様相ミュー計算のタブロー法の完全性と無限ゲームの決定性について

東京工業大学 情報理工学院　鹿島 亮
Ryo Kashima
Department of Mathematical and Computing Science,
Tokyo Institute of Technology

1　本稿で示すこと

Niwinski & Walukiewicz [1] は様相ミュー計算のタブロー法（無限パスを持つシークエント計算）を導入し，その健全性・完全性，すなわち次を示した．

論理式 ξ の閉タブローが存在する　$\Longleftrightarrow$　ξ は恒真である

（正確には [1] では，「refutation の存在と充足不可能性との同値性」が示されているが，本稿ではシークエント計算を指向して「閉タブローの存在と恒真性との同値性」という形に議論を翻訳した．）これを示すために，[1] ではタブロー法をゲームにしたタブローゲーム（と本稿で勝手に名付けた）（プレイヤーの名前は「製造者」と「阻止者」とする）を導入し，それを用いて次の流れで示している（定理番号は [1] のもの）．

(Prop.4.1) タブローゲームに製造者の必勝戦略が存在 $\Longleftrightarrow$ 閉タブローが存在．
(Prop.4.1, Th.5.6) タブローゲームに阻止者の必勝戦略が存在 $\Longleftrightarrow$ 恒真でない．
(Prop.4.2 の実質) どんなタブローゲームにも製造者か阻止者のどちらか一方の必勝戦略が必ず存在する．【タブローゲームの決定性】

これに対して，本稿では次の流れで健全性・完全性を示す（定理番号は本稿のもの）．

(定理 3) 通常の意味論で恒真 $\Longleftrightarrow$ ゲーム意味論で恒真．【ゲーム意味論の妥当性】
(定理 5) 閉タブローが存在 $\Longrightarrow$ ゲーム意味論で恒真．
(定理 6) タブローゲームに製造者の必勝戦略が存在 $\Longrightarrow$ 閉タブローが存在．
(定理 8) タブローゲームに阻止者の必勝戦略が存在 $\Longrightarrow$ ゲーム意味論で恒真でない．
(命題 10) どんなタブローゲームにも製造者か阻止者のどちらか一方の必勝戦略が必ず存在する．【タブローゲームの決定性】

タブロー法とゲーム意味論が非常に相性が良いので，定理 5, 6, 8 はとても素直に示せる．つまり，面倒な議論は定理 3（この証明は文献 [2, 3] などに載っている）に押し込めて，タブロー法の健全性・完全性の簡潔な別証明を与える．

しかしいずれの方法でもタブローゲームの決定性（[1] の Prop.4.2，本稿の命題 10）が必要になる（私は証明できていないので「定理」でなく「命題」としている）．[1] ではこ

の命題の証明の概要だけを書いて簡単に済ませてしまっているが，私にはそれがよくわからない，ということを説明する．

2 背景

この節では本稿の背景になっている基本的な定義や定理を記述する．無限ゲームに関する詳細はたとえば文献 [5] を，様相ミュー計算に関する詳細はたとえば文献 [2, 3] を参照されたい．

2.1 無限ゲーム

一般に集合 X に対して，X^* は X の要素の有限列全体の集合，X^ω は X の要素が $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle$ というように並んだ無限列全体を指す．

以下では集合 X を固定して，X の要素を局面と呼ぶ．ゲームとは，ふたりのプレイヤー（I,II とする）が規則に従って局面を選んでいき，そうしてできる局面の列（有限，または可算無限）によってどちらの勝利であるかが決まるものである（引き分け無し）．

正確にはゲームは，開始局面（X の要素），および次の要素 T, R, W_I から成る．

- 各局面が I と II のどちらの手番であるか決める関数 T．つまり $T : X \to \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$
- 各局面で手番のプレイヤーが選べる「次の局面」を決める関数 R．つまり $R : X \to \mathfrak{P}(X)$．（$\mathfrak{P}(X)$ は X の冪集合）
- I の勝利プレイ全体の集合 W_I．正確には $W_\mathrm{I} \subseteq X^* \cup X^\omega$．

次を満たす有限列 $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ または無限列 $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots \rangle$ のことをプレイと呼ぶ．

- x_0 は開始局面．
- 各 i は次を満たす：$R(x_i)$ が空でないならば x_{i+1} があって $x_{i+1} \in R(x_i)$，$R(x_i)$ が空ならば x_{i+1} は無い（列が x_i で終了）．

プレイの勝敗は W_I で定まる．すなわち

P が I の勝利プレイかつ II の敗北プレイ $\iff P \in W_\mathrm{I}$.
P が II の勝利プレイかつ I の敗北プレイ $\iff P \notin W_\mathrm{I}$.

局面をノードする木（つまり各ノードに局面がラベル付けされた木）であって，プレイの可能な分岐をすべて記述したものを**完全ゲーム木**と呼ぶ．つまりこれは次の次のような木である．

根は開始局面．ノード x の子の集合は $R(x)$ に等しい．

そして，完全ゲーム木の空でない部分木であって，任意のノード x が次を満たすものを，

「I の**必勝戦略**」と呼ぶ（条件 (iii) を要請しない木を単に「I の**戦略**」と呼ぶ）

(i) もし $T(x) = \mathrm{I}$ であって $R(x)$ が空でないならば，x にはただひとつの子がある．
(ii) もし $T(x) = \mathrm{II}$ ならば．x の子の集合は $R(x)$ に等しい．
(iii) すべてのパス（根から葉に至るもの，または根から始まる無限パスのこと）は I の勝利プレイ．

II の必勝戦略も同様に定義される．各プレイヤーは必勝戦略に従ってプレイすれば必ず勝つことができる．

次は定義から簡単にわかる．

定理 1 プレイヤー I と II の両方の必勝戦略が同時に存在することはない．

しかし次は全然自明ではない．

命題 2 プレイヤー I と II のどちらかの必勝戦略は存在する．

命題 2 の主張を，ゲームの**決定性** (determinacy) と言う．勝利条件 W_{I} がボレル集合であるならば決定性が成り立つことが知られている．たとえば，可算の添字 i, j が付いた集合 $Q_{i,j} \subseteq X^*$ があり，

$$W_{\mathrm{I}} \ = \ \bigcup_i \bigcap_j (Q_{i,j} \cdot X^\omega)$$

と書けるとき（ただし集合間の連接演算「$\cdot$」は次で定義される：$A \cdot B = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A \text{ かつ } \beta \in B\}$ ），これはボレル階層の中の $G_{\delta\sigma}$ と呼ばれ，このゲームは決定性を持つ．

2.2 様相 μ 計算

論理式を以下で定義する（「否定標準形」である）．

(i) x が命題変数ならば，x と $\overline{x}$ は共に論理式である．
(ii) φ, ψ が論理式ならば $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\Box\varphi)$, $(\Diamond\varphi)$ はすべて論理式である．
(iii) φ が論理式で x が命題変数で，φ 中に $\overline{x}$ は現れず x が現れる場合はすべて $\Box$ や $\Diamond$ の内側にある（この x に関する条件を「guarded」と呼ぶ）ならば，$(\mu x.\varphi)$, $(\nu x.\varphi)$ は共に論理式である．

μ や ν で束縛されている変数を束縛変数と言い，そうでない変数を自由変数という．自由変数およびそれに $\overline{}$ が付いた式のことを**リテラル**と呼ぶ．今後は命題変数を x, y, p, q などで表し，リテラルを ℓ などで表し，論理式を $\xi, \varphi, \psi, \alpha, \beta$ などで表す．μ で束縛された変数を「μ 変数」，ν で束縛された変数を「ν 変数」とそれぞれ呼ぶ．束縛記号 μ, ν を一般に η, η' などで表す．論理式の集合を Γ, Δ などで表す．

ひとつの論理式の中では同一の変数 x に対してはひとつの ηx の出現しか許さず，x が自由と束縛の両方で出現することもないとする（束縛変数の名前替えをしても意味が変わらないのでこの制限は本質的でない）．そのような論理式 ξ の中の束縛変数の間に，関係 $>_\xi$ を次で定義する．

$$
\begin{array}{lll}
x >_\xi y & \iff & \xi \text{ は } \cdots(\eta x.(\cdots \eta' y.(\cdots)\cdots))\cdots \text{ という形をしている．} \\
 & & \text{つまり } \xi \text{ 中で } x \text{ は } y \text{ より外側で束縛される．}
\end{array}
$$

束縛変数を guarded に限るのは技術的な理由であるが，guarded でない論理式は同値な guraded な式に変形できる（その方法はたとえば [1] に載っている）．

$\neg$ は省略形として定義する．

$$
\neg x = \overline{x}.\ \neg\overline{x} = x.\ \neg(\varphi \wedge \psi) = \neg\varphi \vee \neg\psi.\ \neg(\varphi \vee \psi) = \neg\varphi \wedge \neg\psi.\ \neg\Box\varphi = \Diamond\neg\varphi.
$$
$$
\neg\Diamond\varphi = \Box\neg\varphi.\ \neg(\mu x.\varphi(x)) = \nu x.\neg\varphi(\neg x).\ \neg(\nu x.\varphi(x)) = \mu x.\neg\varphi(\neg x).
$$

モデル（クリプキモデル）は $M = \langle S, R, V\rangle$ という組で，S は非空集合（状態の集合），R は S 上の 2 項関係（到達可能関係），V は $\{$ 命題変数 $\} \to \mathfrak{P}(S)$ という関数である．モデル $M = \langle S, R, V\rangle$ と論理式 φ に対して，$\mathfrak{P}(S)$ の要素

$$
[\![\varphi]\!]^M
$$

（φ が真になる状態全体）を φ に関して再帰的に定義する．

$$
\begin{array}{l}
[\![p]\!]^M = V(p).\quad [\![\overline{p}]\!]^M = S \setminus V(p). \\
[\![\varphi \wedge \psi]\!]^M = [\![\varphi]\!]^M \cap [\![\psi]\!]^M.\quad [\![\varphi \vee \psi]\!]^M = [\![\varphi]\!]^M \cup [\![\psi]\!]^M. \\
[\![\Box\varphi]\!]^M = \{s \in S \mid (\forall t)(sRt \text{ ならば } t \in [\![\varphi]\!]^M\}. \\
[\![\Diamond\varphi]\!]^M = \{s \in S \mid (\exists t)(sRt \text{ かつ } t \in [\![\varphi]\!]^M\}. \\
[\![\mu x.\varphi]\!]^M = \bigcap\{X \in \mathfrak{P}(S) \mid [\![\varphi]\!]^{M\{x:=X\}} \subseteq X\}. \\
[\![\nu x.\varphi]\!]^M = \bigcup\{X \in \mathfrak{P}(S) \mid [\![\varphi]\!]^{M\{x:=X\}} \supseteq X\}.
\end{array}
$$

ただし $M\{x{:=}X\} = \langle S, R, V\{x{:=}X\}\rangle$ で $V\{x{:=}X\}$ は V の命題変数 x に対する値だけを X に変更した関数である．

$[\![\mu x.\varphi]\!]^M$ と $[\![\nu x.\varphi]\!]^M$ はそれぞれ $\mathfrak{P}(S)$ 上の関数 $\lambda X.([\![\varphi]\!]^{M\{x:=X\}})$ の（大小関係 $\subseteq$ に関する）最小不動点と最大不動点になる．

$\neg\varphi$ は省略形であったが，これがちゃんと否定の意味になっていること，すなわち $[\![\neg\varphi]\!]^M = S \setminus [\![\varphi]\!]$ は自明ではないが，この証明は [3] に載っている．

2.3 ゲーム意味論

論理式 ξ とモデル $M = \langle S, R, V\rangle$ と状態 $s_0 \in S$ に対して**評価ゲーム** (evaluation game) $\mathcal{E}(\xi, M, s_0)$ を定義する．

- **【局面】**(φ, s)．ただし φ は ξ の部分式，$s \in S$．

- 【開始局面】(ξ, s_0).
- 【プレイヤー】 肯定者と否定者．局面 (φ, s) においては，肯定者は「φ が s で真であること」，否定者は「φ が s で偽であること」をそれぞれ示そうとする．
- 【規則】

局面	手番	次の局面として選べるもの
$(\varphi \wedge \psi, s)$	否定者	(φ, s) と (ψ, s)
$(\varphi \vee \psi, s)$	肯定者	(φ, s) と (ψ, s)
$(\Box\varphi, s)$	否定者	(φ, t)．ただし t は sRt となる任意の状態．そのような t が無い場合は肯定者の勝利で終了．
$(\Diamond\varphi, s)$	肯定者	(φ, t)．ただし t は sRt となる任意の状態．そのような t が無い場合は否定者の勝利で終了．
$(\eta x.\varphi, s)$	-	(φ, s)
(x, s) (x は束縛変数)	-	(φ, s) （注）
(ℓ, s) (ℓ はリテラル)	-	ℓ が s で真ならば肯定者の勝利で終了，偽ならば否定者の勝利で終了．

(注) φ は ξ 中で $\eta x.\varphi$ という部分式になってるもの．(x, s) から (φ, s) への局面の遷移を「変数 x の**展開**」と呼ぶ．

- 【無限プレイの勝敗】無限回展開される変数の中の $>_\xi$ に関する最大の変数（つまり最外束縛変数）（このような変数の存在は自明ではないが示すことができる）が ν 変数ならば肯定者の勝利，μ 変数ならば否定者の勝利.

定理 3 (ゲーム意味論の妥当性（通常の意味論とゲーム意味論との一致）) 任意のモデル M, 任意の状態 s，任意の論理式 ξ に対して次の 2 条件は同値である．

(1) $s \in [\![\xi]\!]^M$.
(2) 評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, s)$ に肯定者の必勝戦略がある．

この証明は文献 [2, 3] に載っている．

ところで，$\neg\xi$ の定義から「$\neg\xi$ の肯定者の必勝戦略」と「ξ の否定者の必勝戦略」が同一であることがわかる．したがって（定理 3 を $\neg\xi$ について適用することで）この定理の条件 (1)(2) は次の条件とも同値であることが言える．

(3) 評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, s)$ に否定者の必勝戦略がない．

つまり，評価ゲームは決定性を持つ．

さらに，評価ゲームは単に決定性を持つだけでなく**無記憶決定性**という強い性質を持つ．一般にゲームにおいてプレイヤー P の戦略（完全ゲーム木の部分木）が**無記憶戦略**であるとは，以下を満たすノード x, y が**存在しない**ことである．

x と y はノードとしては異なるが同じ局面で，P の手番である．さらに x の子と y の子は異なる局面である．

つまり無記憶戦略とは，局面に至るまでのプレイの経緯には依存せずに局面だけから次の手が決まる戦略のことである．

定理 4 (評価ゲームの無記憶決定性) どんな評価ゲームにも，肯定者の無記憶必勝戦略または否定者の無記憶必勝戦略が存在する．

この証明は文献 [2, 4] に載っている（評価ゲームはパリティゲームという形で表現でき，パリティゲームの無記憶決定性が載っている）．

以上の結果から次の条件はすべて同値であり，これらが成り立つ時 ξ は**恒真であると**言う．

- 任意のモデル M の任意の状態 s に対して $s \in [\![\xi]\!]^M$.
- 任意のモデル M の任意の状態 s に対して，$\mathcal{E}(\xi, M, s)$ に肯定者の必勝戦略がある．
- 任意のモデル M の任意の状態 s に対して，$\mathcal{E}(\xi, M, s)$ に肯定者の無記憶必勝戦略がある．
- どんなモデル M のどんな状態 s に対しても，$\mathcal{E}(\xi, M, s)$ に否定者の必勝戦略は無い．
- どんなモデル M のどんな状態 s に対しても，$\mathcal{E}(\xi, M, s)$ に否定者の無記憶必勝戦略は無い．

3 タブロー法

本節ではタブロー法を定義する．これは [1] で導入されたものと見た目は異なるが実質的に同じものである．

本稿では木の「パス」と言ったら，根から葉へ至るパス，および根から始まる無限パスのこととする（根から始まらないパスや葉で終わらないものはパスと呼ばない）．

論理式の有限集合をシークエントと呼ぶ．シークエントを表記する際は，通常通りたとえば $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ のことを単に Γ, φ, ψ と書く（注意：Γ 中に φ や ψ が入っていても構わない）．

ξ（論理式ひとつのシークエント）を根とするシークエントの 2 分木（有限木でも無限木でもよい）で，各ノードが以下の規則のどれかを満たすものを ξ **のタブロー**と呼ぶ．規則は横線の**下のシークエントが親**，横線の**上のシークエントが子**であり，下から上を生成するように読む．

$$\frac{\Gamma, \alpha \quad \Gamma, \beta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta}\ (\wedge) \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \beta}{\Gamma, \alpha \vee \beta}\ (\vee) \qquad \frac{\overrightarrow{\alpha}, \beta}{\Gamma, \overrightarrow{\Diamond\alpha}, \Box\beta}\ (\text{様相})(\text{注 1}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \eta x.\varphi}\ (\eta) \qquad \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, x}\ (\text{展開})(\text{注 2})$$

(注 1) $\overrightarrow{\Diamond\alpha} = \{\Diamond\alpha_1, \Diamond\alpha_2, \ldots, \Diamond\alpha_n\}$，$\overrightarrow{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，$n \geq 0$.

(注 2) x は ξ 中に $\eta x.\varphi$ という形で出現する変数．x を**展開変数**と呼ぶ．

上記の各規則について，親シークエント中の論理式に対する子シークエント中の**後継者**を以下で定める．

- **(∧ 規則)** Γ 中の論理式 ψ の後継者は左右上式中の同じ論理式 ψ である．$\alpha{\wedge}\beta$ の後継者は左上式中の α と右上式中の β である．
- **(∨ 規則)** Γ 中の論理式 ψ の後継者は同じ論理式 ψ である．$\alpha{\vee}\beta$ の後継者は α と β である．
- **(様相規則)** $\Diamond\alpha_i, \Box\beta$ 以外の論理式には後継者が無い．$\Diamond\alpha_i$ の後継者は α_i，$\Box\beta$ の後継者は β である．
- **(η 規則)** Γ 中の論理式 ψ の後継者は同じ論理式 ψ である．$\eta x.\varphi$ の後継者は φ である．
- **(展開規則)** Γ 中の論理式 ψ の後継者は同じ論理式 ψ である．x の後継者は φ である．

なお，たとえば ∨ 規則で $\alpha{\vee}\beta \in \Gamma$ という状況も許される．このよう場合は $\alpha{\vee}\beta$ の後継者は $\alpha, \beta, \alpha{\vee}\beta$ の 3 つになる（他の規則でも同様）．

ξ のタブローにおけるパス $\mathcal{P} = \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \rangle$ に対して，その中の**論理式スレッド**とは $\mathcal{F} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots \rangle$ であって，任意の i について次を満たすものである．

- $\varphi_i \in \Gamma_i$.
- φ_{i+1} は φ_i の後継者．

タブロー中のどんな論理式の出現にも，根の論理式からそこへ至る論理式スレッドが存在する．なおスレッドは合流もするので，ひとつの論理式に至るスレッドは一般に複数ある（例：∨ 規則で Γ 中に α が入っている場合，子の α へ至るスレッドは二つ以上ある）．

論理式スレッド $\mathcal{F}$ が **ν スレッド**である，とは以下の条件を満たすことである：

> $\mathcal{F}$ は無限回の展開を経る無限列であって，その中の「無限回出現する展開変数」の中での $>_\xi$ に関する最大変数（最外束縛変数）が ν 変数である．

タブローにおけるパス $\mathcal{P} = \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \rangle$ が**閉じている**とは，以下の**少なくとも一方の**条件を満たすことである．

(1) ある j とある命題変数 p が存在して，$\{p, \overline{p}\} \subseteq \Gamma_j$.
(2) $\mathcal{P}$ の中に ν スレッドが存在する．

すべてのパスが閉じているタブローのことを**閉タブロー**と呼ぶ．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{閉}}{\overline{p},\ p,\ \Diamond x,\ p\wedge\Box y}\qquad\dfrac{\dfrac{\text{閉}}{\overline{p},\ \Diamond\overline{p},\ \Diamond x,\ p}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \text{この先も同様}\\ \overline{p},\ (p\wedge\Diamond\overline{p})\vee\Diamond x,\ p\wedge\Box y\end{array}}{\overline{p},\ x,\ p\wedge\Box y}\,(\text{展開})}{\overline{p},\ x,\ y}\,(\text{展開})}{\overline{p},\ \Diamond\overline{p},\ \Diamond x,\ \Box y}\,(\text{様相})}{\overline{p},\ \Diamond\overline{p},\ \Diamond x,\ p\wedge\Box y}\,(\wedge)}{\overline{p},\ p\wedge\Diamond\overline{p},\ \Diamond x,\ p\wedge\Box y}\,(\wedge)}{\overline{p},\ (p\wedge\Diamond\overline{p})\vee\Diamond x,\ p\wedge\Box y}\,(\vee)}{\overline{p},\ (p\wedge\Diamond\overline{p})\vee\Diamond x,\ \nu y.(p\wedge\Box y)}\,(\nu)}{\overline{p},\ \mu x.((p\wedge\Diamond\overline{p})\vee\Diamond x),\ \nu y.(p\wedge\Box y)}\,(\mu)}{\overline{p}\vee\mu x.((p\wedge\Diamond\overline{p})\vee\Diamond x)\vee\nu y.(p\wedge\Box y)}\,(\vee)\text{ を 2 回}
$$

図 1　閉タブローの例

たとえば図 1 は $\overline{p}\vee\mu x.((p\wedge\Diamond\overline{p})\vee\Diamond x)\vee\nu y.(p\wedge\Box y)$ の閉タブローである（注意：$\Box^* p=\nu x.(p\wedge\Box x)$ とすると，図 1 の根は $(p\wedge\Box^*(p\to\Box p))\to\Box^* p$ と同じである）.「閉」と書かれたシークエントは p と $\overline{p}$ を含むのでそこでパスは閉じる.「この先も同様」という部分のシークエントは中程に登場しているシークエントと同じで，つまりこの先は同様に繰り返して無限に続くのだが，無限パスの中の右端にある論理式をつないでいくと

$$
\cdots\Rightarrow p\wedge\Box y\Rightarrow\Box y\Rightarrow y\overset{\nu\text{変数展開}}{\Rightarrow}p\wedge\Box y\Rightarrow\cdots\Rightarrow p\wedge\Box y\Rightarrow\Box y\Rightarrow y\overset{\nu\text{変数展開}}{\Rightarrow}p\wedge\Box y\Rightarrow\cdots
$$

という ν スレッドになっている.

次を示すことが本稿の目的（のひとつ）である.

$$
\xi\text{ の閉タブローが存在する}\quad\Longleftrightarrow\quad\xi\text{ は恒真である.}
$$

健全性 ($\Rightarrow$) を第 4 節で，完全性 ($\Leftarrow$) を第 5 節で示す.

4　健全性

本節ではタブロー法の健全性を示す.

はじめに証明で使うのための言葉を用意しておく.「列中の隣り合う二つの要素が同一のときに，その片方を削除する」という操作を可能な限り続けて得られる列を，元の列の**縮約**と言うことにする．たとえば $\langle 1,1,2,2,2,3,1,2,2,3,3,3,1,\ldots\rangle$ の縮約は $\langle 1,2,3,1,2,3,1,\ldots\rangle$ である（縮約は第 5 章でも使われる）.

定理 5 (タブロー法の健全性) ξ の閉タブローが存在するならば，ξ は恒真である

(証明)　T を ξ の閉タブローとし，$M=\langle S,R,V\rangle$ を任意のモデル，$s_0\in S$ を任意の状態とする．このとき，評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi,M,s_0)$ に否定者の無記憶必勝戦略が無いことを示

す．そのために，否定者の無記憶戦略 A を任意に固定する．そして A が必勝戦略でないことを示す．

まず，列 $\langle(\Gamma_0;t_0),(\Gamma_1;t_1),(\Gamma_2;t_2),\ldots\rangle$（有限または無限）が存在して次を満たすことを示す．

(1) $\langle\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots\rangle$ は T 中のパスまたはパスの途中までの列．$\langle t_0,t_1,\ldots\rangle$ は M の状態の列．
(2) $\Gamma_0=\xi$. $t_0=s_0$.
(3) 各 $i>0$ について以下が成り立つ．$\langle\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_i\rangle$ の中の任意の論理式スレッド $\langle\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_i\rangle$ に対して，列 $\langle(\varphi_0,t_0),(\varphi_1,t_1),\ldots,(\varphi_i,t_i)\rangle$ の縮約は，ゲーム $\mathcal{E}(\xi,M,s_0)$ における戦略 A を用いた否定者と適当な戦略の肯定者とのプレイ（の途中まで）になっている．

この条件を満たす列 $\langle(\Gamma_0;t_0),(\Gamma_1;t_1),(\Gamma_2;t_2),\ldots\rangle$ を帰納法で定義する．

【出発点】$(\Gamma_0;t_0)=(\xi;s_0)$ とする．

以下では $\langle(\Gamma_0;t_0),(\Gamma_1;t_1),\ldots,(\Gamma_{i-1};t_{i-1})\rangle$ まで定義されているとする．

【Γ_{i-1} が T 中で $\dfrac{\Gamma,\alpha\quad\Gamma,\beta}{\Gamma,\alpha\wedge\beta}\ (\wedge)$ の下式のとき】
帰納法の仮定により $\alpha\wedge\beta$ へ至る論理式スレッドに対応して局面 $(\alpha\wedge\beta,t_{i-1})$ に至るプレイが存在する．この局面で戦略 A の否定者が選ぶ論理式が α ならば $\Gamma_i=(\Gamma,\alpha)$ とし，β ならば $\Gamma_i=(\Gamma,\beta)$ とする（戦略が無記憶なのでこの選択はスレッドの選択に依らない）．いずれの場合も $t_i=t_{i-1}$ とする．

【Γ_{i-1} が T 中で $\dfrac{\overrightarrow{\alpha},\beta}{\Gamma,\overrightarrow{\Diamond\alpha},\Box\beta}$ (様相) の下式のとき】
帰納法の仮定により $\Box\beta$ へ至る論理式スレッドに対応して局面 $(\Box\beta,t_{i-1})$ に至るプレイが存在する．この局面で戦略 A の否定者が選ぶ状態が s ならば $\Gamma_i=(\overrightarrow{\alpha},\beta)$ および $t_i=s$ とする．状態 t_{i-1} から R の遷移先が存在しない場合は，作る列を $(\Gamma_{i-1};t_{i-1})$ までで終了とする．

【Γ_{i-1} が T 中で $(\vee)$, (η), (展開) の下式のとき】
Γ_i はその上式，$t_i=t_{i-1}$ とする．

以上で所望の列 $\langle(\Gamma_0;t_0),(\Gamma_1;t_1),(\Gamma_2;t_2),\ldots\rangle$ が得られた．以下ではこの $\langle\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots\rangle$ の中からスレッド $\langle\varphi_0,\varphi_1,\ldots\rangle$ をうまく選べば，局面の列 $\langle(\varphi_0,t_0),(\varphi_1,t_1),\ldots\rangle$ の縮約（これは上記の条件 (3) より戦略 A の否定者と適当な戦略の肯定者とのプレイである）が肯定者勝利プレイになることを示す．

【$\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \rangle$ が T のパスを最後まで辿ったものになっている場合】
T は閉タブローなのでこのパスは閉じている．ある Γ_i がある命題変数 p について p と $\overline{p}$ を含むならば，p と $\overline{p}$ のどちらかはモデル M の状態 t_i で真なので，真な方（これを ℓ とする）へ至る論理式スレッドに対応して (ℓ, t_i) へ至るプレイが肯定者勝利である．もし $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \rangle$ 中に ν スレッドが存在するならば，それに対応したプレイが肯定者勝利になっている．

【$\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \rangle$ が T のパスを途中で切ったものの場合】
定義から Γ_n は $(\Gamma, \overrightarrow{\Diamond\alpha}, \Box\beta)$ という形であり，状態 t_n から R の遷移先が存在しないはずである．したがって $\Box\beta$ に至るスレッドに対応するプレイが肯定者勝利になっている．

以上で，否定者の任意の無記憶戦略 A が必勝戦略にならないことが示された．　（証明終）

5　完全性

本節ではタブロー法の完全性（定理 9）を示す．ただしその証明では，次節で論ずる命題 10 を使用する．

論理式 ξ を任意に固定する．以下シークエントと言ったら，ξ の部分式だけから成る集合のことである．ξ の部分式を次の 2 種類に分ける：

第 1 型：$\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\eta x.\alpha$, x（束縛変数）という形．
第 2 型：$\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$, リテラル，という形．

ξ の第 1 型の部分式全体に適当な線形順序を入れておく．シークエント Γ が第 1 型の論理式を 1 個以上含み，その中で上記で決めた順序で最大のものが φ で，$\Gamma' = \Gamma \setminus \{\varphi\}$ であるとき，Γ のことを $(\Gamma'; \varphi)$ と表記する．つまりこれは，Γ 中の第 1 型論理式の中の最大のものを指定してそれをピックアップした表記である．

シークエントを局面とするゲームを以下で定義する．これを ξ の**タブローゲーム**と呼ぶ．

- **【プレイヤー】**閉パス製造者と閉パス阻止者（それぞれ「製造者」「阻止者」と表記することがある）．
- **【規則】**

局面	手番	選択肢
$(\Gamma'; \alpha\wedge\beta)$	阻止者	(Γ', α) と (Γ', β) の 2 個
$(\Gamma'; \alpha\vee\beta)$	-	(Γ', α, β)
$(\vec{\ell}, \Diamond\vec{\alpha}, \Box\beta_1, \Box\beta_2, \ldots, \Box\beta_k)$ （ただし $\vec{\ell}$ はリテラルの集合） この局面を**様相局面**とよぶ.	製造者	$(\vec{\alpha}, \beta_1), (\vec{\alpha}, \beta_2), \ldots (\vec{\alpha}, \beta_k)$ の k 個. $k = 0$ の場合は阻止者の勝利で終了.
$(\Gamma; \eta x.\varphi)$	-	(Γ, φ)
$(\Gamma; x)$ （ただし x は ξ 中に $\eta x.\varphi$ という形で出現する）	-	(Γ, φ)

（注意）タブローゲームの進行（局面から次の局面への推移）はタブロー法の進行（親シークエントから子シークエントへの推移）と同じ形をしている．ただしタブロー法ではひとつのシークエントに適用可能な規則は一般に複数あるが，タブローゲームでは 1 型論理式の順序などを用いて排他的に場合分けしており，各シークエントが上記の表のどの行に該当するかは一意に定まる．なおプレイが有限で止まったら，その最後の局面は必ず様相局面である．

- **【勝利条件】**
プレイ $\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \rangle$ が閉パス製造者の勝利 $\iff$ $\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \rangle$ がタブロー法の意味で閉じている（つまりある Γ_i とある命題変数 p が存在して $\{p, \overline{p}\} \subseteq \Gamma_i$ であるか，$\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \rangle$ 中に ν スレッドが存在する）.
- **【開始局面】** ξ

定理 6 ξ のタブローゲームに閉パス製造者の必勝戦略が存在すれば，ξ の閉タブローが存在する．

（証明）　閉パス製造者の必勝戦略は閉タブローになっている．　**（証明終）**

補題 7
（1）タブローゲームの無限プレイには，様相局面が必ず無限回出現する．
（2）タブローゲームの無限プレイの中の無限長の論理式スレッドでは，論理式の変化が必ず無限回起こる（すなわち「あるところから先はずっと同じ論理式」ということはあり得ない）.

（証明）　（1）論理式スレッドとは後継者をたどっていくものであるが，φ' が φ の後継者のとき，φ' と φ は同じ論理式の場合と異なる論理式の場合（φ を分解や展開して φ' が得られる場合）がある．異なる論理式の後継者のことを変化後継者と呼ぶことにする．ここで次の事実が成り立つ．

（事実）タブローゲームの無限プレイには，無限回の変化後継者を含む論理式スレッドが必ず存在する．**（事実の証明）**無限プレイの中のスレッド全体を，変化後継者

だけに着目して木で表示すると（図 2 に例を挙げた），この木は有限分岐の無限木になるので，無限パスが存在する．その無限パスが，無限回の変化後継者を含む論理式スレッドを表している．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{a,\ c,\ d}{a,\ c\lor d}}{a,\ b\land(c\lor d),\ c\lor d}}{a\lor(b\land(c\lor d)),\ c\lor d}}{(a\lor(b\land(c\lor d)))\lor(c\lor d)}$$

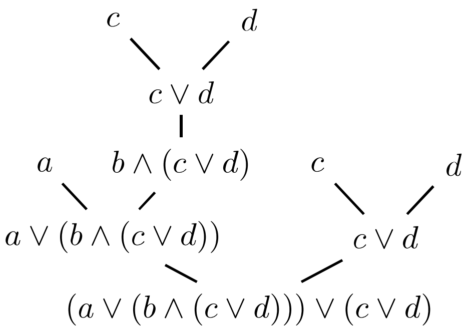

図 2　左のパスの中のスレッド全体を変化後継者だけに着目して木で表示すると右になる．

さらに，無限回の変化後継者を含む論理式スレッドには，様相記号（$\Box,\Diamond$）を先頭に持つ論理式が必ず無限回登場する．なぜなら，このスレッドには無限回の展開があるはずだが，論理式が guarded であるという制約から，$\eta x.\varphi$ を分解・展開して x に至るまでに必ず様相記号を通過する必要があるからである．したがってこのスレッドは無限回の様相局面を通過する．

（2）どんなスレッドも，（１）によって様相局面を無限回通過することになり，その際には必ず論理式が変化する．　　　　（証明終）

（注意）タブローゲームでなくタブロー法であれば，様相局面を含まない無限パスが存在する（図 3 左）．また，タブローゲームであっても guarded でない論理式を許すと，様相局面を含まない無限パスが存在する．（図 3 右）．

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{p\lor q,\ p,\ q}}{\cfrac{p\lor q,\ p,\ q}{p\lor q}\,(\lor)}\,(\lor)
\qquad\qquad
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\varphi,\ x}}{\cfrac{\varphi,\ x}{\cfrac{\varphi,\ \nu x.x}{\varphi\lor\nu x.x}\,(\lor)}\,(\nu)}}{}\,(\text{展開})$$

図 3　補題 7 に対する注意．

定理 8 ξ のタブローゲームに閉パス阻止者の必勝戦略が存在すれば，ξ は恒真でない．

（証明）　T を ξ のタブローゲームの閉パス阻止者の必勝戦略とする．このときモデル M と状態 s_0 が存在して，評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, s_0)$ に否定者の必勝戦略が存在することを示す．

阻止者の必勝戦略 T の中で枝分かれが起きるのは様相局面だけである．様相局面の直後（つまり $(\overrightarrow{\alpha}, \beta_i)$ という形）から次の様相局面までのシークエント列をセグメントと呼ぶ．開始局面から最初の様相局面までの列もセグメントと呼ぶ．補題 7(1) から，どんなセグメントも有限長であり，T はセグメントをノードとする木構造になっている．その木構造をモデル M の状態とし（つまりセグメントがそれぞれひとつの状態），命題変数の真偽は

$$\text{セグメント } \langle \mathit{\Gamma}_1, \mathit{\Gamma}_2, \ldots, \mathit{\Gamma}_n \rangle \text{ で命題変数 } p \text{ が真} \iff \text{ある } \mathit{\Gamma}_i \text{ に対して } \overline{p} \in \mathit{\Gamma}_i$$

とし，T の根 ξ を含むセグメントを状態 s_0 と呼び，評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, s_0)$ を考える．セグメント s 中の論理式 φ を評価ゲームの局面 (φ, s) と読めば，T 中のすべての論理式スレッドを縮約してまとめた木（これを U と呼ぶ）は評価ゲーム $\mathcal{E}(\xi, M, s_0)$ の否定者の必勝戦略になる（図 4 にひとつの例を挙げた）．このことは次のように確認できる．

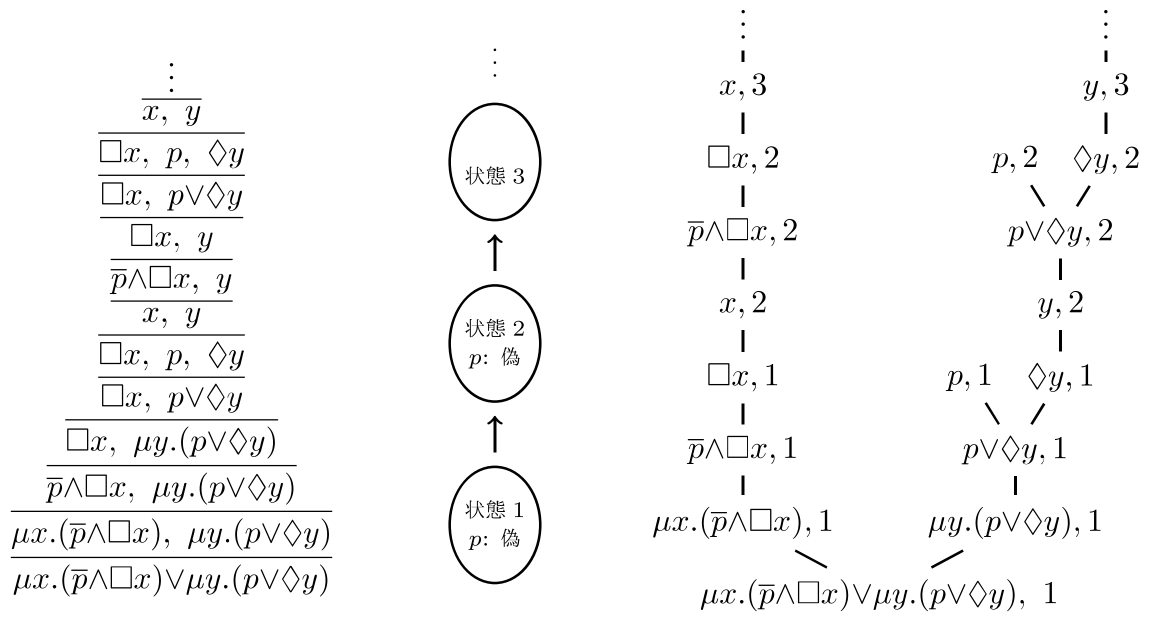

図 4　（左）: 阻止者の必勝戦略 T.（中）: モデル M.（右）: 否定者の必勝戦略 U

- 補題 7(2) やゲームの定義により，U 中のパスが終了するのは次の 3 つの場合だけであり，いずれの場合も否定者の勝利である．
  - 様相局面の中の $\overline{p}$ で終わる．この場合は M の定義により p がその状態で真なので，$\overline{p}$ は偽で否定者の勝利である．
  - 様相局面の中の p で終わる．この場合は，p が属していたセグメント内には $\overline{p}$ は存在しないはずである．なぜならいったん発生したリテラルは様相局面まで

引き継がれるので，$\overline{p}$ が存在したらそのセグメントの最後の様相局面には p と $\overline{p}$ が存在して，T がタブローゲームの閉パス阻止者必勝戦略であることに反するからである．したがってモデルの定義から p はこの状態で偽であり，否定者の勝利である．

  – 様相局面の $\Diamond\alpha_i$ で終わる．これが起こるのはこの局面が $(\vec{\ell}, \overrightarrow{\Diamond\alpha})$ という形（$\Box$ 論理式が無い）で T のパスがここで終了している場合である．このときは M の中でこの状態からの遷移先が無いので，否定者の勝利である．

- T がタブローゲームの閉パス阻止者必勝戦略であることから，U 中のどんな無限パスも ν スレッドではない．

（証明終）

定理 9 (タブロー法の完全性) ξ が恒真ならば ξ の閉タブローが存在する．

（証明）　定理 6，定理 8，および次節の命題 10 から明らか．（証明終）

6　タブローゲームの決定性について

命題 10 タブローゲームは決定性を持つ．

文献 [1] の第 4 節ではタブローゲームと実質同じゲームが導入され，その決定性の証明の方針が書いてある．しかし私にはその方針が理解できない（そこに書かれているほど簡単にはできないように思う）．本節では，これを安易な考えで証明しようとして失敗した例を示す．

論理式

$$\xi \;=\; \mu y.\nu x.\bigl(y \wedge p \wedge \Diamond x \wedge \mu z.\Box((x \vee z) \wedge z)\bigr)$$

に対するタブローゲームを考察する．ξ の部分論理式全体を Fml，ξ の部分論理式を要素とする集合（つまりシークエント）全体を Seq と表記する．したがってタブローゲームの無限プレイは Seq^ω の要素である．

まず手始めに，論理式の無限列 $\mathcal{F} \in \mathrm{Fml}^\omega$ がシークエントの無限列 $\mathcal{P} \in \mathrm{Seq}^\omega$ の中の ν スレッドである，という条件の記述を考える．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{P}$ の ν スレッドであることは次の 2 条件の両方を満たすことと同値である．

(i) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{P}$ 中の論理式スレッドである

(ii) x が $\mathcal{F}$ 中に無限回出現し，y は $\mathcal{F}$ 中に有限回しか出現しない（x は ξ 中の唯一の ν 変数であり，それより $>_\xi$ の意味で大きな変数は y だけであることに注意）．

この条件 (i) は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{P}$ との関係で定まる条件なのでとりあえず後回しにして，$\mathcal{F}$ だけで定まる条件 (ii) を分析すると次が得られる．

定理 11 任意の $\mathcal{F} \in \mathrm{Fml}^\omega$ に関して，上記の条件 (ii) は次の条件と同値である．

$$(\mathrm{ii}') \qquad \mathcal{F} \;\in\; \bigcup_{A \in \mathrm{Fml}^*} \Bigl(\bigcap_{n=1,2,\ldots} (\{A\} \cdot \overbrace{\mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \cdot \cdots \cdot \mathcal{B}}^{n\text{ 個}} \cdot \mathrm{Fml}^\omega) \Bigr)$$

ただし $\mathcal{B} = \{\langle \varphi, \varphi', \ldots, \varphi'', x\rangle \mid \{\varphi, \varphi', \ldots, \varphi''\} \subseteq \mathrm{Fml} \setminus \{x, y\}\}$，つまり $\mathcal{B}$ は「x, y は途中に出現せず，最後が x である論理式列」の全体である．

（証明） $\mathcal{F}$ が条件 (ii) を満たしているならば，先頭から「それ以降に y が出現しない部分」までを A として取れば，条件 (ii$'$) の形になる．逆に $\mathcal{F}$ が条件 (ii$'$) を満たしている場合には，必ず条件 (ii) を満たすことも簡単に確認できる（A を定めるとそれ以降の $\mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \cdots$ の切れ目が一意に定まることに注意する）．（証明終）

上記の条件 (ii$'$) は，第 2.1 節の最後に書いたように $G_{\delta\sigma}$ である．そこで同様にシークエントの無限列がタブローゲームの肯定者勝利プレイである条件が $G_{\delta\sigma}$ であることを示せれば．タブローゲームの決定性は言える．しかし上と同様な安易な考えではそれが示せないことを説明する．

$\mathcal{P}$（$\subseteq \mathrm{Seq}^\omega$）がタブローゲームの肯定者勝利プレイであるのは次の 2 条件の両方を満たすことと同値である．

(I) $\mathcal{P}$ は ξ から始まりゲームの規則に従って遷移する列である．
(II) $\mathcal{P}$ 中に ν スレッド，すなわち x を無限回展開し y は有限回しか展開しないスレッドが存在する（ξ の部分式中のリテラルは p だけで $\overline{p}$ は無いので，勝利プレイはこれだけである）．

このうち条件 (I) はそれほど問題にならない．問題になるのは (II) であるが，これに関してさきほどの定理 11 と同様に議論しようとすると次の命題を思いつく．

命題 12 任意の $\mathcal{P} \in \mathrm{Seq}^\omega$ に関して，上記の条件 (II) は次の条件と同値である．

$$(\mathrm{II}') \qquad \mathcal{P} \;\in\; \bigcup_{A \in \mathrm{Seq}^*} \Bigl(\bigcap_{n=1,2,\ldots} (\{A\} \cdot \overbrace{\mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \cdot \cdots \cdot \mathcal{B}}^{n\text{ 個}} \cdot \mathrm{Seq}^\omega) \Bigr)$$

ただし $\mathcal{B} \in \mathrm{Seq}^*$ は以下を満たす列 $\langle \Gamma, \Gamma', \ldots, \Gamma''\rangle$ をすべて集めたものである．

> Γ 中に論理式 $y \wedge p \wedge \Diamond x \wedge \mu z.\Box((x \vee z) \wedge z)$（これは x を展開した論理式である）があり，Γ'' は $(\Delta; x)$ という形をしている（したがってこの直後には x が展開され

る）．Γ 中の $y \wedge p \wedge \Diamond x \wedge \mu z.\Box((x \vee z) \wedge z)$ から始まるスレッドが Γ'' 中の x までつながっており，そのスレッド上には x の展開も y の展開も存在しない．

しかしこの命題 12 は誤りである．次ページの図 5 がその反例であり，この無限プレイを $\mathcal{P}$ とすると，これは条件 (II′) を満たすが (II) を満たさない．なぜなら，先頭（一番下のシークエント）から (1) までを A とすれば，どんな n についても $\mathcal{B}^n$ の要素が A の直後に存在するが，その中で x を展開しているスレッドは $\mathcal{B}^n$ を過ぎるといずれ途切れてしまい，x を無限回展開するスレッドは存在しないからである（無限スレッドは右端の論理式を辿るものだけである）．

参考文献

[1] Damian Niwinski and Igor Walukiewicz. Games for the μ-calculus. *Theoretical Computer Science* 163:99–116, (1996).

[2] Yde Venema. *Lectures on the modal μ-calculus.* (2016, 2020). (available online)

[3] 鹿島亮. コンピュータサイエンスにおける様相論理. 森北出版 (2022).

[4] 田中一之．計算理論と数理論理学．共立出版 (2022)

[5] 田中尚夫. 決定性公理に関する最近までの諸結果について. 数学 29:53–64, (1977).

$$
\begin{array}{cl}
\vdots & \\
x,\ z & \\
\hline\hline
(x \lor z) \land z & \\
\hline
p,\ \Box((x \lor z) \land z) & \text{(5,6,7) で展開されたスレッドはここで終わり} \\
\hline
p,\ z & \\
\hline
p,\ (x \lor z) \land z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z),\ (x \lor z) \land z & \textbf{(7)}\ \text{(1) からここまでが } \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \text{ の要素} \\
\hline
x,\ (x \lor z) \land z & \\
\hline
\Diamond x,\ \Box((x \lor z) \land z) & \\
\hline
\Diamond x,\ z & \\
\hline
\Diamond x,\ (x \lor z) \land z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z),\ (x \lor z) \land z & \textbf{(6)}\ \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \text{ のための } x \text{ の展開} \\
\hline
x,\ (x \lor z) \land z & \\
\hline
\Diamond x,\ \Box((x \lor z) \land z) & \\
\hline
\Diamond x,\ z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z),\ z & \textbf{(5)}\ \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \text{ のための } x \text{ の展開} \\
\hline
x,\ z & \\
\hline\hline
(x \lor z) \land z & \\
\hline
p,\ \Box((x \lor z) \land z) & \text{(3,4) で展開されたスレッドはここで終わり} \\
\hline
p,\ z & \\
\hline
p,\ (x \lor z) \land z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z),\ (x \lor z) \land z & \textbf{(4)}\ \text{(1) からここまでが } \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \text{ の要素} \\
\hline
x,\ (x \lor z) \land z & \\
\hline
\Diamond x,\ \Box((x \lor z) \land z) & \\
\hline
\Diamond x,\ z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z),\ z & \textbf{(3)}\ \mathcal{B} \cdot \mathcal{B} \text{ のための } x \text{ の展開} \\
\hline
x,\ z & \\
\hline\hline
(x \lor z) \land z & \\
\hline
p,\ \Box((x \lor z) \land z) & \text{(2) で展開されたスレッドはここで終わり} \\
\hline
p,\ z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z),\ z & \textbf{(2)}\ \text{(1) からここまでが } \mathcal{B} \text{ の要素} \\
\hline
x,\ z & \\
\hline
x \lor z & \\
\hline\hline
y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z) & \\
\hline
\nu x.(y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z)) & \textbf{(1)}\ \text{最下行からここまでが } A \\
\hline
\mu y.\nu x.(y \land p \land \Diamond x \land \mu z.\Box((x \lor z) \land z)) &
\end{array}
$$

図 5　命題 12 の反例