コンパクト対称空間上の確率測度によるデルサルト理論

広島大学大学院先進理工学研究科 中田 彬文 *

Akifumi Nakada

Graduate School of Advanced Science and Engineering,

Hiroshima University

1 はじめに

本稿では，コンパクト対称空間の有限部分集合についてのデルサルト理論を，確率測度に対しても展開する．

2 有限部分集合についてのデルサルト理論

まず，コンパクト対称空間の有限部分集合に関するデルサルト理論について，よく知られている事実を紹介する．デルサルト理論は，組合せ最適化の一部である符号理論とデザイン理論を，フーリエ解析を通して双対概念として結びつけるものであるため，符号理論とデザイン理論についても簡単に紹介する．

以下，M を空でないコンパクト連結対称空間とする．また，M の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ の開かつ閉部分群 G を一つ固定する．さらに，M の空でない有限部分集合 X も一つ固定する．

2.1 符号理論

以下，$\mathcal{I}$ を G の $M \times M$ への対角作用による軌道空間とし，$R\colon M \times M \to \mathcal{I}$ を位相空間としての商写像とする．ここで，$\mathcal{I}$ の部分集合 $\mathcal{A}$ について，$R(X \times X) \subset \mathcal{A}$ が成り立つとき，X を $\underline{\mathcal{A}\text{ コード}}$と呼ぶ．以下，$\mathcal{A}$ と書いたら $\mathcal{I}$ の部分集合であるとする．

2.2 デザイン理論

以下，μ_M を M 上の G 不変な確率ラドン測度（一意に存在する）とする．さらに，μ_M による L^2 空間 $L^2(M)$ を考え，G ユニタリ正則表現 $G \to U(L^2(M))$ の既約部分表現全体の成す集合を

* nakada-aki@hiroshima-u.ac.jp

$\mathcal{J}$ と書く．また，M 上の定数関数全体の成す集合を V_0 と書く．このとき，各 $V \in \mathcal{J}$ は M 上の連続関数から成る有限次元ベクトル空間とみなせることが知られている．ここで，V_0 を含む $\mathcal{J}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ について，任意の $V \in \mathcal{T}$ と $f \in V$ に対して，

$$\mu_M(f) = \frac{1}{\#X} \sum_{x \in X} f(x)$$

が成り立つとき，X を <u>$\mathcal{T}$ デザイン</u>と呼ぶ．以下，$\mathcal{T}$ と書いたら $\mathcal{J}$ の部分集合であって V_0 を含むものとする．

2.3 デルサルト理論

まず，符号理論に関係する $\mathcal{I}$ 分布と呼ばれるものを紹介する．各 $i \in \mathcal{I}$ に対して，

$$a_i^X \coloneqq \frac{\#\{\,(x,y) \in X \times X \mid R(x,y) = i\,\}}{\#X^2}$$

とおき，

$$a^X \coloneqq \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^X \delta_i \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$$

と定める．ただし，$\mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ は $\mathcal{I}$ が生成するベクトル空間である．さらに，a^X を X の <u>$\mathcal{I}$ 分布</u>と呼ぶ．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2.1. 次の 2 つは同値である．

(1) X は $\mathcal{A}$ コードである．
(2) 任意の $i \notin \mathcal{A}$ に対して，$a_i^X = 0$ である．

これにより，符号理論と $\mathcal{I}$ 分布が結びつく．

次に，デザイン理論に関係する $\mathcal{J}$ 分布と呼ばれるものを紹介する．各 $V \in \mathcal{J}$ に対して，

$$b_V^X \coloneqq \|\mu_X|_V \colon (V, \|-\|_2) \to \mathbb{C}\|_{\mathrm{op}}^2$$

とおき，

$$b^X \colon (V \mapsto b_V^X) \in \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$$

と定める．ただし，$\mathbb{C}^{\mathcal{J}}$ は $\mathcal{J}$ 上の関数全体が成すベクトル空間である．さらに，b^X を X の <u>$\mathcal{J}$ 分布</u>と呼ぶ．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2.2. 次の 2 つは同値である．

(1) X は $\mathcal{T}$ デザインである．
(2) 任意の $V \in \mathcal{T} - \{\,V_0\,\}$ に対して，$b_V^X = 0$ である．

これにより，デザイン理論と $\mathcal{J}$ 分布も結びつく．

続いて，$\mathcal{I}$ 分布と $\mathcal{J}$ 分布を結びつける球フーリエ変換を紹介する．各 $V \in \mathcal{J}$ と V の再生核 $\mathcal{K}_V : M \times M \to \mathbb{C}$ に対して，商写像 $R\colon M \times M \to \mathcal{I}$ の普遍性より，

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "\mathcal{K}_V"] & \\ \mathcal{I} \arrow[r, dashed, "Q_V"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

を可換にする連続写像 $Q_V : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ が一意に存在する．この Q_V を V に関する<u>球関数</u>と呼ぶ．さらに，各 $a \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a) \coloneqq \widehat{a}\colon \mathcal{J} &\to \mathbb{C} \\ V &\mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \cdot Q_V(i) \end{aligned}$$

と定め，$\mathcal{F}\colon \mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$ を<u>球フーリエ変換</u>と呼ぶ．このとき，次の命題が成り立つ．

定理 2.3. $\widehat{a^X} = b^X$ である．

以上により，球フーリエ変換を通して，符号理論とデザイン理論を結びつけることができた．さらに，次の命題が成り立つことも知られている．

定理 2.4. 球フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon \mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$ は単射線形写像である．

しかしながら，$\mathcal{F}$ の像の綺麗な表示については知られていない．

最後に，デルサルトバウンドと呼ばれる，良い X にかかる濃度の制限を紹介する．まず，次の命題が成り立つ．

命題 2.5. $X \subset M$ を $\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインであるとする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $a^X \geq 0$,
(2) $a^X = 0$ on $\mathcal{A}^c$,
(3) $\widehat{a^X} \geq 0$,
(4) $\widehat{a^X} = 0$ on $\mathcal{T} - \{ V_0 \}$,
(5) $\widehat{a^X}(V_0) = 1$.

これに従い，次の設定で線形計画問題を考える．ただし，$i_0 \in \mathcal{I}$ を $M \times M$ の対角線集合とする．

設定 2.6.

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} && a \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}},\\
&\text{maximize or minimize} && a_{i_0},\\
&\text{subject to} && a \geq 0,\\
& && a = 0 \text{ on } \mathcal{A}^c,\\
& && \widehat{a} \geq 0,\\
& && \widehat{a} = 0 \text{ on } \mathcal{T} - \{\, V_0 \,\},\\
& && \widehat{a}(V_0) = 1.
\end{aligned}
$$

この線形計画問題の双対問題を考えることで，$\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインな X について，$a_{i_0}^X \in \mathbb{R}$ の取りうる値を制限することができる．さらに，

$$a_{i_0}^X = \frac{\#\{\, (x,y) \in X \times X \mid R(x,y) = i_0 \,\}}{\# X^2} = \frac{1}{\# X}$$

であるので，X の濃度についても，その取りうる値を制限することができる．

3 確率測度についてのデルサルト理論

上で紹介した有限部分集合についてのデルサルト理論を，確率測度に対して展開していく．記号遣いは有限部分集合のときに従うこととする．また，コンパクト位相空間 Y 上の連続関数全体が成すベクトル空間を $C(Y)$ と書き，$(C(Y), \|-\|_\infty)$ 上の非負値有界線形汎関数 $C(Y) \to \mathbb{C}$ 全体の成す集合を $\mathcal{M}(Y)$ と書く．さらに，$\mathcal{M}(Y)$ の元を Y 上の測度と呼ぶ．これはリース・マルコフ・角谷の表現定理により正当化される．以下，M 上の確率測度 μ を一つ固定する．また，X が誘導する M 上の確率測度 μ_X を，

$$\mu_X(f) \coloneqq \frac{1}{\# X} \sum_{x \in X} f(x)$$

と定める．

3.1 符号理論

測度 μ_X の台 $\operatorname{supp} \mu_X \subset M$ は X と一致するという事実を用いて，有限部分集合についての符号理論を自然に拡張する．すなわち，

$$R(\operatorname{supp} \mu \times \operatorname{supp} \mu) \subset \mathcal{A}$$

が成り立つとき，μ を $\mathcal{A}$ コードと呼ぶ．

3.2 デザイン理論

こちらも有限部分集合についてのデザイン理論を自然に拡張する．すなわち，任意の $V \in \mathcal{T}$ と $f \in V$ に対して，$\mu_M(f) = \mu(f)$ が成り立つとき，μ を $\mathcal{T}$ デザインと呼ぶ．

3.3 デルサルト理論

まず，μ の $\mathcal{I}$ 分布 $a^\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$ を，積測度と像測度を用いて $a^\mu \coloneqq R_*(\mu \otimes \mu)$ と定める．ここで，a_i^X に相当するものを定めていないことに注意せよ．これは，a_i^X を自然に拡張して a_i^μ を定めると，多くの場合 $a_i^\mu = 0$ となってしまうからである．しかしながらこのときも，測度についての符号理論と $\mathcal{I}$ 分布が次の命題によって結びつけられる．

命題 3.1. 次の 2 つは同値である．
 (1) μ は $\mathcal{A}$ コードである．
 (2) $\operatorname{supp} a^\mu \subset \mathcal{A}$ である．

次に，μ の $\mathcal{J}$ 分布 b^μ を有限部分集合についての $\mathcal{J}$ 分布と同様に定める．（こちらは自然に拡張できる．）すなわち，各 $V \in \mathcal{J}$ に対して，

$$b_V^\mu \coloneqq \|\mu\colon (V, \|{-}\|_2) \to \mathbb{C}\|_{\mathrm{op}}^2$$

とおき，

$$b^\mu\colon (V \mapsto b_V^\mu) \in \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$$

と定める．こちらも，測度についてのデザイン理論と $\mathcal{J}$ 分布が次の命題によって結びつけられる．

命題 3.2. 次の 2 つは同値である．
 (1) μ は $\mathcal{T}$ デザインである．
 (2) $\operatorname{supp} b^\mu \subset (\mathcal{T} - \{ V_0 \})^c$ である．

続いて, 球フーリエ変換も有限部分集合の場合を自然に拡張して定める．すなわち, 各 $a \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a) \coloneqq \widehat{a}\colon \mathcal{J} &\to \mathbb{C} \\ V &\mapsto a(Q_V) \end{aligned}$$

と定め，$\mathcal{F}\colon \mathcal{M}(\mathcal{I}) \to \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$ を球フーリエ変換と呼ぶ．こちらも，有限部分集合についての球フーリエ変換と同様に以下の命題が成り立つ．

定理 3.3. $\widehat{a^\mu} = b^\mu$ である．

定理 3.4. 球フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon \mathcal{M}(\mathcal{I}) \to \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$ は単射線形写像である．

そして，$\mathcal{F}$ の像の綺麗な表示についても同様に分かっていない．

最後に，デルサルトバウンドの拡張を考える．有限部分集合の場合と同様に次の命題が成り立つ．

命題 3.5. $\mu \in \mathcal{M}(M)$ を $\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインであるとする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $a^\mu \geq 0$,

(2) $\operatorname{supp} a^\mu \subset \mathcal{A}$,

(3) $\widehat{a^\mu} \geq 0$,

(4) $\operatorname{supp} \widehat{a^\mu} \subset (\mathcal{T} - \{ V_0 \})^c$,

(5) $\widehat{a^\mu}(V_0) = 1$.

これに従い，線形計画問題を考えたいが，目的関数 $a \to a_{i_0}$ が機能しないため，別の目的関数を考える必要がある．そこで，$\mathcal{I}$ 上の実数値連続関数 φ を考え，$1/a^\mu(\varphi)$ を μ の $\underline{\varphi\text{ 濃度}}$と呼ぶ．このとき，$\mu_X$ の φ 濃度について，次の命題が成り立つ．

命題 3.6. φ は $\varphi(i_0) = 1$ かつ $\mathrm{Zero}(\varphi)^c \cap R(X \times X) = \{ i_0 \}$ を満たすとする．このとき，μ_X の φ 濃度は X の通常の濃度と一致する．

これを用いて，次の設定で線形計画問題を考える．

設定 3.7.

$$
\begin{array}{cl}
\text{Find} & a \in \mathcal{M}(\mathcal{I}), \\
\text{maximize or minimize} & a(\varphi), \\
\text{subject to} & a \geq 0, \\
 & \operatorname{supp} a \subset \mathcal{A}, \\
 & \widehat{a} \geq 0, \\
 & \operatorname{supp} \widehat{a} \subset (\mathcal{T} - \{ V_0 \})^c, \\
 & \widehat{a}(V_0) = 1.
\end{array}
$$

この線形計画問題の双対問題を考えることで，$\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインな μ について，$a^\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$ の取りうる値を制限することができる．つまり，φ 濃度の取りうる値を制限することができる．

4 おわりに

本稿を通して，コンパクト対称空間上の確率測度に対して符号理論・デザイン理論・デルサルト理論を展開した．表 1 はデルサルト理論に登場する用語に対応するものを，有限部分集合の場合と確率測度の場合で並べたものである．

残された問題を 2 つ挙げる．1 つ目は，φ 濃度についてのデルサルトバウンドが，通常の濃度に

表 1　デルサルト理論に登場する用語の対応

	有限部分集合	確率測度
対象	M の有限部分集合 X	M 上の確率測度 μ
$\mathcal{A}$ コード	$R(X \times X) \subset \mathcal{A}$	$R(\operatorname{supp}\mu \times \operatorname{supp}\mu) \subset \mathcal{A}$
$\mathcal{T}$ デザイン	$\mu_M(f) = \mu_X(f)$	$\mu_M(f) = \mu(f)$
a_i^-	$\frac{\#\{\,(x,y)\in X\times X \mid R(x,y)=i\,\}}{\#X^2}$	不明
$\mathcal{I}$ 分布 a^-	$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^X \delta_i \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$	$R_*(\mu\otimes\mu) \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$
b_V^-	$\\|\mu_X \colon V \to \mathbb{C}\\|_{\mathrm{op}}^2$	$\\|\mu \colon V \to \mathbb{C}\\|_{\mathrm{op}}^2$
$\mathcal{J}$ 分布 b^-	$V \mapsto b_V^X$	$V \mapsto b_V^\mu$
$\widehat{a}$	$V \mapsto \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i \cdot Q_V(i)$	$V \mapsto a(Q_V)$
球フーリエ変換 $\mathcal{F}$	$\mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$	$\mathcal{M}(\mathcal{I}) \to \mathbb{C}^{\mathcal{J}}$

ついてのデルサルトバウンドと一致するような φ が無いこと，2 つ目は，φ として単位閉区間 $[0,1]$ に値をとる連続関数を想定しているが，このような関数が応用上どのような意味を持つのか分かっていないことである．

参考文献

[1] Eiichi Bannai and Etsuko Bannai. A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. *European J. Combin.*, 30(6):1392–1425, 2009.

[2] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. *Philips Res. Rep. Suppl.*, (10):vi+97, 1973.

[3] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6(3):363–388, 1977.

[4] Eiichi Bannai and Stuart G. Hoggar. On tight t-designs in compact symmetric spaces of rank one. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 61(3):78–82, 1985.

[5] Christine Bachoc, Renaud Coulangeon, and Gabriele Nebe. Designs in Grassmannian spaces and lattices. *J. Algebraic Combin.*, 16(1):5–19, 2002.

[6] Christine Bachoc, Eiichi Bannai, and Renaud Coulangeon. Codes and designs in Grassmannian spaces. *Discrete Math.*, 277(1-3):15–28, 2004.

[7] Aidan Roy. Bounds for codes and designs in complex subspaces. *J. Algebraic Combin.*, 31(1):1–32, 2010.

[8] Aidan Roy and A. J. Scott. Unitary designs and codes. *Des. Codes Cryptogr.*, 53(1):13–31,

2009.

[9] Y. Nakata et al. Quantum circuits for exact unitary t-designs and applications to higher-order randomized benchmarking. *PRX Quantum*, 2(3), 9 2021.

[10] Hirotake Kurihara and Takayuki Okuda. Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities. *J. Algebra*, 559:432–466, 2020.