発解を持つ常微分方程式に遅延項を付加した場合の解の爆発に影響を与えない十分条件を示している.

同様の設定として, この節では次の 1 次元の遅延微分方程式を考える.

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), x(t-1)). \tag{1}$$

ここで, 関数 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数とし, 連続関数 $\phi(\theta)(\theta \in [-1, 0])$ を初期条件 $x(\theta) = \phi(\theta)$ $(\theta \in [-1, 0])$ に課した問題を考える. ここで時間遅れを 1 と固定したのは, 方程式 $x'(t) = F(x(t), x(t-\tau))$ は時間に関する変数変換をすることで上記のような設定に書き換えることができるからである. [5]

この問題と対比する常微分方程式としてはどのようなセッティングのものを考えるのが妥当であろうか? 前節では単純に $\tau = 0$ と置いたものを対象とした. つまり, $x'(t) = F(x(t), x(t))$ を比較する常微分方程式として考えていたことになる. ここで, 例えば関数 $F(x, y) = xy$ を考えると, $x'(t) = x(t)x(t-1)$ と $x'(t) = x(t)x(t) = x^2(t)$ を比較することになり, $x(t)$ のみに着目すると依存度が異なることが分かる. [6] なお, この差異は,

[5] 変数変換により τ が第 2 変数の中から消え, 陽なパラメータとして方程式右辺に現れるので, 方程式右辺は本来は元の F そのものではない. ただし, F の解 $x(t)$ への依存性や履歴 $x(t-\tau)$(あるいは $x(t-1)$) への依存性は変わらないので, ここでは同じ F を用いて表わすこととする.

[6] 問題全体として非線形性が異なるのかは別問題として.

$x'(t) = x^2(t)$ の正値解はすべて有限時間で爆発し, $x'(t) = x(t)x(t-1)$ の解はすべて時間大域解である, という違いを生む.

ここでは, 方程式右辺の $x(t)$ 依存度を揃えて考察を進めることにする. 比較対象とする常微分方程式として方程式右辺の F の第 2 成分を定数 a と置いた常微分方程式:

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), a) \tag{2}$$

を考える. 先の F の例では, $x'(t) = x(t)x(t-1)$ と $x'(t) = ax(t)$ を比較することになる. このセッティングで解の爆発という観点から考察された結果 ([7]) は以下である:

- If there exists $a \in \mathbb{R}$ such that equation (2) has a blow-up solution, then equation (1) has blow-up solutions.
- Suppose (H): For any closed bounded interval $I \subset \mathbb{R}$ and for any $y \in I$ there exist $a_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, 2\})$ such that for any $x \in \mathbb{R}$

  $$F(x, a_1) \leq F(x, y) \leq F(x, a_2).$$

  Then, if equation (1) has a blow-up solution, then there exists $a \in \mathbb{R}$ such that equation (2) has blow-up solutions.

2 つ目の結果は条件付きではあるが, これによりある程度遅延微分方程式と常微分方程式の解の爆発に関する対応関係が整理されたことになる. なお, (H) として課した条件は今後緩和したいと考えているが, この 2 つ目の主張は無条件には成り立たない. 例えば F として $F(x, y) = x^2 \sin xy$ を考えると, 遅延微分方程式 (1) は爆発解を持つが, 常微分方程式 (2) の解は有限時間で爆発することはない. よって, 後者の主張のためには何らかの条件が必要となっている.

なお, 論文 [7] では爆発レートに関する考察も行なっているので, 興味ある方は参照していただきたい.

4 分布型の遅延を持つ場合

前節で例示した $x'(t) = x(t)x(t-1)$ と $x'(t) = x(t)x(t) = x^2(t)$ を別の観点から繋いでみよう. この二つの問題は δ をディラックのデルタ関数と

するとそれぞれ

$$x'(t) = x(t)\int_0^1 2\delta(s-1)x(t-s)ds,$$
$$x'(t) = x(t)\int_0^1 2\delta(s)x(t-s)ds$$

と書き直すことで, $[t-1,t]$ における履歴をどのように参照しているかの違いと見なすことができる. ここでは, この 2 つを繋いで以下の分布型の遅延を持つ問題を考える:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\int_0^1 w(s)x(t-s)ds. \tag{3}$$

ここで, w は履歴に対する重みを表し, 非負値連続関数とする. また初期関数は簡単のため正値連続関数とする.

まず最も単純な一様分布 $w(s) \equiv 1$ の場合を考える. この場合次の結果を得る:

- すべての正値解は有限時間で爆発する.

この状況をより明確に理解するために一般化した次の問題を考える.

$$\frac{dx}{dt} = x^p(t)\int_0^1 x^q(t-s)ds.$$

ただし, $p, q > 0$ とする. このとき, 次を示すことができる.

- $p+q > 1$ のとき, すべての正値解は有限時間で爆発する.
- $p+q \leq 1$ のとき, すべての正値解は時間大域的に存在し非有界.

この結果から, 一様分布の場合, 方程式右辺はあたかも $x^{p+q}(t)$ のように働くように見える. これは, 一様分布の場合は $s=0$ における (履歴) 情報を参照しているのである意味自然であると理解することもできる. 同様に考えて, (3) において $w(0) > 0$ の場合はやはりすべての正値解の有限時間爆発を示すことが出来る. 一方, ある $s_0 \in (0,1)$ に対して $w(s) = 0 (0 \leq s \leq s_0)$ である場合はすべての正値解は時間大域的である. よって, 考察すべき状況は $w(0) = 0$, $w(s) > 0$ $(0 < s < \exists s_1)$ となる重みの場合である. ここに有限時間爆発と時間大域的存在を分ける分水嶺となる重み関数があるだろうか?

そこでまず重みが冪型の $w(s) = s^r (r > 0)$ を考え, この指数 r が爆発をコントロールするか考察する. このとき次の結果を得る.

- 任意の $r > 0$ に対し, すべての正値解は有限時間で爆発する.

つまり, この冪型の重みの範疇では分水嶺はないことが分かる. [7] 現在まで数学的考察として得られているのはここまでである. この分布型問題で明らかにしたい問いとして次を挙げておく.

- 分布型遅延微分方程式 (3) の重み $w(s)$ に有限時間爆発と時間大域存在を分ける分水嶺関数は存在するか？

  あるとすれば $s \to 0$ で任意の冪より早く 0 に収束するような関数である. 例えば, $w(s) = \exp(-1/s)$.

最後に, 例として挙げた $w(s) = \exp(-1/s)$ について数値的考察を述べる. この重み関数を直接扱うのではなく, この重みを上から近似した問題を考えて, その問題の解が大域存在するかどうかを考察する. $\alpha_n = n\exp(-n), \delta_n = \frac{1}{n}$ として, 重みを

$$\hat{w}_n(s) = \begin{cases} \alpha_n s & \text{if } 0 \le s \le \delta_n, \\ w(s) & \text{if } s > \delta_n. \end{cases}$$

このとき, $n \to \infty$ で $\alpha_n, \delta_n \searrow 0, \hat{w}_n(s) \to w(s)$ である. すると問題は,

$$\begin{aligned} x'(t) <& x(t) \left[\int_0^{\delta_n} \alpha_n s\ x(t-s)ds + \int_{\delta_n}^1 w(s)x(t-s)ds \right] \\ <& \frac{e^{-n}}{2n} x^2(t) + \frac{1}{2} x(t)x(t-\delta_n) \end{aligned}$$

と上から近似できる. [8] $\beta_n = e^{-n}/2n$ として次の問題を考える.

$$y'(t) = \beta_n y^2(t) + \frac{1}{2} y(t)y(t-\delta_n). \tag{4}$$

この近似モデルは, 右辺第 1 項の 2 次の非線形性から解は爆発するが, 右辺第 2 項を無視して考えると, 爆発時間は $n \to \infty$ で無限大に発散する. 同様にして近似モデル (4) の解の爆発時刻が $n \to \infty$ において無限大に発散すれば, 元の問題の解が大域的に存在することが示唆される.

---

[7] ただし, まだ十分精密な評価ではないが爆発レートに r が関わってきそうであると考えている.

[8] 解の単調増加性より. なお, 第 2 項の 1/2 は以下の議論を分かりやすくするため大きく取っている.

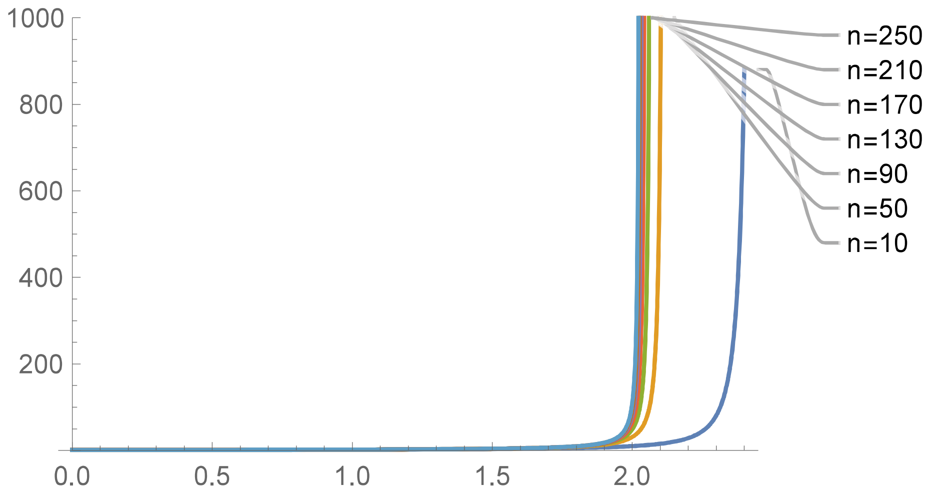

図 1: 近似モデル (4) に対する数値計算例 ($n = 10 \sim 250$)

ここで右辺第 2 項に着目すると, この項だけではもちろん爆発解を生じさせない. しかし, $n \to \infty$ とするとこの項は $x^2(t)/2$ となる. かなり微妙なところである. ここで様々な n に対して初期関数を定数 1 として数値計算した図 4 を見ると n の増大にしたがって急激な増加をしている時間が $t = 2$ に上から漸近していく様子が見られる. なお, 各 n に対しては右辺第 1 項の効果により近似モデル (4) の解は有限時間で爆発することに注意. よって, この数値例の爆発時刻は 2 に漸近しているとみてよいであろう. では, この時刻 2 とは何であるか考えると, これは近似モデル (4) を形式的に $n \to \infty$ とした常微分方程式の初期値問題:

$$y'(t) = \frac{1}{2}x^2(t), \quad y(0) = 1$$

の爆発時間となっていることが分かる. つまり, 近似モデル (4) の $n \to \infty$ での極限を考える際は, 右辺第 2 項が爆発解の性質に関して大きく寄与していることが示唆される. 以上についてはまだ数学的に示せているわけではないが, この上からの近似問題の爆発時刻が有界な範囲に留まることが予想され, 当初の目論見通りにはいかなそうである. よって, 現段階では元の問題の解が爆発するか大域的に存在するかは分からない. 今後の課題である.

Acknowledgement

本研究は科研費（No. 19H05599, No. 19K21836, No. 20K03734, No. 21H01001）の助成を受けたものである.

参考文献

[1] J.A.D. Appleby, D.D. Patterson, Blow–up and superexponential growth in superlinear volterra equations, Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. A, 38(8) (2018) pp. 3993–4017.

[2] H. Brunner, Z.W. Yang, Blow-up behavior of Hammerstein-type Volterra integral equations, J. Int. Equ. Appl., 24(4) (2012) pp. 487–512.

[3] A. Eremin, E. Ishiwata, T. Ishiwata, Y. Nakata, Delay-induced blow-up in a planar oscillation model, Jpn. J. Ind. Appl. Math., 38(2021), pp. 1037–1061.

[4] K. Ezzinbi, M. Jazar, Blow-up results for some nonlinear delay differential equations, Positivity, 10(2) (2006) pp. 329–341.

[5] I. Győri, Y. Nakata, G. Röst, Unbounded and blow-up solutions for a delay logistic equation with positive feedback, Comm. Pure Appl. Anal., 17(6) (2018) pp. 2845–2854.

[6] J.K. Hale and S.V. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer, 1993.

[7] T. Ishiwata and Y. Nakata, A note on blow-up solutions for a scalar differential equation with a discrete delay, to appear in Jpn. J. Ind. Appl. Math.

[8] 内藤 敏機, 日野 義之, 原 惟行, 宮崎 倫子, タイムラグをもつ微分方程式—関数微分方程式入門, 牧野書店, 2002.

[9] K.Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback, Phys. Lett. A, 170 (1992), 421–428.

[10] C.A. Roberts, Recent results on blow-up and quenching for nonlinear Volterra equations, J. Comp. Appl. Math. 205(2) (2007) pp. 736–743.

[11] K. Yagasaki, Existence of finite time blow-up solutions in a normal form of the subcritical Hopf bifurcation with time-delayed feedback for small initial functions, Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. B, (2021) online.