C*-代数的量子論におけるシュレディンガー描像

一般社団法人 ドレスト光子研究起点，名古屋大学情報学研究科
岡村 和弥 *

I　導入

本研究は，量子系におけるダイナミクスを柔軟に記述可能な枠組みを確立したいという動機にもとづくものである。[25, 26] の研究の延長上にあり，[28, 30] において未完かつ部分的に公表されている。なお，本稿は研究会発表時よりも洗練された表現を用いた議論になっている。

Dirac 以来の「遷移確率」概念を C*-代数的量子論において測度論的確率論の枠組みに適合する形で定義する。その定義では,「C*-確率構造」を用いることが本質的であり，セクター理論とも整合的なものとなっている。Dirac の遷移確率は Born の統計公式や von Neumann-Lüders 射影仮説とも関わりが深いものであり，それらにまつわる歴史的経緯に注意を払うのも概念理解の助けになると考え IV 章で簡単に紹介を行う。そして，遷移確率を活用することにより,「状態遷移の圏」による圏論的な定式化へと至る。本研究での圏論的な定式化は，ソフトロボティクスの圏論的解析 [39] に触発されて試みたものである。また，C*-代数的量子論でのインストルメント概念を定義し，それにもとづく量子測定理論を定式化する。インストルメントの一般論を展開した後，インストルメントの圏を定義し状態遷移の圏と結びつける。

II　準備：C*-代数的量子論

本研究は量子確率論 [18] の文脈にある研究であり，そのうち公理的アプローチおよび量子論の数理との関係を重視している。C*-代数的量子論では次の公理を採用する：

Axiom 1 (C*-確率空間)**.** ある物理的状況（または実験設定）における物理系は C*-確率空間 $(\mathcal{X}, \omega)$ – C*-代数 $\mathcal{X}$ とその上の状態 ω の組 – で記述される。

本稿で扱う C*-代数は単位的であるとする。$\mathcal{X}$ 上の状態 ω とは，ω は $\mathcal{X}$ 上の線型汎関数であり，任意の $X \in \mathcal{X}$ に対し $\omega(X^*X) \geq 0$ および $\omega(1) = 1$ を満たすものである。当然，$\mathcal{X}$ 上の状態の集合 $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ は $\mathcal{X}$ の双対空間 $\mathcal{X}$ の部分集合である。$\mathcal{X}$ の第二双対 $\mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^*$ は $\mathcal{X}$ の第二双対 W^*-代数と呼ばれる。$\mathcal{X}^{**}$ は $\mathcal{X}$ の普遍表現 $(\pi_u, \mathcal{H}_u) = \oplus_{\omega \in \mathcal{S}_\mathcal{X}} (\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ から生成される（普遍包絡）von Neumann 代数 $\pi_u(\mathcal{X})''$ と同型である。また，$\langle \hat{X}, \rho \rangle = \rho(X)$, $\rho \in \mathcal{X}^*$ で定まる $\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}^{**}$ への等長埋め込み $\hat{} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$ が存在する。作用素代数については [6, 8, 9, 44, 45] を参照のこと。

状態の概念的意義は Axiom 1 で与えられるが，測度論的確率論の文脈へは次の公理により導かれる：

*k.okamura.renormalizable@gmail.com

Axiom 2 (Born 統計公式)**.** $\mathcal{X}$ の物理量 A が状態 ω において正確に測定されるとき，Δ に属する A のスペクトルが現れる確率 $\Pr\{A \in \Delta \| \omega\}$ は次で与えられる：

$$\Pr\{A \in \Delta \| \omega\} = \langle E^{\hat{A}}(\Delta), \omega \rangle. \tag{1}$$

この公理は C*-代数的量子論の標準的公理系で通常仮定されるが，本稿では必ずしも仮定しない。仮定するときは言及する（本稿では IV 章のみで Axiom 2 を使用する）。

III　C*-確率構造・遷移確率・状態遷移の圏

ここでは，C*-代数 $\mathcal{X}$ の双対空間 $\mathcal{X}^*$ に対し弱 * 位相を採用する。弱 * 位相においては，$\omega \in \mathcal{X}^*$ の近傍は $\mathcal{X}$ の有限個の元 $X_1, \cdots, X_n$ と $\varepsilon > 0$ で：

$$U_\omega(X_1, \cdots, X_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{X}^* \mid |\varphi(X_j) - \omega(X_j)| < \varepsilon,\ j = 1, \cdots, n\} \tag{2}$$

$\mathcal{S}_\mathcal{X}$ の弱 * 位相を $\mathcal{X}^*$ の弱 * 位相の $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ への制限により定義する。$\mathcal{S}_\mathcal{X}$ に対し，弱 * 位相の開集合族から生成される Borel 集合を採用する。$\mathcal{B}(\mathcal{S}_\mathcal{X})$ で $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ の Borel 集合族を表す。詳しくは [6, 8, 44] を参照のこと。

C*-代数 $\mathcal{X}$ の双対空間 $\mathcal{X}^*$ は，真空状態や KMS 状態からかけ離れた状態などが含まれるなどして，一般に大きすぎるため適切な部分空間に制限する必要がある。以下で定義する中心性を満たす部分空間，中心部分空間がその目的にかなう。

Definition 1 (中心部分空間)**.** $\mathcal{X}^*$ の線型部分空間 $\mathcal{V}$ が中心的 *(central)* であるとは，$\mathcal{X}^{**}$ の中心射影 C で $\mathcal{V} = C\mathcal{X}^* = \{C\omega \mid \omega \in \mathcal{X}^*\}$ を満たすものが存在するときをいう。

Remark 2. $\mathcal{X}^*$ の各中心部分空間 $\mathcal{V}(= C\mathcal{X}^*)$ に対し，双対空間 $\mathcal{V}^*$ は（$C\mathcal{X}^{**}$ に同型な）W^*-代数である。

中心部分空間は Remark 2 を満たすことは利点であるが，DHR[10, 11] および DR[12, 13, 14] のより一般的文脈への拡張であるセクター理論 [23, 24] と整合的になっていることが物理的に最も価値ある事実である。詳しいことは [30] に譲るが，状態の準中心分解とインストルメントが結びつくことに基づいている。

そして，本稿において中核となる概念が次に定義する C*-確率構造である。

Definition 3 (C*-確率構造)**.** C*-代数とその双対空間の中心部分空間の組 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$ を C*-確率構造 *(C*-probability structure)* と呼ぶ。**C*-PS** で C*-確率構造のクラスを表す。各 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a) \in$ **C*-PS** に対し，$\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{\mathcal{X}_a} \cap \mathcal{V}_a$ とおく。

Definition 4 (遷移確率)**.** $a, b \in$ **C*-PS** とする。写像 $P(\cdot \leftarrow \cdot) : \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}) \times \mathcal{S}_a \to [0,1]$ は，以下の *3* 条件を満たすとき，(a,b) に対する遷移確率と呼ばれる：
(1) 各 $\omega \in \mathcal{S}_a$ に対し，$P(\cdot \leftarrow \omega)$ は $\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}$ 上の確率測度である。
(2) 各 $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$ に対し，写像 $\mathcal{S}_a \ni \omega \mapsto P(\Delta \leftarrow \omega) \in [0,1]$ は可測である。

ここで，上記 2 条件を満たす $P(\cdot \leftarrow \cdot) : \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}) \times \mathcal{S}_a \to [0,1]$ に対し，$\omega \in \mathcal{S}_a$ および $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$ が $P(\Delta \leftarrow \omega) \neq 0$ を満たすとき，P の定める $\mathcal{X}_b$ 上の状態 $\omega_{(P,\Delta)}$ を

$$\omega_{(P,\Delta)} = \frac{1}{P(\Delta \leftarrow \omega)} \int_\Delta \rho \, dP(\rho \leftarrow \omega) \tag{3}$$

で定める。
(3) $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$ と $\omega \in \mathcal{S}_a$ で $P(\Delta \leftarrow \omega) \neq 0$ となるとき $\omega_{(P,\Delta)} \in \mathcal{S}_b$。

$a = b$ のとき，(a, b) に対する遷移確率を a に対する遷移確率と呼ぶ。また，1 点集合 $\{\varphi\} \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$ に対し $P(\{\varphi\} \leftarrow \omega)$ を単に $P(\varphi \leftarrow \omega)$ と表す。

遷移確率の定義を見る限りでは C^*-確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$ の定義を，C^*-代数とその双対空間のある中心部分空間に属する状態 $\mathcal{S}_a$ の組 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{S}_a)$ のほうが適切なようにもみえる。しかし，インストルメントにおいては上の定義のほうがふさわしくもみえ，使用する場面の想定次第であったり趣味の問題のように思う。

Example 1 (決定論的遷移)**.** (1) α を C^*-代数 $\mathcal{X}$ の *-同型とする。遷移確率 $P^{(\alpha)} : \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}) \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}} \to [0, 1]$ を $P^{(\alpha)}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_{\omega \circ \alpha}(\Delta)$ で定める。
(2) $a, b \in \mathbf{C^*}\text{-}\mathbf{PS}$ とし，単位的正値線型写像 $T : \mathcal{V}_a \to \mathcal{V}_b$ とする。遷移確率 $P^{(\alpha)} : \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}) \times \mathcal{S}_a \to [0, 1]$ を $P^{(T)}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_{T\omega}(\Delta)$ で定める。

2 種類の「遷移確率の合成」を定義する。$a, b, c \in \mathbf{C^*}\text{-}\mathbf{PS}$ とし，Q, P それぞれを (b, c), (a, b) に対する遷移確率とする。

Definition 5 (強合成)**.** Q と P が強合成可能であるとは，各 $\omega \in \mathcal{S}_a$ に対し，

$$(Q *_s P)(\Gamma \times \Delta | \omega) = \int_{\Delta \cap \operatorname{supp} P(\cdot \leftarrow \omega)} Q(\Gamma \leftarrow \rho)\, dP(\rho \leftarrow \omega) \tag{4}$$

が $\mathcal{S}_{\mathcal{X}_c} \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}$ 上の確率測度を定めるときを言う。

Q と P が強合成可能なとき，(a, c) に対する遷移確率 $Q \lhd_s P$ を次で定める：

$$(Q \lhd_s P)(\Gamma \leftarrow \omega) = (Q *_s P)(\Gamma \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b} | \omega). \tag{5}$$

この遷移確率を Q と P の強合成と呼ぶ。

Definition 6 (合成)**.** Q と P が合成可能であるとは，各 $\omega \in \mathcal{S}_a$ に対し，

$$(Q * P)(\Gamma \times \Delta | \omega) = Q(\Gamma \leftarrow \omega_{(P, \Delta)})\, P(\Delta \leftarrow \omega) \tag{6}$$

が $\mathcal{S}_{\mathcal{X}_c} \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}$ 上の確率測度を定めるときを言う。

Q と P が合成可能なとき，(a, c) に対する遷移確率 $Q \lhd P$ を次で定める：

$$(Q \lhd P)(\Gamma \leftarrow \omega) = (Q * P)(\Gamma \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b} | \omega). \tag{7}$$

この遷移確率を Q と P の合成と呼ぶ。

これらの合成を用いて,「状態遷移の圏」を定義する。

Definition 7. 状態遷移の圏は次で与えられる：

対象 C^*-確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$

射 $b \leftarrow a : f$ は (a, b) に対する遷移確率 P_f を伴う。各対象 a に対する恒等射 $a \leftarrow a : 1_a$ の遷移確率は $P_{1_a}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_\omega(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_a})$, $\omega \in \mathcal{S}_a$ で定義される。射の合成は、合成された射に伴う遷移確率の合成。

Definition 8. 強状態遷移の圏は次で与えられる：

対象 C*-確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$

射 $b \leftarrow a : f$ は (a,b) に対する遷移確率 P_f を伴う。P_f は，各 $\omega \in \mathcal{S}_a$ に対し，$\operatorname{supp} P(\cdot \leftarrow \omega) \subset \mathcal{S}_b$. 射の合成は遷移確率の強合成による。

具体例は VI 章において提示する。

IV　歴史的経緯

Axiom 2 を仮定し，$\mathcal{H}$ を可分 Hilbert 空間とする。$\mathcal{H}$ 上の密度作用素 ρ と $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の正規状態 $\tilde{\rho}$ を以下で定める同型写像 $\tilde{\cdot} : \boldsymbol{T}(\mathcal{H}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})_*$ のもと区別しない：

$$\tilde{\rho}(X) = \mathrm{Tr}[\rho X], \quad X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}). \tag{8}$$

このとき，$a_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), \boldsymbol{T}(\mathcal{H})) \in \mathbf{C^*\text{-}PS}$ である。

Postulate 1. $A = \sum_{a \in \mathbb{R}} a E^A(\{a\})$ を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の離散物理量とする。密度作用素 ρ において A が正確に測定されるとき，各 $a \in Sp(A;\rho) = \{a \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Tr}[E^A(\{a\})\rho] > 0\}$ に対し測定後の状態 $\rho_{\{A=a\}}$ が一意に定まり，$a_{\mathcal{H}}$ に対する遷移確率は

$$\Pr(\Delta \leftarrow \rho) = \sum_{a \in Sp(A;\rho)} \mathrm{Tr}[E^A(\{a\})\rho] \delta_{\rho_{\{A=a\}}}(\Delta) \tag{9}$$

で与えられる、特に，

$$\Pr(\rho_{\{A=a\}} \leftarrow \rho) = \mathrm{Tr}[E^A(\{a\})\rho]. \tag{10}$$

Postulate 1 のもと，Dirac の遷移確率を含む形で最も一般的な以下の仮説である。

Postulate 2 (von Neumann-Lüders 射影仮説)**.** 密度作用素 ρ において A が正確に測定されるとき，$\mathrm{Tr}[E^A(\{a\})\rho] > 0$ ならば，

$$\rho_{\{A=a\}} = \frac{E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(\{a\})]} \tag{11}$$

更には，$\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に属さない A の値を無視する状況での，測定後の状態 $\rho_{\{A\in\Delta\}}$ は次で与えられる：

$$\frac{\sum_{a\in\Delta} \mathrm{Tr}[\rho E^A(\{a\})]\rho_{\{A=a\}}}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(\Delta)]} = \frac{\left(\sum_{a\in\mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})\right) \cdot E^A(\Delta)}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(\Delta)]}.$$

von Neumann [22] は非退化な場合に仮説 2 を考えた。Lüders [20] は退化した場合に一般化した。von Neumann [22] は von Neumann-Lüders 射影仮説を次の仮説から導出した：

Postulate 3 (反復可能性仮説)**.** 対象系の物理量 A を続けて二度測定したら，一度に同じ値を得る。

中村と梅垣は [21] において写像

$$\rho \mapsto \sum_{a\in\mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})$$

が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から vN 部分代数 $\{A\}' = \{B \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mid AB = BA\}$ への条件付き期待値（の前双対写像）[46, 45] に他ならないことを指摘し，連続スペクトルをもつ物理量に対しても同様の議論が成り立つと予想した。Arveson [3] は，連続的な場合にはそのような条件付き期待値が存在しないことを示した。これらの先行研究に続き，Davies と Lewis [7] は反復可能性仮説（仮説 3）を放棄し，測定により生じる一般の状態変化を記述するインストルメントの概念を導入した。小澤 [32] は完全正値インストルメントを導入し，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の完全正値インストルメントは測定過程で定義されることを示した。[31] では一般の vN 代数上での完全正値インストルメントが測定過程で定義されるための必要十分条件を見出した。[30] では C*-代数的量子論の場合にインストルメントを定義し解析した。

V 量子測定理論

$a, b \in$ **C***-**PS** とする。そして，$P(\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b)$ を $\mathcal{V}_a$ から $\mathcal{V}_b$ への正値線型写像の集合とする。[30] において定義した C*-代数的量子論でのインストルメントを，本稿で定義した C*-確率構造を用いて改めて定義する。

Definition 9 (インストルメント)**.** $(S, \mathcal{F})$ を可測集合とする。$\mathcal{I}$ が (a, b, S) に対するインストルメントであるとは，以下の *3* 条件を満たすときを言う：
(1) $\mathcal{I}$ は $\mathcal{F}$ から $P(\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b)$ への写像である。
(2) すべての $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し，$\langle 1, \mathcal{I}(S)\rho\rangle = \langle 1, \rho\rangle$。
(3) 各 $\rho \in \mathcal{V}_a$, $M \in \mathcal{V}_b^*$ および $\mathcal{F}$ の互いに素な列 $\{\Delta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\langle M, \mathcal{I}(\cup_j \Delta_j)\rho\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle M, \mathcal{I}(\Delta_j)\rho\rangle. \tag{12}$$

- $a = b$ のとき, (a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ を (a, S) に対するインストルメントと呼ぶ。更には，$\mathcal{M}$ を W^*-代数とし，$a = b = (\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$ のとき，(a, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対するインストルメントと呼ぶ。

- (a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ と $\varphi \in \mathcal{S}_a$ に対し，$(S, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\|\mathcal{I}\varphi\|$ を $\|\mathcal{I}\varphi\|(\Delta) = \|\mathcal{I}(\Delta)\varphi\|$, $\Delta \in \mathcal{F}$, で定義する。

- (a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ と $\varphi \in \mathcal{S}_a$ に対し，$\mathcal{I}$ の双対写像 $\mathcal{I}^* : \mathcal{V}_b^* \times \mathcal{F} \to \mathcal{V}_a^*$ を
$$\langle M, \mathcal{I}(\Delta)\rho\rangle = \langle \mathcal{I}^*(M, \Delta), \rho\rangle, \tag{13}$$
$\rho \in \mathcal{V}_a$, $M \in \mathcal{V}_b^*$, $\Delta \in \mathcal{F}$, で定義する。

以下の 3 条件を満たす各写像 $\mathcal{J} : \mathcal{V}_b^* \times \mathcal{F} \to \mathcal{V}_a^*$ に対し，(a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ で $\mathcal{J} = \mathcal{I}^*$ を満たすものが一意に存在する：
(1) 各 $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し， 写像 $\mathcal{V}_b^* \ni M \mapsto \mathcal{J}(M, \Delta) \in \mathcal{V}_a^*$ は正規，正値かつ線型である。

(2) $\mathcal{J}(1, S) = 1$.
(3) 各 $\rho \in \mathcal{V}_a$, $M \in \mathcal{V}_b^*$ および $\mathcal{F}$ の互いに素な列 $\{\Delta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対し，

$$\langle \mathcal{J}(M, \cup_j \Delta_j), \rho \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mathcal{J}(M, \Delta_j), \rho \rangle. \tag{14}$$

今後，$\mathcal{I}$ で，(a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ の双対写像 $\mathcal{I}^*$ のことも表す。双対写像のことも (a, b, S) に対するインストルメントと呼ぶ。

対象系 **S** が $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a) \in$ **C*****-PS** で記述されるときを考える。Davies と Lewis [7] の考え方は次のようにまとめられる。

Postulate 4 (Davies-Lewis の提唱)**.** 対象系 **S** を測定する，可測空間 $(S, \mathcal{F})$ に値をとる出力変数 $\boldsymbol{x}$ をもつ測定装置 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ ごとに，(a, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ が以下の意味でただ一つ存在する。**S** の各始状態 ρ に対し，ρ における $\boldsymbol{x}$ の出力に関する確率測度 $\Pr\{\boldsymbol{x} \in \Delta \| \rho\}$ は

$$\Pr\{\boldsymbol{x} \in \Delta \| \rho\} = \|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|, \quad \Delta \in \mathcal{F}, \tag{15}$$

で与えられる。そして，ρ が準備され，$\Delta \in \mathcal{F}$ に属さない出力変数 $\boldsymbol{x}$ の値は無視する状況での測定後の状態 $\rho_{\{\boldsymbol{x} \in \Delta\}}$ は，$\Pr\{\boldsymbol{x} \in \Delta \| \rho\} > 0$ のとき，

$$\rho_{\{\boldsymbol{x} \in \Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|} \tag{16}$$

である。ただし，$\Pr\{\boldsymbol{x} \in \Delta \| \rho\} = 0$ のときは $\rho_{\{\boldsymbol{x} \in \Delta\}}$ は不定であるとする。

インストルメントと状態が与えられるごとに，次の被積分を考えることができる。

Definition 10 (被積分)**.** $a, b \in$ **C*****-PS** とする。$\mathcal{I}$ を (a, b, S) に対するインストルメントとし $\rho \in \mathcal{S}_a$ とする。$\mathcal{X}_b$ 上の状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が $(\mathcal{I}, \rho)$ に対する被積分であるとは，以下の条件を満たすときを言う：
(1) 写像 $s \mapsto \rho_s$ は弱 * $\|\mathcal{I}\rho\|$-可測である。
すなわち，すべての $A \in \mathcal{X}$ に対し，$s \mapsto \rho_s(A)$ は $\|\mathcal{I}\rho\|$-可測である。
(2) 各 $X \in \mathcal{X}_a$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，

$$[\mathcal{I}(\Delta)\rho](X) = \int_{\Delta} \rho_s(X)\, d\|\mathcal{I}\rho\|(s). \tag{17}$$

Theorem 1. (a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ と $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し，$(\mathcal{I}, \rho)$ に対する被積分 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が常に存在する。

この定理の証明は [34, Theorem 4.3] と同様にして行われる。

Definition 11. (a, b, S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ が条件 *(S)* を満たすとは，各 $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し，写像 $s \mapsto \rho_s$ が強可測であるときをいう。

次の事後状態とは，被積分のなかで強い条件を満たすもののことである。

Definition 12 (事後状態)**.** $\mathcal{I}$ を (a,b,S) に対するインストルメント，$\rho\in\mathcal{S}_a$ とする。$\mathcal{X}_a$ 上の状態の族 $\{\rho_s\}_{s\in S}$ が $(\mathcal{I},\rho)$ に対する事後状態の族であるとは，以下の条件を満たすときをいう：
(1) 各 $s\in S$ に対し，$\rho_s\in\mathcal{S}_a$.
(2) 写像 $s\mapsto\rho_s$ は弱 * $\|\mathcal{I}\rho\|$-可測である。
(3) 各 $M\in\mathcal{V}_b^*$ と $\Delta\in\mathcal{F}$ に対し，

$$\langle M,\mathcal{I}(\Delta)\rho\rangle=\int_\Delta\langle M,\rho_s\rangle\, d\|\mathcal{I}\rho\|(s). \tag{18}$$

まず，次の定理が知られている。

Theorem 2 (小澤 [33])**.** $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),S)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ と $\mathcal{H}$ 上の密度作用素 ρ に対し，$(\mathcal{I},\rho)$ に対する強可測な事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s\in S}$ は常に存在する。

次の条件を考えると上の定理の一般化が可能になる。

Definition 13. (a,b,S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ が条件 *(C)* を満たすとは，単位的正値線型写像 $\Psi:\mathcal{V}_b^*\,\overline{\otimes}\,L^\infty(S,\mathcal{I})\to\mathcal{V}_a^*$ で $\mathcal{I}(M,\Delta)=\Psi(M\otimes[\chi_\Delta])$, $M\in\mathcal{V}_b^*$, $\Delta\in\mathcal{F}$, を満たすものが存在するときをいう。

Theorem 3. 条件 *(C)* を満たす (a,b,S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ と $\rho\in\mathcal{V}_a$ に対し，$(\mathcal{I},\rho)$ に対する強可測な事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s\in S}$ は常に存在する。

本稿では扱っていないインストルメントの完全正値性は重要である [32, 31, 29]。より一般に，作用素代数における完全正値性については [4, 19, 35, 36, 40, 41, 42, 44] などを参照のこと。

VI　状態遷移の圏の例

$a,b\in$ **C*-PS** とし，T を $\mathcal{V}_a$ から $\mathcal{V}_b$ への単位的正値線型写像とする。$(a,b,\{*\})$ に対するインストルメント $\mathcal{I}_T$ を次で定める：

$$\mathcal{I}_T(\{*\})=T \tag{19}$$

T と $\mathcal{I}_T$ は上の対応のもと一対一対応するので，以下では同一視する。

Definition 14. インストルメントの圏とは次からなる：

対象 C*-確率構造 $a=(\mathcal{X}_a,\mathcal{V}_a)$

射 $b\leftarrow a:\mathcal{I}$ は (a,b,S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$。各対象 a に対する恒等射 $a\leftarrow a:1_a$ とは，$(a,\{*\})$ に対するインストルメント $1_a(\{*\})\rho=\rho$, $\rho\in\mathcal{V}_a$, のこと。射の合成はインストルメントの合成に基づく。

Definition 15. $\mathcal{I}',\mathcal{I}$ を (b,c,S'), (a,b,S) に対するインストルメントとする。$\mathcal{I}'$ と $\mathcal{I}$ が合成可能であるとは，$(a,c,S'\times S)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}''$ で

$$\mathcal{I}''(\Gamma\times\Delta)=\mathcal{I}'(\Gamma)\mathcal{I}(\Delta) \tag{20}$$

を満たすものが存在するときをいう。この $\mathcal{I}''$ を $\mathcal{I}'$ と $\mathcal{I}$ の合成という。

Remark 16. 合成可能でない例も知られている *[48]*。

Definition 17 (インストルメントから誘導される遷移確率)**.** (a,b) に対する遷移確率 P が (a,b,S) に対するインストルメント $\mathcal{I}$ から誘導されるとは，$\mathcal{I}$ が条件 *(S)* を満たし，かつ

$$P(\Delta \leftarrow \omega) = \|\mathcal{I}\omega\|(\{s \in S \mid \omega_s \in \Delta\}) \tag{21}$$

が任意の $\omega \in \mathcal{S}_a$ および $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$ に対し成り立つときを言う。

Example 2. 圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{H}}$

ただ 1 つの対象 $a_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), \boldsymbol{T}(\mathcal{H}))$

射 インストルメントから誘導される遷移確率をもつ射（合成でも強合成でも）

Example 3. 圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$

ただ 1 つの対象 $a_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$

射 条件 *(C)* を満たすインストルメントから誘導される遷移確率をもつ射（合成でも強合成でも）

上の 2 つの例はどちらもモノイドになっている。

VII　展望

将来的には

1. 量子場 [1, 15, 16, 17, 43]
2. 局所状態 [47, 27]
3. 圏代数 [37, 38]
4. Schrödinger 描像以外の描像 [2, 5, 29]

Acknowledgements

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] H. Araki, *Mathematical theory of quantum fields*, (Oxford UP, Oxford, 1999).

[2] L. Accardi, A. Frigerio and J.T. Lewis, Quantum stochastic processes, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 97–133.

[3] W. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.

[4] W. Arveson, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math. **123** (1969), 141–224.

[5] V.P. Belavkin, Reconstruction Theorem for Quantum Stochastic Processes, Theoret. Math. Phys. **3** (1985), 409–431, arXiv:math/0512410.

[6] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* Vol.1 (2nd printing of 2nd ed.), (Springer, 2002).

[7] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17** (1970), 239–260.

[8] J. Dixmier, *C^*-Algebras*, (North-Holland, Amsterdam, 1977).

[9] J. Dixmier , *Von Neumann Algebras*, (North-Holland, Amsterdam, 1981).

[10] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 1–23; *ibid.* **15** (1969), 173–200.

[11] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, Local observables and particle statistics, I & II, Comm. Math. Phys. **23** (1971), 199–230; *ibid.* **35** (1974), 49–85.

[12] S. Doplicher and J.E. Roberts, Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. of Math. **130** (1989), 75–119.

[13] S. Doplicher and J.E. Roberts, A new duality theory for compact groups, Invent. Math. **98** (1989), 157–218.

[14] S. Doplicher and J.E. Roberts, Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51–107.

[15] G.G. Emch, *Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory*, (Wiley-Interscience, New York, 1972).

[16] R. Haag, *Local quantum physics: Fields, Particles, Algebras*, 2nd ed., (Springer, Berlin, 2012).

[17] R. Haag and D. Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, J. Math. Phys. **5** (1964), 848–861.

[18] A. Hora and N. Obata, *Quantum probability and spectral analysis of graphs*, (Springer, Berlin, 2007).

[19] E.C. Lance, *Hilbert C^*-modules: a toolkit for operator algebraists*, (Cambridge UP, Cambridge, 1995).

[20] G. Lüders, Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, Ann. Phys. (Leipzig) **8** (1951), 322–328.

[21] M. Nakamura and H.Umegaki, On von Neumann's theory of measurements in quantum statistics, Math. Japon. **7** (1962), 151–157.

[22] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton UP, Princeton, 1955).

[23] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, Open Sys. Inform. Dyn. **10** (2003), 235–279.

[24] I. Ojima, "Micro-Macro Duality in Quantum Physics,"pp.143–161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum*, (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.

[25] I. Ojima and K. Okamura, *Mathematics and Physics of infinite quantum systems*, (in Japanese), (Saiensu-sha, 2013).

[26] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Derivation of Born Rule from Algebraic and Statistical Axioms, Open Sys. Inform. Dyn. **21** (2014), 1450005.

[27] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Local state and sector theory in local quantum physics, Lett. Math. Phys. **106** (2016), 741–763.

[28] K. Okamura, Quantum theory starting from transition probability, RIMS kokyuroku **2010**, (2016) 69–77. http://hdl.handle.net/2433/231579

[29] K. Okamura, Measuring processes and the Heisenberg picture. In: *Nagoya Winter Workshop: Reality and Measurement in Algebraic Quantum Theory*, edited by M. Ozawa et. al., (Springer, Singapore, 2018), pp.361–396.

[30] K. Okamura, Towards a Measurement Theory for Off-Shell Quantum Fields, Symmetry **13**, (2021) 1183. https://doi.org/10.3390/sym13071183

[31] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, J. Math. Phys. **57** (2016), 015209.

[32] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous obsevables, J. Math. Phys. **25** (1984), 79–87.

[33] M. Ozawa, Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics, Publ. RIMS **21** (1985), 279–295.

[34] M. Ozawa, Concepts of conditional expectations in quantum theory, J. Math. Phys. **26** (1985), 1948–1955.

[35] W.L. Paschke, Inner product modules over B*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **182** (1973), 443–468.

[36] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, (Cambridge UP, Cambridge, 2002).

[37] H. Saigo, Category Algebras and States on Categories, Symmetry **13** (2021), 1172. https://doi.org/10.3390/sym13071172

[38] H. Saigo, Quantum Fields as Category Algebras, Symmetry **13** (2021), 1727. https://doi.org/10.3390/sym13091727

[39] H. Saigo, M. Naruse, K. Okamura, H. Hori, and I. Ojima, Analysis of Soft Robotics Based on the Concept of Category of Mobility, Complexity **2019** (2019), 1490541. https://doi.org/10.1155/2019/1490541

[40] M. Skeide, Generalized matrix C*-algebras and representations of Hilbert modules, Math. Proc. Royal Irish Academy, **100A** (2000), 11–38.

[41] M. Skeide, Hilbert modules and applications in quantum probability, Habilitationsschrift, (Cottbus, 2001). Available at `http://web.unimol.it/skeide/_MS/downloads/habil.pdf`.

[42] W.F. Stinespring, Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 211–216.

[43] R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, (Princeton UP, Princeton, 2000).

[44] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, Berlin, 1979).

[45] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*, (Springer, Berlin, 2003).

[46] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, Tohoku Math. J. **6**(2) (1954), 177–181.

[47] R. Werner, Local preparability of states and the split property in quantum field theory, Lett. Math. Phys. **13** (1987), 325–329.

[48] J.D.M. Wright, Products of positive vector measures, Quart. J. Math. Oxford (2), **24** (1973), 189–206.