図形ソフトは証明になりうるか

生涯学習数学研究所　渡辺信
longlifemath@gmail.com

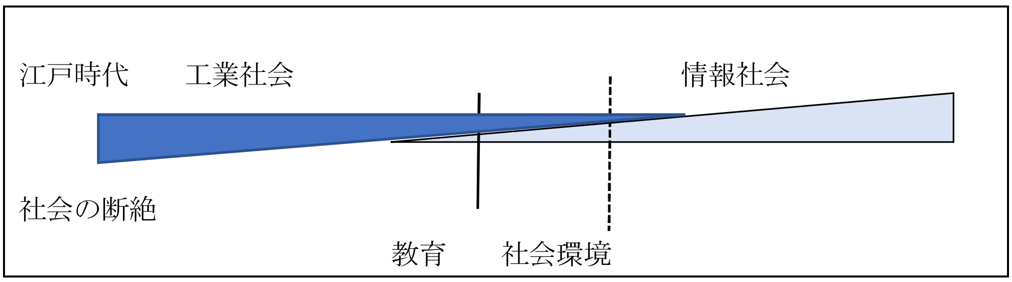
1.　数学教育の過度期

(1)工業社会から情報社会へ

技術の変化は社会を変える。工業社会から情報社会の変化はコンピュータによってなされた。そして、この変化の最先端にはアメリカ社会がある。産業革命に始まった機械技術の発展はイギリスから始まり、イギリスの学校制度の改革は日本に取り入れられ、工学部を作り出した。工業社会にふさわしい人材育成が学校に求められ、現在の学校制度は工業社会によって改革を続けた。日本の社会変化は情報社会からは遅れて後を追うことになった。この後れを取った原因については歴史が明らかにするであろうが、明治期に日本人の計算術の優秀さが工業社会への移行を後押ししたが、その計算術が計算機への期待を遅らせたとも考えられる。日本が植民地にならずに工業社会へと移行したのは日本人の誇る計算術であったならば、今回の改革の遅れは計算技能の過信にあった。

学校教育においては「数学教育現代化」の失敗の後、日本の数学教育は基礎基本として計算技能に固着した結果、数学教育には電卓も使わない数学教育がなされたが、世界の数学教育では計算技能は電卓に委ねていた。この段階から情報社会への移行がなされていたことは興味深い。アメリカ社会での高校生の数学嫌い解消はシカゴの高校の先生の提案からコンピュータを使う方向へと積極的に動き出した。コンピュータが一般化される以前であり、数学教育に『グラフ電卓』を導入しTeachers, Teaching with Technology（T^3）による社会運動がおこった。『グラフ電卓』が日本の技術によって作り出されたが、その技術を学校教育が利用することはなく、アメリカ社会によって数学教育の情報社会への改革がなされたことは残念であった。数学教育の情報社会への改革は日本deは50年遅れて、GIGAスクール構想や大学共通入学テストが出発した。この変化によって数学にも『伝統的な数学』からの脱皮が見られても不思議ではない。

社会は工業社会から情報社会へと変化



(2)学習指導要領 vs GIGAスクール構想

現行の学習指導要領は高校生は改善がなされて高校1年生まで進んだ。この改革と並行するようにGIGAスクール構想も行われ情報機器活用に動き出した。学習指導要領は『伝統的な数学』で電卓すら使わない。一方、GIGAスクール構想では積極的に情報思考を推進し、内閣府が提唱する第5次科学技術基本計画にのっとって、日本のSociety5.0の動きの中に位置づけられている。工業社会の最

先端を行く学習指導要領と、情報社会の数学教育を推し進めるGIGAスクール構想が併存している現在の数学教育はまさに過度期なのであろう。この動きの中で現在の学校教育はあくまでも学習指導要領にのっとった教育がなされているが、今年度の大学入試センターが行った大学共通入学テスト問題は将来を見据えた情報思考から出題された。この違いの犠牲になったのはこの試験の受験生であり、将来の日本を背負う若者であった。すうがくきょういくからみたならば、数学嫌いを作り出した悲劇でもあった。

大学共通入学テスト問題によって、何が違うのかをながめてみたい。数学１・Ａの問題の不定方程式は現在の電卓すら使わない学習指導要領のもとで学ぶ生徒にとっては面倒な計算を電卓なしで解かなくてはならなかった。

問題

5^4＝625 を 2^4 で割ったときの余りは１に等しい。このことを用いると、

不定方程式 5^4x-2^4y＝1・・・①

の整数解のうち、ｘが正の整数で最小になるのはｘ＝ア、ｙ＝イウであることが分かる。

また、①の整数解のうち、ｘが２桁の正の整数で最小になるのはｘ＝エオ、ｙ＝カキク

（以下省略）

答は次の表計算ソフト（エクセル使用）から、x=ア=1、y=イウ=39、x=エオ=17、y=カキク=664 とわかる。

x	5^4*a-1	B/2^4
1	624	39
2	1249	78.0625
3	1874	117.125
4	2499	156.1875
5	3124	195.25
6	3749	234.3125
7	4374	273.375
8	4999	312.4375
9	5624	351.5
10	6249	390.5625
11	6874	429.625
12	7499	468.6875
13	8124	507.75
14	8749	546.8125
15	9374	585.875
16	9999	624.9375
17	10624	664

表計算ソフトで問題を解く

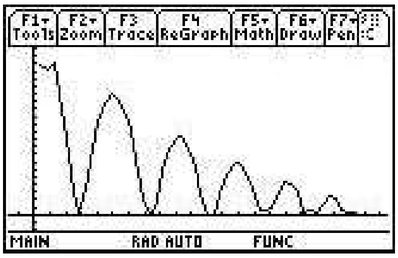
int(c)	c-d	e*2^4
39	0	0
78	0.0625	1
117	0.125	2
156	0.1875	3
195	0.25	4
234	0.3125	5
273	0.375	6
312	0.4375	7
351	0.5	8
390	0.5625	9
429	0.625	10
468	0.6875	11
507	0.75	12
546	0.8125	13
585	0.875	14
624	0.9375	15
664	0	0

あまりについて考えることによって発展問題発見

この計算を電卓なしで行うことは困難である。しかし、1行目の簡単なプログラムを組むことは、情報思考の初歩である。問題作成者にとってはこの問題は最も易しい一般的な考え方であり、だれもができる問題と考えたかもしれない。このような数学に対する考え方の違いはTechnology活用による『伝統的な数学』との決別を意味している。また、表計算ソフトの結果から次に整数解が表れるのは、あまりが0から16であり、次の会は17番目を見ればよいことが分かる。この問題ではあまりが整然と並んでいることが見えるので発展的な問題が作れそうである。このような違いを『証明の方法』について考えたい。

2．『伝統的な数学』に影響を及ぼすTechnology活用

数学技能はほとんどが Technology によって置き換わった。この Technology の活用は数学の世界を広げ、創造性育成に数学教育の役割が変化した。また、新しくセンサーの開発は自然界の現象をデータによって見ることができる。このデータによって見ることの世界は、我々が学んでいる数学でできていることを知ることができた。17 世紀、ガリレオが望遠鏡で覗き見た世界は全く見ることができなかった世界を、『自然という書物は数学の言葉で書かれている』と驚異的に語った。現在のコンピュータの活用によるデータで見る世界も、『自然という書物は数学の言葉で書かれている』と言わざるを得ない。ほとんどの数学技能は Technology に置き換えられ、そして残る技能は『証明技能』も Technology によって置き換える可能性がある。『証明』は数学知識の納得であり、『伝統的な数学』な数学証明も Technology によって置き換えられることも必然的であると考えられる。



ボールの落下運動をデータで眺めたときに、我々が学ぶ放物線を見て取れる。ボールが落ちる現象を見てもそこには数学を見ることができない。しかしデータによって見るボールの現象は放物線が見えることによって、現在の学校教育の数学の素晴しさを見ることができる。この認識によって数学を学ぶことの意義と数学の大切さを感じ取ることができる。データが真理を語る時代になった。

数学技能は Technology によって置き換わる

計算技能	方程式を解く・式の値を求める
測定技能	長さ・面積・体積・角度を求める
作図技能	
統計技能	
整理技能	分類分け
表現技能	関数のグラフを描くための微分
証明技能	証明をする
Technology 使用なし	

Technology で置き換かわる技能	
計算技能	
測定技能	
作図技能	
	データサイエンス・AI
表現技能	グラフ表見
	「証明は死んだ」
Technology 活用	

『伝統的な数学』な数学証明は論理的になされ、その証明の正しさが数学知識を保証する。証明された数学知識はだれもが納得していけ入れる。しかし、最近解決された未解決問題「フェルマーの定理」の論理的な証明はだれもがその証明を理解できるはずがない。この論理的証明の存在が「フェルマーの定理」を納得できるのであろうか。Technology によって、ある数Ｎまでは正しいことのほうが納得性がある。ある数Ｎまでの具体的実験では数学にはならないという『伝統的な数学』な数学に固着することではなく、数学に対する態度が変わり地代が来ていると思う。証明技能は Technology によって置き換えられないと思うことは『伝統的な数学』な数学の世界から変わることができないことを表している。Technology によって納得できる数学証明と名何を意味するのであろうかが問われる。

ビックデータ（参考）
ビッグデータとは、データの量、データの種類、データの発生頻度や更新頻度からなるデータ軍のことで、一般的なデータ管理システムで扱うには困難なほどの巨大なデータの集合です。このビッグデータは日々リアルタイムに更新され続けており、それらを解析していくことでこれまでにない新たな仕組みを生み出すことに役立つと期待されています。事業の拡大に役立つ膨大なデータとして重要視されているビッグデータは、業務フローの最適化やコスト削減、売上予測や問題や課題の特定に役立つとされており、産業成長でとても重要です。効果的にビッグデータを利用することで、売上を伸ばした企業も多く、現在では中小企業もビッグデータを活用する例も多くなってきました。
（第５期科学技術基本計画　内閣府）

３．　四色問題の証明は『伝統的な数学の証明』からTechnology世界へ

昭和53年一松信『四色問題』が出版された。アッペル・ハーケンの証明が発表されてすぐに書かれた。この本の最後にはアッペル・ハーケンの論文に載った1834個の可約配置の図を16ページに書き添えた。それから44年後、新訂版が出版された。約40年の経過は著者の四色問題に対する『証明』についての計算機の観点からの記述と、「数学的証明とは何なのか」を考えることによってアッペル・ハーケンの証明を問い直し、数学の未解決問題は、積極的に計算機を用いる立場に立って再度検証することとし、「計算機による数学の定理の証明」の意義に重点を置いた。

永い間、未解決の数学の万問として有名であった四色問題は、1976年の夏、ついにイリノイ大学の二人の数学者、K･アッペルとW･ハーケンによって解決された。しかし、それは計算機による膨大な検証という、変わった方法によるものであった。一体、従来の数学の常識とは、どこが、どう変わっていたのであろうか？
本書では、四色問題の誕生から最終的解決に至るまでの120年あまりの研究史をたどり、先人たちの苦闘の跡をながめ、あわせて計算機による数学の定理の証明の意味を考察する。

本の題名「四色問題」は変わらないが、その副題が変化している。はじめは『その誕生から解決まで』とあったが、新版では『どう解かれ何をもたらしたのか』に改まった。そして最後の章「解決の余波」が大幅に書き改められ、副題が『怪物は倒したが…』が『計算機による証明の意義』となった。

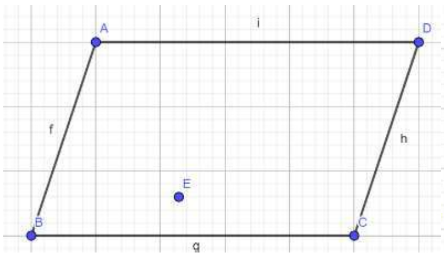
数学的証明とは何か　数学の未解決問題として有名であった四色問題は、1976年の夏、イリノイ大学の二人の数学者、K･アッペルとW･ハーケンによって解決された。しかし、それは計算機による膨大な検証という、従来の数学の証明法とは全く異なるものであった。四色問題の誕生から最終的解決に至るまでの先人たちの苦闘の歴史を踏まえ、計算機に依存した現代の数学的証明の意義を改めて考える。

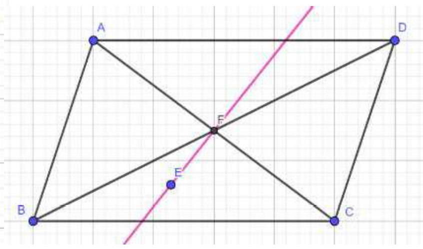
この表紙裏に書かれた内容紹介において、四色問題の歴史を扱った部分は同じでも、計算機による証明についての扱いが違う。この四色問題の証明についての J･ホーガン「証明は死んだ」が一松信の訳で 2010 年に日経サイエンスに載った。この訳では計算機による数学の証明を積極的に評価された。四色問題の証明は美しさがないと見ることによって、いまだにエレガントな証明（伝統的な数学証明）を求めるとも言われている。４色問題の K･アッペルと W･ハーケンによる証明は、計算機による証明として画期的であった。しかし、この証明に対して懐疑的である伝統的な数学の立場に立つ人々はいまだに認めがたいと考えている。証明とは『納得できるか』が問われているのであろう。

4. 『伝統的な証明』からTechnology活用の新しい納得性を見る

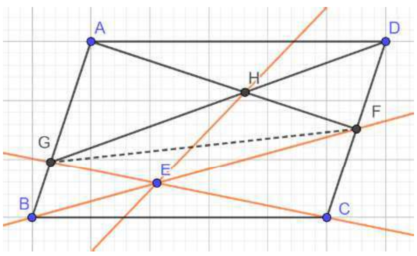
問題　平行四辺形の内部の点 E を通り、この平行四辺形の面積を 2 等分する直線を引きなさい。

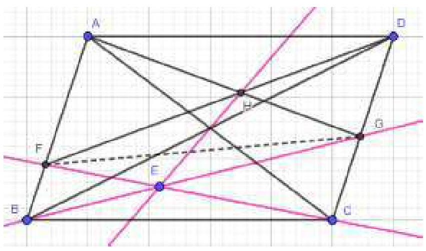
この問題の解答は平行四辺形の対角線の交点(重心)を通る直線を解答とした。





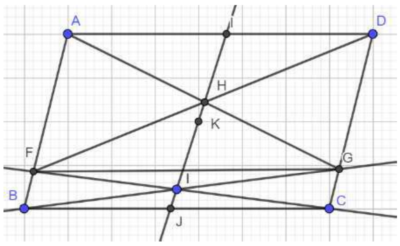
しかし、解答の中に平行四辺形の交点を用いない解法が表れた。図を描いてみると解答者の直線は正しいと思われる。





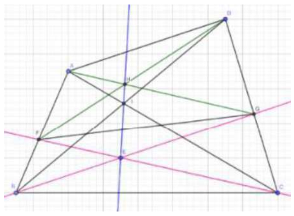
普通に考えれば重心を求めて、直線を引くことになるが、この解答者の直線EHは正しいのであろうか。この直線EHが平行四辺形の対角線の交点を通ればよい。

四角形の対角線の交点を結び直線が、はじめの四角形の辺との交点を I,J とするとこの線分の中点 K は不動点であることがわかる。
この不動点の意味はこの点 K は初めの平行四辺形の対角線の交点であることがわかる。この不動点 K によって直線は平行四辺形の重心を通る。



この新しく作られた四辺形は平行四辺形とは限らない場合に拡張したい。この問題を数学ソフト GeoGebra で解いてみた。一般の四角形でも対角線の交点を通ることがわかる。しかし、この問題で出てくる誤差をどのように評価するかが問題となる。

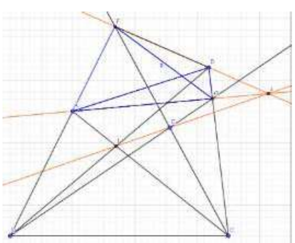
問題
任意の四角形 ABCD の内部に点 E をとる。点 E が対角線の交点になる四角形 FBCG を作る。四角形 AFGD の対角線の交点を H としたとき、点 E の位置によらず、直線 EH は必ず四角形 ABCD の対角線の交点 I を通る。



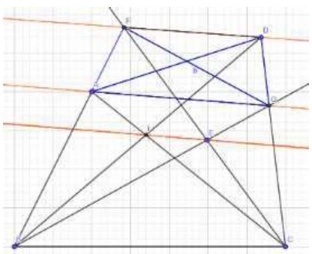
おそらくこの段階では、これは証明になりうるかが問われる。特に現在の『伝統的な数学』の意識が強い社会においては認められないと考えるに違いない。この問題については解析幾何的な計算力によって示すこともできる。ここでは計算の記録は省略するが、計算をできるだけ簡略化するために、斜交座標を用いて計算をした。この問題が成り立つことを GeoGebra によって確かめることができる。
点 E を動かしてみると初めに与えられた四角形の対角線の下の部分では直線 EH は点 I を通るように見える。この問題は美しいのですでに解決済みであろう。

そこで特殊な位置では成り立っていても、一般の位置にあるすべての四角形について確かめてみる。一般論として成り立つかを試さなければ、この問題から定理は作れない。

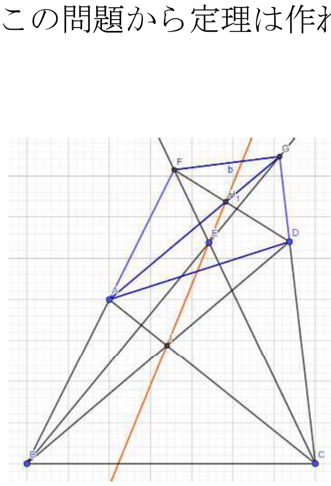
いろいろな四角形について
点 E の位置について
この問題が成り立っているかを見ることが求められる。



対角線 AG,FD が外側で交わる



平行線になる

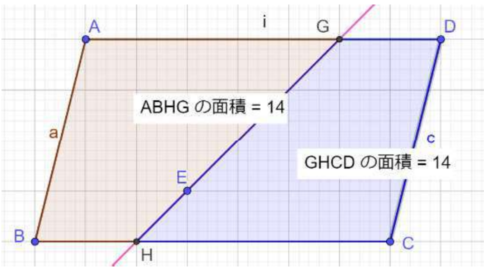


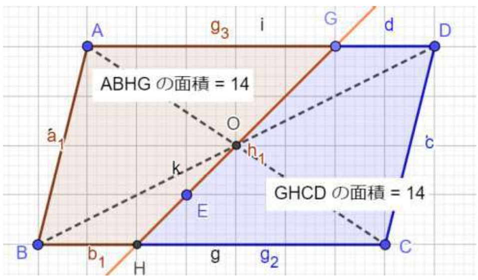
点 E が四角形の外にある

これは証明になりうるか？
　図形を移動することによってすべての場合、一徳線上にあることが分かる。
この結果、3 点が直線上にあることが分かる。

　証明は数学知識の納得性であるならば、次の測定による数値を見ることによっても可能性がある。Technology の活用により、論理的な説明をする必要がない。測定による解法は面積測定をして等しい場所を見つける。

　辺 AD 上の点 G を動かし GH が面積を 2 等分している。この直線が平行四辺形の対角線の交点 O を通ることも見てわかる。これは任意の点 E を通り平行四辺形を 2 等分する辺として認めることができる。計量革命においても Technology が大きな役割をしている。見えないものを見ることができるようになった Technology 活用が『伝統的な数学』から新しい方向へと数学の世界を広めている。

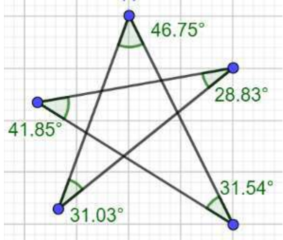


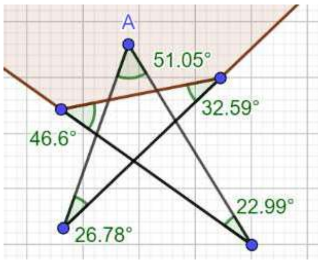


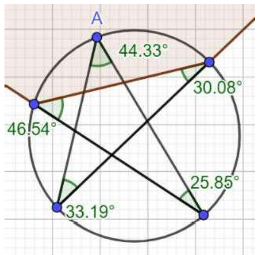
5.　数学教育は創造性育成

　よく知られていることを図形ソフトを使って描いてみる。その図を動かしながら面白そうな性質を探してみた。まだ知られていないかもしれないことを探し出すことは問題発見になるかもしれない。すでに既知な事柄であっても、知らないことを追いかけることは楽しい。数学の世界が広がっていくことを体験できる。そしてこの性質･規則を探すことは、すでに答えがある与えられた問題を解くこととは違う。数学教育では Problem Solving (問題解決)が重要な課題であったが、数学ソフトを使うことによって、いろいろと考えを膨らませることが出来そうである。この考える過程を創造性と定義したい。結果が出なくても、もし発見できたことが論理的に証明できなくても数学を考えることの楽しみがある。この楽しさを今までの数学ではきちんと結果を出さなくては数学を考えたとは認められないが、考えることの過程を重視したい。この考える過程が追い求められることは、図形ソフトが有用である。

よく知られていること　　図形ソフトで動かす　　新しい発見
星形5角形の内角の和は180→点Aを動かしても内角の和は変わらない→すべての点は円周上に乗る



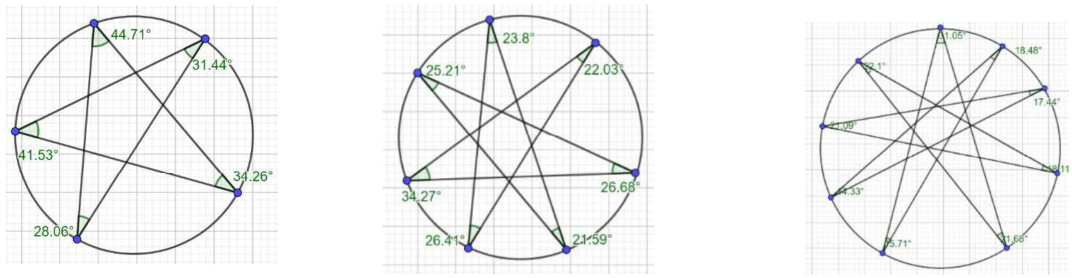




$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180^\circ$　　点Aが動いても内角の和不変の部分　　5点は円周上に乗る

この新しい発見（おそらくすでに分かっていることかもしれない）を何かに使えないであろうかを考えたい。星形多角形の内角の和は常に180°であるのかを考える。数学ソフトでは測定機能を持っているので特別な定理を作る必要はない。

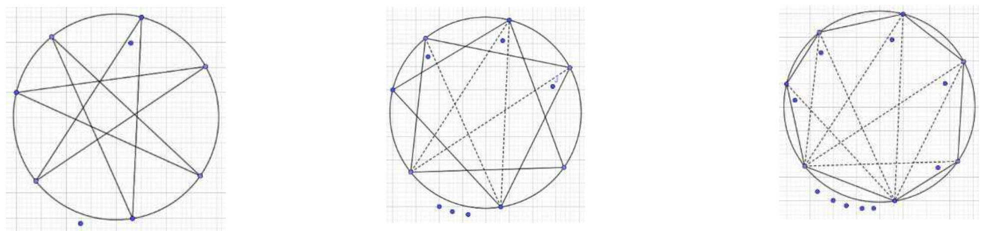
5角形　　7角形　　9角形



この上の円周角はどこでも1つだけで円周角の和として180°になる

この図を眺めながら、円周角の問題と角度が関係していることが予想できそうである。数学が演繹的であることから帰納的な思考へと変化する。演繹的な数学では常に出来上がった体系を与えられているが、この帰納的な思考によって、数学を作りだす可能性がある。

円周上の円周角の個数×180°



円周角１個×180° =180°　　円周角３個×180° =540°　　円周角1個×180° =900°

この考え方「円周上の円周角の個数×180°」は内角の和を求めることができる。この先はどのようになるのかは分からない。今までの数学教育であれば、問題が解けることが重要であったが、創造性育成として、方向性が決まっているのではなく数学を作り出すことが求められる。数学構築のためには図形ソフトの補助が必要であり、考える楽しさが体得できる。

6.　Technologyを用いた数学

情報社会はコンピュータ技術の発展がもたらした社会であり、工業社会を大きく変えた。数学教区では「統計」が重んじられた。特にデータの分布のバラツキが重視されている。このばらつきは今までは分散・標準偏差で数値買われているが、箱ひげ図によって「見る」ことができる。ビック･データによって『データが真理を語る』時代を迎えたことは大量のデータを処理できることが可能になったことが大きな原因である。今までの技能重視の数学教育が、コンピュータによって技能処理が可能になったことから、大きく変化するに違いない。そしてこの変化は証明についても変化が表れる。

工業社会では知識重視が掲げられていたが、情報社会においては覚えることではない社会で『考える』ことが重視される。問題解決における創造性育成から、問題を作りだす創造性へと変化する。この活動の中で、伝統的な数学思考からの脱却が求められている。Technologyによって数学機能が置き換わり、だれでも・いつでも・どこでもTechnologyが使えるときに、数学学力評価は「計算技能の習得」から「豊かな数学問題作成」へと移行した。使えるものは積極的に活用するときに、伝統的な数学から、まだ見えない数学へと変化している。この変化の中で、数学証明も変わる必然性がある。

謝辞　この発表論文は京都大学の国際共同利用・共同研究センターの数理解析研究所のサポートを受けました。

7.　参考文献

(1) 一松信 (1978)「四色問題　その誕生から解決まで」講談社 BLUE BACKS B351

(2) 一松信 (2016)「四色問題　どう解かれ何をもたらしたのか」講談社 BLUE BACKS B1969

(3) 津田一郎 (2921)「数学とはどんな学問か？」講談社 BLUE BACKS

(4) 渡辺信 (2021) 継続する数学思考の重要性　数理解析研究所講究録 2208　P97-106

(5) 大学入試センター (2022) 2022 年度大学共通入学テスト問題数学Ⅰ・A

(6) S.Watanabe (2022) What is Mathematics with Technology?　J-STAGE, Vol.37, No.1. P.15-18

(7) S.Watanabe (2022) What is Activity of Creative Thinking International Journal of Research on Mathematics and Science Education MSE Vol.10 (Preprint)