Visible actions and criteria for multiplicity-freeness of restrictions of quasi-regular representations of Heisenberg groups * †

東海大学・理学部・数学科　笹木 集夢
Atsumu SASAKI
Department of Mathematics, Tokai University‡

1　導入

小林俊行は，リー群の作用で同変な複素多様体上の正則エルミートベクトル束において，正則な切断全体の空間に実現されるユニタリ表現 ((5.1) で述べる) が無重複であるための十分条件を与え (無重複性の伝播定理，[4, 5, 8] など)，無重複性に対する統一的な説明を与えるという理論を確立した．この理論において底空間へのリー群の正則な作用が本質的であり，小林はこれをさらに精緻な考察を重ねた上で，次に述べる複素多様体における可視的作用の概念を提唱した[1]．

連結な複素多様体 D にリー群 G が正則に作用しているとする．D の実部分多様体 S で

$$D' := G \cdot S \text{ は } D \text{ の空でない開集合である} \tag{V.0}$$

ものが存在し (これをスライスという)，さらに D' 上の反正則な微分同相写像 σ で

$$\sigma|_S = \mathrm{id}_S, \tag{S.1}$$

$$\text{任意の } x \in D' \text{ に対して } \sigma(x) = g \cdot x \text{ を満たす } g \in G \text{ が存在する} \tag{S.2}$$

ものが存在するとき，この作用を強可視的であるという ([5, Definition 3.3.1])．

近年，無重複表現を背景として複素多様体における可視的作用の分類理論が進展しており，これまでに複素対称空間，エルミート対称空間，旗多様体，線型空間，複素冪零軌道，簡約型複素球等質空間に対する分類理論が与えられ，最近ではより一般に複素簡約代数群の複素球多様体における強可視性が示された ([5, 6, 7, 11, 12, 14, 15] など参照)．

一方で，冪零リー群や可解リー群の可視的作用の分類理論の研究はまだ始まったばかりである．本講究録では冪零リー群に対する研究の第一歩として Heisenberg 群を扱い，Heisenberg 群の複素化 (複素 Heisenberg 群) の複素等質空間に対する可視的作用の分類理論について概説す

*京都大学数理解析研究所研究集会「表現論とその周辺分野における諸問題」(研究代表者：直井克之氏，京都大学数理解析研究所，2022 年 7 月 25 日–29 日) における講究録．
†本研究は科研費 (課題番号 19K03453) の助成を受けたものである．
‡E-mail: atsumu@tokai-u.jp
[1]無重複性の伝播定理と複素多様体における可視的作用の理論について，論説記事 [13] にまとめさせていただいた．

る．また，この結果とそれに関わる表現の無重複性に関する結果について，これまでに知られている研究結果と合わせて紹介する．
　なお，本講究録で述べる結果の多くは論文 [2] に基づいている．

2　主結果

$\mathfrak{g}$ を $(2n+1)$ 次元 Heisenberg リー環とし，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の非自明な部分環とする．以下，次の 2 条件を満たす $\mathfrak{g}$ の基底 $\mathcal{B}=\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n,Z\}$ を選ぶ ([1, Proposition 1])：

- 非自明な交換関係 $[X_i,Y_i]=Z\ (i=1,2,\ldots,n)$ を満たす．
- $\mathfrak{h}$ の基底 $\mathcal{B}_{\mathfrak{h}}$ として $\mathcal{B}_{\mathfrak{h}}\subset\mathcal{B}$ を満たすものを選ぶことができる．

Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ は 1 次元で $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}=\mathbb{R}Z$ であり，部分環 $\mathfrak{h}$ との関係について次が知られている．

事実 2.1 ([1, Proposition 3.1])**.** Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の非自明な部分環 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ を含まないとき，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}_1,\ldots,\mathfrak{h}_n$ のいずれかと同型である．ただし，$\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{h}_j$ は次で定める：

$$\mathfrak{h}_j=\mathbb{R}X_1+\cdots+\mathbb{R}X_j\quad(1\le j\le n).\tag{2.1}$$

$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間を $\mathfrak{q}$ として $\mathcal{B}-\mathcal{B}_{\mathfrak{h}}$ で張られるものとする．特に，

$$\mathfrak{q}_0=\mathbb{R}X_1+\cdots+\mathbb{R}X_n+\mathbb{R}Y_1+\cdots+\mathbb{R}Y_n\tag{2.2}$$

は $\mathcal{B}-\{Z\}$ で張られる $\mathfrak{g}$ の部分空間である．
　リー環 $\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{q}$ の複素化をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ および $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ で表す．また，$\mathfrak{g},\mathfrak{q}$ の双対空間をそれぞれ $\mathfrak{g}^*,\mathfrak{q}^*$ で表し，$\mathcal{B}$ の双対基底を $\mathcal{B}^*=\{X_1^*,\ldots,X_n^*,Y_1^*,\ldots,Y_n^*,Z^*\}$ とする．
　次に，$G=\exp\mathfrak{g}$ を連結かつ単連結な Heisenberg 群で $\mathfrak{g}$ をリー環にもつものとし，$H=\exp\mathfrak{h}$ とする．$Q=\langle\exp\mathfrak{q}\rangle$ で $\exp\mathfrak{q}$ で生成される G の閉部分群とする．また，G,H,Q の複素化をそれぞれ $G_{\mathbb{C}},H_{\mathbb{C}},Q_{\mathbb{C}}$ で表す．このとき，$G_{\mathbb{C}}=\exp\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$H_{\mathbb{C}}=\exp\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ で $Q_{\mathbb{C}}=\langle\exp\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}\rangle$ が成り立つ．また，複素 Heisenberg 等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ への $G_{\mathbb{C}}$ の自然な作用は正則である．よって，$G_{\mathbb{C}}$ の部分群 Q の $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ への作用も正則である．
　複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数全体のなす空間 $\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ は広義一様収束の位相によって Fréchet 空間となる．このとき，$\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})$ 上に $G_{\mathbb{C}}$ の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}$ が

$$[\varpi_{H_{\mathbb{C}}}(g)f](xH_{\mathbb{C}}):=f(g^{-1}xH_{\mathbb{C}})\quad(xH_{\mathbb{C}}\in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})\tag{2.3}$$

によって定まる $(g\in G_{\mathbb{C}},f\in\mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}))$．この連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}$ の Q への制限を $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ で表す．
　Heisenberg 等質空間 G/H 上に G-不変な測度が定数倍を除いて一意に存在し，これに関する 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間を $L^2(G/H)$ で表す．このとき，$L^2(G/H)$ 上に G のユニタリ表現 π_H が次で定まる：$g\in G,\ f\in L^2(G/H)$ に対して

$$[\pi_H(g)f](xH):=f(g^{-1}xH)\quad(xH\in G/H).\tag{2.4}$$

この π_H を G/H 上の準正則表現とよぶ．この表現の G の閉部分群 Q への制限を $\pi_H|_Q$ で表す．
　以上の設定において，次が成り立つ．

定理 2.2. Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の非自明な部分環 $\mathfrak{h}$ に対して，次は同値である：

(i) 複素 Heisenberg 等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の正則な作用は強可視的である．

(ii) G のユニタリ表現 π_H は無重複である．

(iii) Q のユニタリ表現 $\pi_H|_Q$ は無重複である．

(iv) Q の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ は無重複である．

(v) $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ における G の余随伴作用に関して，任意の $\xi \in \mathfrak{q}^*$ に対して $2\dim(H\cdot\xi) = \dim(G\cdot\xi)$ が成り立つ．

(vi) 部分環 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_{n-1}$ のいずれとも同型ではない ($\mathfrak{h}_j$ の定義は (2.1) 参照)．

定理 2.2 の (iii) $\Rightarrow$ (ii) および (i) $\Rightarrow$ (iv) について先に述べよう．

Q のユニタリ表現 $\pi_H|_Q$ が無重複であるとき，$L^2(G/H)$ 上の連続な Q-絡作用素全体のなす環 $\mathrm{End}_Q(\pi_H|_Q, L^2(G/H))$ は可換環である (リー群のユニタリ表現が無重複であることの定義は [5, Definition 1.3.1] 参照)．このとき，環 $\mathrm{End}_G(\pi_H, L^2(G/H))$ は $\mathrm{End}_Q(\pi_H|_Q, L^2(G/H))$ に含まれるため，$\mathrm{End}_G(\pi_H, L^2(G/H))$ も可換環である．ゆえに，G のユニタリ表現 π_H は無重複となり，これから (iii) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つ．

また，(i) $\Rightarrow$ (iv) は $D = G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を底空間とする自明直線束 $D\times\mathbb{C}$ に対して無重複性の伝播定理を適用することによりしたがう．つまり，Q が D に強可視的に作用するとき，正則な切断全体の空間 $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ と $\mathcal{O}(D)$ を同一視することで Q の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ が無重複であることが導かれる (cf. [5, Theorem 5]) [2]．なお，Q の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ が無重複であるとは，$\mathcal{O}(D)$ に実現される任意の Q のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が無重複であるときをいう ([5, Definition 1.5.3])．ユニタリ表現の正則関数への実現については第 5 章で述べる．

定理 2.2 のその他の関係については，次の手順により証明を行う．まず，部分環 $\mathfrak{h}$ が (vi) を満たすときに (i) を満たすことを第 3 章で見る．次に，(ii) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) について第 4 章にて解説する．これらの同値性の証明は，冪零リー群の誘導表現の既約分解を記述する Corwin–Greenleaf の公式が鍵となる．最後に，(iv) $\Rightarrow$ (iii) の証明を第 5 章で行う．特に，Q のユニタリ表現 $(\pi_H|_Q, L^2(G/H))$ を $(\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q, \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}))$ に具体的に実現することができることについて解説する．これにより，$(\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q, \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}))$ の無重複性から $(\pi_H|_Q, L^2(G/H))$ の無重複性を得る．

$$\begin{array}{cccc}
 & & (\mathrm{iii}) \Rightarrow & (\mathrm{ii}) \\
 & \nearrow & & \Updownarrow \\
(\mathrm{iv}) \Leftarrow & (\mathrm{i}) & & (\mathrm{v}) \\
 & \Uparrow & \swarrow\!\!\!\nearrow & \\
 & (\mathrm{vi}) & &
\end{array}$$

図 2.1: 定理 2.2 の証明の方針

3　定理 2.2: (vi) $\Rightarrow$ (i) の証明

本章では，複素 Heisenberg 等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の正則な作用の強可視性について解説する．

[2] ファイバーが 1 次元であるため，ファイバー上の任意のユニタリ表現は既約である．特に無重複である．

複素 Heisenberg 群の等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は $Q_{\mathbb{C}}$-同変な双正則微分同相写像

$$\exp \mathfrak{q}_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}, \quad \exp W \mapsto (\exp W)H_{\mathbb{C}} \tag{3.1}$$

によって $\exp \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ と双正則微分同相であるので，以下では $\exp \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ における Q の作用を見ていこう．

複素 Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が 2-step 冪零リー環であるから，$[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ に含まれる (今の場合は一致する)．よって，$X, W_1, W_2 \in \mathfrak{q}$ に対して

$$(\exp X)(\exp(W_1 + \sqrt{-1}W_2)) = \exp(X + W_1 + \sqrt{-1}W_2)\exp(\frac{1}{2}[X, W_1 + \sqrt{-1}W_2]) \tag{3.2}$$

となる．

3.1 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ のとき

本節では部分環 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ を含むとする．このとき，事実 2.1 から $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n$ のいずれとも同型ではなく，補空間 $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{q}_0$ の部分空間である ($\mathfrak{q}_0$ の定義は (2.2) 参照)．

(3.2) の右辺に現れる $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ の元 $\exp(\frac{1}{2}[X, W_1 + \sqrt{-1}W_2])$ は $\mathfrak{h}$ の元であるから，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の作用は次のように表される：$X \in \mathfrak{q}$ および $W_1 + \sqrt{-1}W_2 \in \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ に対して

$$(\exp X) \cdot (\exp(W_1 + \sqrt{-1}W_2))H_{\mathbb{C}} = (\exp(X + W_1 + \sqrt{-1}W_2))H_{\mathbb{C}}.$$

これより，任意の元 $(\exp(W_1 + \sqrt{-1}W_2))H_{\mathbb{C}} \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は

$$(\exp(W_1 + \sqrt{-1}W_2))H_{\mathbb{C}} = (\exp W_1) \cdot (\exp(\sqrt{-1}W_2))H_{\mathbb{C}} \tag{3.3}$$

と表される．そこで，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の実部分多様体 S を

$$S := (\exp \sqrt{-1}\mathfrak{q})H_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \tag{3.4}$$

とすると，(3.3) により

$$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = Q \cdot S \tag{3.5}$$

が成り立つ．つまり，この S は (V.0) を満たす．

次に，複素 Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の反線型な同型写像 σ を次で定める：

$$\sigma : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k + cZ \mapsto -\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k X_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k Y_k + \overline{c}Z.$$

ただし，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\overline{\alpha}$ で複素共役を表す．このとき，σ は対合的であって $\sigma|_{\sqrt{-1}\mathfrak{q}_0} = \mathrm{id}_{\sqrt{-1}\mathfrak{q}_0}$ が成り立つ．よって，$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_0$ より $\sigma|_{\sqrt{-1}\mathfrak{q}} = \mathrm{id}_{\sqrt{-1}\mathfrak{q}}$ となる．この σ は複素 Heisenberg 群 $G_{\mathbb{C}} = \exp \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に持ち上がり $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則な対合的自己同型写像となる．これを同じ σ で表す．さらに，$H_{\mathbb{C}} = \exp \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ は σ で安定となるので，複素 Heisenberg 等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の反正則な微分同相写像を誘導する．すなわち，

$$\sigma : G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}, \quad (\exp W)H_{\mathbb{C}} \mapsto \sigma((\exp W)H_{\mathbb{C}}) := (\exp \sigma(W))H_{\mathbb{C}}. \tag{3.6}$$

また，$\sigma|_{\mathfrak{q}} = -\mathrm{id}_{\mathfrak{q}}$ より Q は σ-安定であり，よって，(3.6) で定めた σ は Q-同変であることにも注意する．

そこで，(3.4) で選んだ部分多様体 S が $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たすことは $\sigma|_{\sqrt{-1}\mathfrak{q}} = \mathrm{id}_{\sqrt{-1}\mathfrak{q}}$ によりしたがう．

また，分解 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = Q \cdot S$ に沿って任意の元 $v \in G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を $v = x \cdot (\exp\sqrt{-1}W)H_{\mathbb{C}}$ と表す ($x \in Q$ および $W \in \mathfrak{q}$)．ここで，$g = \sigma(x)x^{-1}$ とおくと，Q が σ-安定であることより $g \in Q$ が成り立つ．(3.6) で定めた σ が Q-同変より

$$\sigma(v) = \sigma(x) \cdot \sigma((\exp\sqrt{-1}W)H_{\mathbb{C}}) = \sigma(x) \cdot (\exp\sqrt{-1}W)H_{\mathbb{C}} = g \cdot v$$

となる．したがって，σ は上記の S に関して (S.1) を満たし，かつ (S.2) を満たす．

以上より，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の作用はスライス S および反正則な微分同相写像 σ によって強可視的である．

3.2　$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n$ のとき

Heisenberg 群 G の 2 つの閉部分群 H, H' が同型のとき，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の作用が強可視的であることと $G_{\mathbb{C}}/H'_{\mathbb{C}}$ における Q' の作用が強可視的であることは同値である ([2, Sections 2.5, 2.6] 参照) [3]．ただし，Q' は H' のリー環 $\mathfrak{h}'$ の補空間 $\mathfrak{q}'$ から定まる G の閉部分群である．よって，事実 2.1 により $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ を含まないときは $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_j$ $(1 \le j \le n)$ の場合を考察すれば十分である．さらに，(vi) を仮定すると $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}_n$ である．以上により，本節では $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n = \mathbb{R}X_1 + \cdots + \mathbb{R}X_n$ とする．

このとき，$\mathfrak{q} = \mathbb{R}Y_1 + \cdots + \mathbb{R}Y_n + \mathbb{R}Z$ となって可換環である．よって，$X, W_1, W_2 \in \mathfrak{q}$ に対して $[X, W_1 + \sqrt{-1}W_2]$ は 0 となる．つまり，$(\exp X)(\exp(W_1 + \sqrt{-1}W_2)) = \exp(X + W_1 + \sqrt{-1}W_2)$ が成り立つ．ゆえに，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の任意の元 $(\exp(W_1 + \sqrt{-1}W_2))H_{\mathbb{C}}$ は (3.3) を満たす．したがって，(3.4) で選んだ実部分多様体 S に対して $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = Q \cdot S$ が成り立つ．

また，複素 Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の反線型な同型写像 σ は，$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ の場合とは異なり次で定める：

$$\sigma : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k + cZ \mapsto \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k X_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k Y_k - \overline{c}Z.$$

これを $G_{\mathbb{C}}$ 上の反正則な微分同相写像に持ち上げると，$H_{\mathbb{C}}$ や Q はともに σ-安定であるから $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の Q-同変かつ反正則な微分同相写像を誘導する．このとき，σ が S に関して (S.1) を満たしさらに (S.2) も満たすことが前節と同様の議論で示される．したがって，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の作用はスライス S および反正則な微分同相写像 σ によって強可視的である．

以上の議論をまとめて，次の結果を得る：

定理 3.1. Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の非自明な部分環 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_{n-1}$ のいずれとも同型ではないとする．このとき，複素 Heisenberg 等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における Q の作用は強可視的である．特に，(3.4) で選んだ $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の実部分多様体 S はこの強可視的作用によるスライスであり $\dim S = \dim \mathfrak{q} = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を満たす．

[3] G 上の自己同型写像 φ で $\varphi|_H$ が H から H' への同型写像となるものが存在することによる．

4 Corwin–Greenleafの公式と定理2.2: (ii) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) の証明

本章では (ii) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) の証明について説明する．この証明には，冪零リー群の誘導表現の既約分解を与える Corwin–Greenleaf の公式が重要である．まずは，この公式について Heisenberg 群の場合に述べよう．

Kirillov の軌道理論により，Heisenberg 群 G の既約ユニタリ表現の同値類全体 $\widehat{G}$ は $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ における G の余随伴軌道と $1:1$ に対応する．この対応により，$\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して G の余随伴軌道 $G\cdot\xi$ に対応する G の既約ユニタリ表現を τ_ξ で表す．Heisenberg 群の余随伴軌道による軌道空間 $\mathfrak{g}^*/G$ の完全代表系は全単射

$$\mathbb{R}^\times Z^* \sqcup \mathfrak{q}_0^* \to \mathfrak{g}^*/G, \quad \xi \mapsto G\cdot\xi \tag{4.1}$$

により $\mathbb{R}^\times Z^* \sqcup \mathfrak{q}_0^*$ を選ぶことができる．さらに，$\gamma \in \mathbb{R}^\times$ に対して $\tau_{\gamma Z^*}$ は無限次元表現，$\xi \in \mathfrak{q}_0^*$ に対して τ_ξ は 1 次元表現である．

次の公式は [10, Theorem 1.1] を Heisenberg 群に適用したものである：

事実 4.1 (Corwin–Greenleaf の公式)**.** G の準正則表現 π_H の既約分解は次で与えられる：

$$\pi_H \simeq \int^{\oplus}_{(G\cdot\mathfrak{q}^*)/G} m_{\pi_H}(\xi)\tau_\xi \, d\xi. \tag{4.2}$$

ただし，$d\xi$ は $\mathfrak{q}^*$ の Lebesgue 測度から射影 $\mathfrak{q}^* \to (G\cdot\mathfrak{q}^*)/G$ によって誘導される $(G\cdot\mathfrak{q}^*)/G$ 上の測度であり，また $m_{\pi_H}(\xi) \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ は π_H における τ_ξ の重複度で

$$m_{\pi_H}(\xi) = \begin{cases} \mathfrak{q}^* \cap (G\cdot\xi) \text{ における } H\text{-軌道の個数} & (2\dim(H\cdot\xi) = \dim(G\cdot\xi) \text{ のとき}) \\ \infty & (2\dim(H\cdot\xi) < \dim(G\cdot\xi) \text{ のとき}). \end{cases} \tag{4.3}$$

4.1 $\mathfrak{z}_\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$ のとき

$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}_\mathfrak{g} = \mathbb{R}Z$ を含むとき，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{q}_0$ に含まれる．よって，任意の $\xi \in \mathfrak{q}^* \subset \mathfrak{q}_0^*$ に対して $G\cdot\xi = \{\xi\}$ である．よって，$H\cdot\xi = \{\xi\}$ となり，ゆえに $2\dim(H\cdot\xi) = \dim(G\cdot\xi) = 0$ が成り立つ．また，$\mathfrak{q}^* \cap (G\cdot\xi) = \{\xi\} = H\cdot\xi$ となるため，(4.3) から $m_{\pi_H}(\xi) = 1$ となる．ゆえに π_H は G の無重複表現である．

4.2 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_j$ のとき

Heisenberg 群 G の 2 つの閉部分群 H, H' が同型のとき，準正則表現 π_H が無重複であることと $\pi_{H'}$ が無重複であることは同値である ([2, Lemma 8.7] 参照)．よって，事実 2.1 に基づき，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}$ を含まないときは $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_j$ $(1 \le j \le n)$ の場合を考察すればよい．このとき，補空間 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_j$ は $\mathfrak{g}^*$ の中心 $\mathbb{R}Z^*$ を含み，

$$\mathfrak{q}_j = (\mathfrak{q}_j \cap \mathfrak{q}_0) + \mathbb{R}Z$$

と直和分解される．ここで，任意の $\xi \in \mathfrak{q}_j^* \cap \mathfrak{q}_0^*$ と任意の $\gamma \in \mathbb{R}^\times$ に対して

$$G\cdot(\xi + \gamma Z^*) = \mathfrak{q}_0^* + \gamma Z, \quad G\cdot\xi = \{\xi\} \tag{4.4}$$

であるから，$G\cdot\mathfrak{q}^* = (\mathfrak{q}_0^* + \mathbb{R}^\times Z^*) \sqcup (\mathfrak{q}_j^* \cap \mathfrak{q}_0^*)$ である．よって，(4.1) を考慮して $(G\cdot\mathfrak{q}^*)/G$ の完全代表系として次を選ぶ：

$$(G\cdot\mathfrak{q}^*)/G \simeq \mathbb{R}^\times Z^* \sqcup (\mathfrak{q}_j^* \cap \mathfrak{q}_0^*).$$

前節で述べたように，任意の $\xi \in \mathfrak{q}_j^* \cap \mathfrak{q}_0^*$ に対して $\dim(G\cdot\xi) = 2\dim(H\cdot\xi) = 0$ であるから，$m_{\pi_H}(\xi) = 1$ である．

次に，$\gamma \in \mathbb{R}^\times$ とし γZ^* を通る余随伴軌道を考察する．(4.4) から $\dim(G\cdot\gamma Z^*) = \dim(\mathfrak{q}_0^* + \gamma Z^*) = \dim\mathfrak{q}_0^* = 2n$ である．一方で，$\mathfrak{g}^*$ における γZ^* を通る H-軌道は

$$H\cdot\gamma Z^* = \mathbb{R}Y_1^* + \cdots + \mathbb{R}Y_j^* + \gamma Z^* \tag{4.5}$$

となる．よって，$\dim(H\cdot\gamma Z^*) = j$ である．ゆえに，

$$2\dim(H\cdot\gamma Z^*) = \dim(G\cdot\gamma Z^*) \Leftrightarrow j = n.$$

これより，(4.3) から $j < n$ のとき π_H は無限重複度をもつ．

以下，$j = n$ として π_H における $\tau_{\gamma Z^*}$ の重複度を (4.3) より求めよう．補空間は $\mathfrak{q}_n^* = \mathbb{R}Y_1^* + \cdots + \mathbb{R}Y_n^* + \mathbb{R}Z^*$ であるから，(4.5) より $H\cdot\gamma Z^* = \mathbb{R}Y_1^* + \cdots + \mathbb{R}Y_n^* + \gamma Z^* = (\mathfrak{q}_n^* \cap \mathfrak{q}_0^*) + \gamma Z^*$ が成り立つ．よって，

$$\mathfrak{q}_n^* \cap (G\cdot\gamma Z^*) = \mathfrak{q}_n^* \cap (\mathfrak{q}_0^* + \gamma Z^*) = (\mathfrak{q}_n^* \cap \mathfrak{q}_0^*) + \gamma Z^* = H\cdot\gamma Z^*.$$

ゆえに，$m_{\pi_H}(\gamma Z^*) = 1$ であることが示された．したがって，$j = n$ のとき π_H は無重複表現である．

以上より，次が結論付けられた：

定理 4.2. Heisenberg 群 G の準正則表現 π_H が無重複となるための必要十分条件は部分環 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_{n-1}$ のいずれとも同型ではないことである．特に，$\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}_j$ $(1 \leq j \leq n-1)$ のとき，π_H は無限重複度をもつ．

5 準正則表現の正則実現と定理 2.2: (iv) $\Rightarrow$ (iii) の証明

本章では，Q の連続表現 $\varpi_{H_\mathbb{C}}$ の Q への制限 $\varpi_{H_\mathbb{C}}|_Q$ が無重複であるとき，準正則表現 π_H の Q への制限 $\pi_H|_Q$ が無重複となることについて述べる．

Q の連続表現 $(\varpi_{H_\mathbb{C}}|_Q, \mathcal{O}(G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}))$ が無重複であるとは，次を満たす Q の任意のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が無重複となることをいう ([5, Definition 1.5.3])：

$$\mathcal{H} \text{ から } \mathcal{O}(G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}) \text{ への連続かつ単射な } Q\text{-絡作用素が存在する．} \tag{5.1}$$

(5.1) を満たすとき，Q のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ は $(\varpi_{H_\mathbb{C}}|_Q, \mathcal{O}(G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}))$ に実現されるという．

定理 2.2 の (iv) $\Rightarrow$ (iii) は，(5.1) の意味で Q のユニタリ表現 $(\pi_H|_Q, L^2(G/H))$ が Q の連続表現 $(\varpi_{H_\mathbb{C}}|_Q, \mathcal{O}(G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}))$ に実現することができれば，上で述べた連続表現の無重複性の定義により示される．以下では，この問題について概説する．

先に見たように，Q-同変な微分同相写像 $\exp\mathfrak{q} \to G/H,\ \exp W \mapsto (\exp W)H$ によって $G/H \simeq \exp\mathfrak{q}$ となり，(3.1) によって複素 Heisenberg 等質空間 $G_\mathbb{C}/H_\mathbb{C}$ は $\exp\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ と $Q_\mathbb{C}$ が正則に作用

する複素多様体として双正則微分同相であった．一方で，Heisenberg 群 $G = \mathbf{H}_n$ の部分多様体 $\exp\mathfrak{q}$ は非負整数 m, ℓ を用いて $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ と微分同相になる．ただし，$\mathbf{H}_\ell$ は $(2\ell+1)$ 次元の Heisenberg 群を表す．よって，G/H と $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ と同一視し，$G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}$ を同一視して，$L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$ 上の $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ の正則表現を $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ 上に自然に定まる $\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}$ の連続表現 $\rho_{m,\ell}$ の Q への制限 $(\rho_{m,\ell}|_Q, \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}))$ への連続かつ単射な Q-絡作用素を具体的に構成する[4](図 5.1 参照).

$$\begin{array}{ccc} L^2(G/H) & \dashrightarrow & \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}) \\ \wr\| & & \wr\| \\ L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell) & \overset{B}{\to} & \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

図 5.1: ユニタリ表現 $\pi_H|_Q$ の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ への実現

以下に示す具体的構成では，$\mathbb{R}^m$ 上の熱核と $\mathbf{H}_\ell$ 上の熱核を用いるため，まずは熱核について簡潔に振り返っておこう．

5.1 $\mathbb{R}^m$ 上の熱核

$\mathbb{R}^m$ 上の Laplace 作用素 Δ に関して，$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ 上の熱方程式 $\partial_t u(v,t) = \Delta u(v,t)$ の基本解 $h_{\mathbb{R}^m}(v,t)$ は $h_{\mathbb{R}^m}(v,t) = (4\pi t)^{-m/2} e^{-(v_1^2+\cdots+v_m^2)/4t}$ で与えられることが知られている．これは $\mathbb{R}^m$ 上の熱核と呼ばれる．$t \in \mathbb{R}_+$ を 1 つ固定して

$$h_{\mathbb{R}^m}(v) := h_{\mathbb{R}^m}(v,t) \quad (v \in \mathbb{R}^m) \tag{5.2}$$

とおくと $h_{\mathbb{R}^m}$ は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}_+$ への解析的関数となる．この $h_{\mathbb{R}^m}$ を $\mathbb{C}^m$ 上の正則関数に拡張し，これを同じ記号で表す．このとき，$f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ に対して $B_{\mathbb{R}^m} f$ を

$$(B_{\mathbb{R}^m} f)(v) := \int_{\mathbb{R}^m} f(s) h_{\mathbb{R}^m}(v-s)\, ds \quad (v \in \mathbb{C}^m) \tag{5.3}$$

で定める．ただし，ds は $\mathbb{R}^m$ 上の Lebesgue 測度である．この $B_{\mathbb{R}^m}$ は $L^2(\mathbb{R}^m)$ から $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ への連続かつ単射な作用素となる．さらに，加法群 $\mathbb{R}^m$ の $L^2(\mathbb{R}^m)$ 上の正則表現，および $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ 上に自然に定まる $\mathbb{C}^m$ の連続表現の $\mathbb{R}^m$ への制限に関して，$B_{\mathbb{R}^m}$ は $\mathbb{R}^m$-絡作用素となる．(5.3) で定まる $B_{\mathbb{R}^m}$ は $\mathbb{R}^m$ 上の熱核変換とよび，Segal–Bargmann 変換としても知られている．

5.2 $\mathbf{H}_m$ 上の熱核変換

$(2\ell+1)$ 次元 Heisenberg 群 $\mathbf{H}_\ell$ に対して，$\mathbf{H}_\ell \times \mathbb{R}_+$ 上の熱方程式の基本解は [9, (2.2.1)] で具体的に与えられている．$\mathbf{H}_\ell$ 上の熱核 $h_{\mathbf{H}_\ell}$ をこの基本解を用いて与えると，$\mathbf{H}_\ell$ から $\mathbb{R}_+$ への解析的関数となる．これを複素化 $\mathbf{H}_\ell$ 上の正則関数に拡張する．前節の $\mathbb{R}^m$ の場合と同様に，$\mathbf{H}_\ell$

[4] $(s,x) \in \mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}$ と $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ に対して，$\rho_{m,\ell}(s,x) f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ を $[\rho_{m,\ell}(s,x) f](v,g) := f(v-s, x^{-1}g)$ $((v,g) \in \mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ で定める．

の Haar 測度 dk に関する 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{H}_\ell)$ の元 f に対して，$B_{\mathbf{H}_\ell}f$ を

$$(B_{\mathbf{H}_\ell}f)(g) := \int_{\mathbf{H}_\ell} f(k)h_{\mathbf{H}_\ell}(k^{-1}g)\,dk \quad (g \in (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}) \tag{5.4}$$

で定めると，$B_{\mathbf{H}_\ell}$ は $\mathbf{H}_\ell$ の $L^2(\mathbf{H}_\ell)$ 上の正則表現から $\mathcal{O}((\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ 上に自然に定まる連続表現への連続かつ単射な $\mathbf{H}_\ell$-絡作用素となる ([9, Section 3.1])．(5.4) で与えた $B_{\mathbf{H}_\ell}$ は $\mathbf{H}_\ell$ 上の熱核変換とよばれる．

5.3 $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ の $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$ 上の正則表現の $(\rho_{m,\ell}|_Q, \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}))$ への実現

加法群 $\mathbb{R}^m$ と Heisenberg 群 $\mathbf{H}_\ell$ の直積群 $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ の正則表現 $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$ は，第 5.1 節で述べた $\mathbb{R}^m$ 上の熱核 $h_{\mathbb{R}^m}$ と第 5.2 節で述べた $\mathbf{H}_\ell$ 上の熱核 $h_{\mathbf{H}_\ell}$ を用いて以下のように $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ に実現される：$f \in L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$ に対して

$$(Bf)(v,g) := \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell} f(s,k)h_{\mathbb{R}^m}(v-s)h_{\mathbf{H}_\ell}(k^{-1}g)\,dsdk \quad ((v,g) \in \mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}) \tag{5.5}$$

と定めると，$Bf \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ となる．直積群 $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ の $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$ 上の正則表現および $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ 上の連続表現 $\rho_{m,\ell}|_Q$ に関して，次が示される：

定理 5.1. (5.5) で定めた $B : L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ は連続かつ単射な $(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$-絡作用素である．

5.4 ユニタリ表現 $\pi_H|_Q$ の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ への実現

ここでは，$G/H \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ のときに，この同一視の下で $Q = \langle \exp \mathfrak{q} \rangle$ および $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ への Q の作用を具体的に表そう．なお，$\mathbf{H}_\ell$ は半直積群 $\mathbb{R}^{2\ell} \ltimes \mathbb{R}$ とリー群と同型であることを用いる．

まず，$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{g}$ の部分環であるときを考えよう．このとき，Q は $\exp \mathfrak{q}$ に等しいため，$Q \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ であり，G/H における Q の作用は $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ における $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell$ の標準的な作用 (直積群の群演算) に他ならない．よって，(5.5) で与えた連続かつ単射な作用素 B は Q-絡作用素である．

次に，$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{g}$ の部分環ではないときを考えよう．$\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{h}_j$ の補空間は $\mathfrak{g}$ の部分環であった．よって，事実 2.1 により $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ を含み，よって $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ を含まないことに注意する．ゆえに，$\exp \mathfrak{q}$ は $\mathbb{R}^m$ と微分同相となる．一方で，Q は $\exp(\mathfrak{q} + \mathbb{R}Z)$ に一致するので，$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, q \in \mathbb{N}$ によって $\exp(\mathfrak{q} + \mathbb{R}Z) \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbf{H}_q = \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^{2q} \ltimes \mathbb{R})$ と表される．ゆえに，$\exp \mathfrak{q}$ は多様体として $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q} \simeq \mathbb{R}^{p+2q}$ と微分同相となり，$m = p + 2q$ を満たす．この同一視の下で，$\exp \mathfrak{q}$ における Q の作用は $\mathbb{R}^{p+2q}$ における $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^{2q} \ltimes \mathbb{R})$ の作用として次のように与えられる：

$$(a,(b,z)) \cdot (v,w) = (a+v, b+w) \quad ((a,(b,z)) \in \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^{2q} \ltimes \mathbb{R}),\ (v,w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}).$$

したがって，$f \in L^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q})$ に対して (5.5) で与えた作用素 B は $(m, \ell) = (p + 2q, 0)$ として

$$\begin{aligned}
[B((a,(b,z)) \cdot f)](v_1, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}} [(a,(b,z)) \cdot f](s_1, s_2) h_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}}(v_1 - s_1, v_2 - s_2)\, ds_1 ds_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}} f(s_1 - a, s_2 - b) h_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}}(v_1 - s_1, v_2 - s_2)\, ds_1 ds_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}} f(s_1, s_2) h_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}}((v_1 - a) - s_1, (v_2 - b) - s_2)\, ds_1 ds_2 \\
&= (Bf)(v_1 - a, v_2 - b) \\
&= [\rho_{p+2q,0}(a,(b,z))(Bf)](v_1, v_2) \quad ((v_1, v_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q})
\end{aligned}$$

を満たすため，Q-絡作用素である．

以上より，次が結論付けられる：

定理 5.2. (5.5) で定めた $B : L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}})$ は連続かつ単射な Q-絡作用素である．

5.5 定理 2.2: (iv) $\Rightarrow$ (iii) の証明

最後に，定理 2.2 の (iv) $\Rightarrow$ (iii) を示そう．証明の方針を示した図 5.1 も参照．

Q の連続表現 $\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q$ が無重複であるとする．$(\varpi_{H_{\mathbb{C}}}|_Q, \mathcal{O}(G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}))$ は $(\rho_{m,\ell}|_Q, \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times (\mathbf{H}_\ell)_{\mathbb{C}}))$ と表現同値であるから，$\rho_{m,\ell}|_Q$ も無重複である．よって，定理 5.2 により $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_\ell)$ 上の正則表現は Q の無重複表現である．ゆえに，これは $\pi_H|_Q$ と表現同値より $\pi_H|_Q$ は Q の無重複表現である．

参考文献

[1] A. Baklouti, I. Kédim and T. Yoshino, On the deformation space of Clifford-Klein forms of Heisenberg groups, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2008** (2008), Art. ID rnn066, 35 pp.

[2] A. Baklouti and A. Sasaki, Visible actions and criteria for multiplicity-freeness of representations of Heisenberg groups, *J. Lie Theory* **31** (2021), 719–750.

[3] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grelaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **304** (1987), 549–583.

[4] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.

[5] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[6] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2017), 669–691.

[7] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.

[8] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, *Lie Groups: structure, actions, and representations*, 113–140, Progress in Mathematics, **306**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2013.

[9] B. Krötz, S. Thangavelu and Y. Xu, The heat kernel transform for the Heisenberg group, *J. Funct. Anal.* **225** (2005), 301–336.

[10] R. L. Lipsman, Orbitral parameters for induced and restricted representations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 433–473.

[11] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2009** (2009), 3445–3466.

[12] A. Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits in complex simple Lie algebras, *J. Lie Theory* **26** (2016), 597–649.

[13] 笹木集夢, 無重複表現と可視的作用, 数学 **74** (2022), 225–252.

[14] Y. Tanaka, Classification of visible actions on flag varieties, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci.* **88** (2012), 91–96.

[15] Y. Tanaka, Visible actions of compact Lie groups on complex spherical varieties, *J. Differential Geom.* **120** (2022), 375–388.