数論を楽しむための計算パズル

東海大学・理学部　前田　陽一
Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

1　はじめに

本稿では、四則演算を習った小学生が数学を楽しめる計算パズルをいくつか提案する. 素数 p を法とする剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は, 位数 $p-1$ の巡回群になる. 正 $(p-1)$ 角形の頂点に数字を並べると, 対頂点の和が p になるなど, 面白い性質が見えてくる. これを「素数の絵」と称して, 計算パズルにしてみた. また, 乗法群 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ などの既約剰余類群の中に含まれる, 位数 2 の元を取り出すと, 興味深い計算パズルを作ることができる. 誰でもできて, 正解が自分自身で確認できる計算パズルを解くことによって, 数論の魅力を感じ取ってもらい, 数論を勉強してみたくなるようなものが提供できれば, というのが本研究の動機である.

2　素数の絵を用いた計算パズル

2.1　素数の絵

素数 p の絵というのは, 既約剰余類環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の元を円上に並べたものである. 図 1 は, 素数 7 と素数 11 の絵である. 描き方は簡単で, それぞれ原始根 r を一

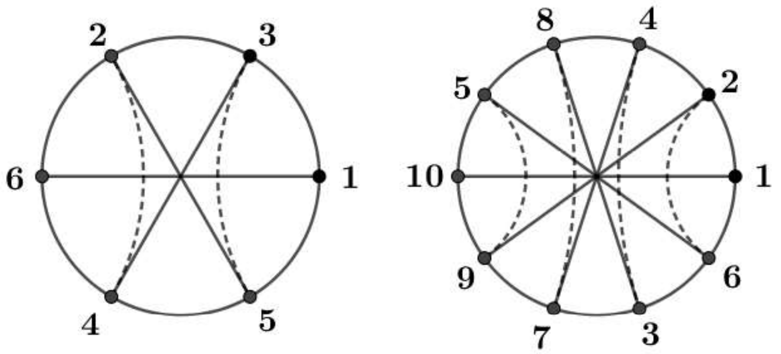

図 1: 素数 7 の絵 (左) と, 素数 11 の絵 (右)

つ選んで, $1, r, r^2, r^3, \cdots, r^{p-1}$ という順番で, 正 $(p-1)$ 角形の頂点に反時計回りに配置するだけである. 図 1 では, 素数 7 の場合は原始根 3 を, 素数 11 の場合は原始根 2 を選んである. このように配置すると, 少なくとも 2 つのことが成り立つ. 1 つは, 対頂点の和

が素数 p になることである．もう 1 つは, 点線の円弧の両端にある 2 つの数字の積は法 p で 1 になることである．この 2 つの事実を念頭に原始根の冪を配置していくと, 計算間違いがないかをチェックしながら数字を配置していける．上半分の数字を配置して, 1 の対頂点に $p-1$ がくれば, ここまでの計算は合っていると思ってよい．下半分の数字は, 対頂点の数字を横目で見ながら計算するとよい．もちろん, 直接, 対頂点の数字を p から引いてもよい．数字がすべて入ったら, 今度は点線の円弧の両端にある 2 数の積を計算して, すべての数字が p を法として 1 になっていることを確認して, 図が間違いなく完成したことを確認できる．

図 2 は, $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$ の積の表と, 素数 7 の絵を比較したものである．2 つの数の積の構造は,

$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

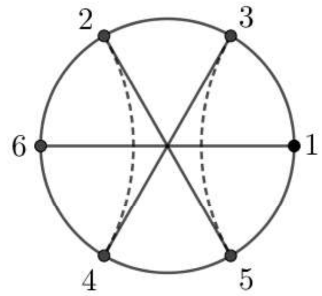

図 2: $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$ の積の表と, 素数 7 の絵

素数の絵から求めることができる．素数の絵にある円を, 複素平面上の単位円と思って, 複素数の積（偏角の和）と考えればよい．筆者の経験では, 積の表を何回書いても, 積の構造がわかった気になれなかったが, 素数の絵を描いてみて, 初めて積の構造が体得出来た気がした．表を作る作業は, 演習問題としては 1 回やれば十分であり, 素数の絵を描く方が手軽で楽しい．素数の絵に, 如何に情報が圧縮されており, 使い勝手が良いかを教えた方が教育的効果が高いと思われる．

2.2　素数パズルの教育的効果

付録 (図 9) に, 実際に用いたパズルを載せているので, 興味のある方は楽しんでみていただきたい．計算方法を理解してもらうために, 徐々に空欄を増やしてある．東海大学理学部数学科の 2 年生にパズルを解いてもらい, アンケートに答えたもらった (表 1)．実施した授業科目は, 「計算機数学序論 A」という講義で, 内容はプログラミング言語 python の入門である．授業の中でフェルマーの小定理を扱うことがあり, その講義に合わせて, 自由課題としてやってもらった．受講者数は, 例年 80 名程度, そのうち約半数の学生がアンケートに答えてくれた．選択する項目はこちらであらかじめ決めてあり, 複数選択可とした．パズルの解き方について事前に説明をしていないので, やり方がよくわからなかった学生が数名いたが, おおむね好意的な反応が得られた．他の素数でもやってみたという学生もおり, 手ごたえを感じることができた．

表 1: 計算パズルのアンケート結果

項目（複数回答可）	2021 年	2022 年
やり方がよくわからなかった	6	5
おもしろくなかった	1	0
おもしろかった	25	19
ふしぎだった	17	22
仕組みが知りたくなった	12	15
整数論というイデアの世界を垣間見た気がした	12	4
こういう数学がしたかった	6	5
他の素数でもやってみた	6	2
難しすぎて自分には楽しめないと思った	3	1
その他（上記の項目以外）	2	2
回答総数	43	34

一般に, 素数 p に対して, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の原始根は $\varphi(p-1)$ 個ある ($\varphi(n)$ はオイラーの totient 関数). r が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の原始根であれば, $(m, p-1) = 1$ となる m に対して, r^m は原始根である. したがって, 素数 p の絵は $\varphi(p-1)$ 個存在することになる. 1 つの素数の絵を描く

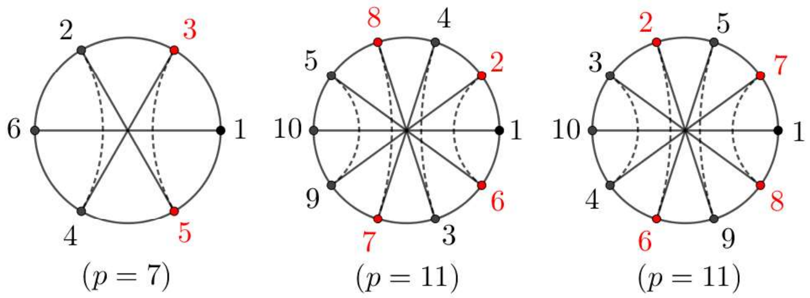

図 3: 複数の素数の絵と原始根

と, 他の原始根は簡単に見つけることができる. 見つけ方は簡単で, 例えば, $p = 11$ の場合なら, 素数の絵は正 10 角形であり, 10 と互いに素な数, 1, 3, 7, 9 に対して, r^1, r^3, r^7, r^9 が原始根となるので, 原始根が, 2, 6, 7, 8 であることが読み取れる. このように, 素数の絵は意外と便利である. また, 1 つの素数に対して, いくつもの計算パズルができるのもよい. 素数の絵を作ろうと思ったら, 最初に原始根を 1 つ見つける必要があるが, 1 つ見つける作業が意外と楽しかったりする. 1 つ見つけてしまえば, あとは自動的にすべての原始根がわかるのが面白い.

3　位数 2 の元を用いた計算パズル

前章では, 素数 p に対して $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の構造を絵にした. この章では, 正整数 m に対して $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ の構造の一部に注目して, 計算パズルを考えてみたい. 正整数 m の素因数分解を $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ とするとき,

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z})^\times \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_n^{e_n}\mathbb{Z})^\times$$

と直積分解できる ([1] p.38, [2] p.118, [3] p.162). 注目するのは, 位数が 1, 及び 2 の元がなす部分群である. 以下, 実例で見て行こう.

3.1　$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル

$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ は, 位数 2 の元を 3 つ含んでいる. $a = 3$ と $b = 5$ を生成元として, 図 4 の左図のように正方形状に描くことができる. この群から単位元を

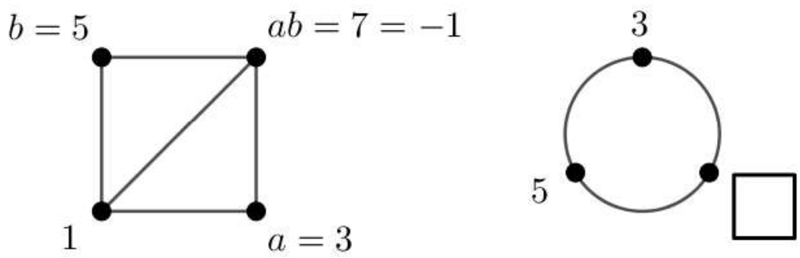

図 4: $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7\}$ の形と, その計算パズル

除くと, 図 4 の右図のような簡単な計算パズルができる.

$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル

円上の 3 つの数字のうち, 2 つの数字を選んで, その積を 8 で割った余りは, 選ばなかった第 3 の数字と等しくなる. その数字は?　　　　(答え：7)

このようなパズルは, 直積分解を使うと他にも作ることができる. 奇素数の 4 倍, または, 2 つの異なる奇素数の積ならよい. 例えば,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times &= \{1, 5, 7, 11\}, \\
(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times &= \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\} \supset \{1, 4, 11, 14\}, \\
(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times &= \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\} \supset \{1, 9, 11, 19\},
\end{aligned}$$

などが挙げられる.

3.2　$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル

前節の $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ は正方形の形をしていたが, 立方体の形をした群として, $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$ が考えられる.

$$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times = \{1,5,7,11,13,17,19,23\} = \{\pm1,\pm5,\pm7,\pm11\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,$$

である. 位数 2 の 3 つの生成元を, a, b, c（例えば, $a=5, b=7, c=13$）とすると, 図 5 の左図のように立方体上に群が描ける. この立方体を単位元 1 から視た図が図 5 の中図で, 6 本の線分と 1 つの円からなる図形である. 各線分上の 3 点と単位元を合わせた 4 点で, 位数 4 の部分群ができる. また, 中央の円上の 3 点と単位元を合わせた 4 点でも位数 4 の部分群ができる. この図を用いて計算パズルにしたものが, 図 5 の右図である.

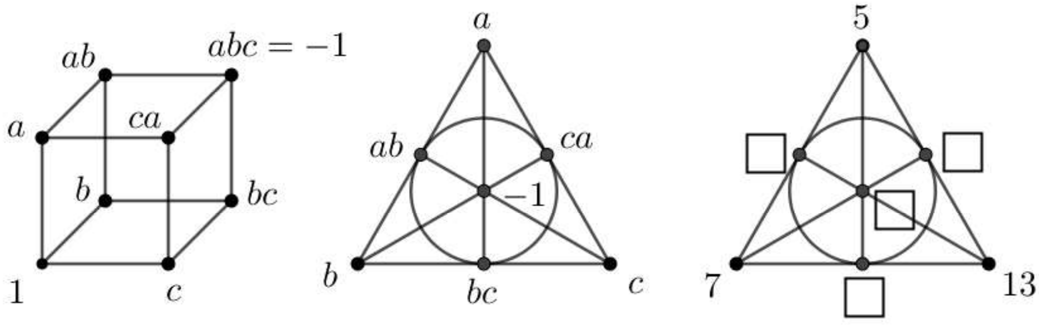

図 5: $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の形, その立体射影と, その計算パズル

$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル

線分上や円上の 3 つの数字のうち, 2 つの数字を選んで, その積を 24 で割った余りは, 選ばなかった第 3 の数字と等しくなる. 空欄に数字を書きなさい.

(答え：円上左上から反時計周りに, 11, 19, 17, 中央 23)

このようなパズルは, 直積分解を使うと他にも作ることができる. 奇素数の 8 倍, 異なる 2 つの奇素数の積の 4 倍, または, 3 つの異なる奇素数の積ならよい. 例えば,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{Z}/40\mathbb{Z})^\times &\supset \{1,9,11,19,21,29,31,39\},\\
(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^\times &\supset \{1,11,19,29,31,41,49,59\},\\
(\mathbb{Z}/105\mathbb{Z})^\times &\supset \{1,29,34,41,64,71,76,104\},
\end{aligned}$$

などが挙げられる.

3.3　$(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル

この節では, もう1次元上げた計算パズルを紹介する. 4次元立方体の形を含む群として, $(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ が考えらえる.

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times &\supset \{1, 11, 19, 29, 31, 41, 49, 59, 61, 71, 79, 89, 91, 101, 109, 119\} \\
&= \{\pm1, \pm11, \pm19, \pm29, \pm31, \pm41, \pm49, \pm59\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4,
\end{aligned}
$$

である. 位数2の4つの生成元を, a, b, c, d（例えば, $a = 19, b = 59, c = 29, d = 11$）とすると, 4次元立方体上に群が描ける. この4次元立方体を単位元1から視た図が図6の左図である. この図を用いて計算パズルにしたものが, 図6の中図である.

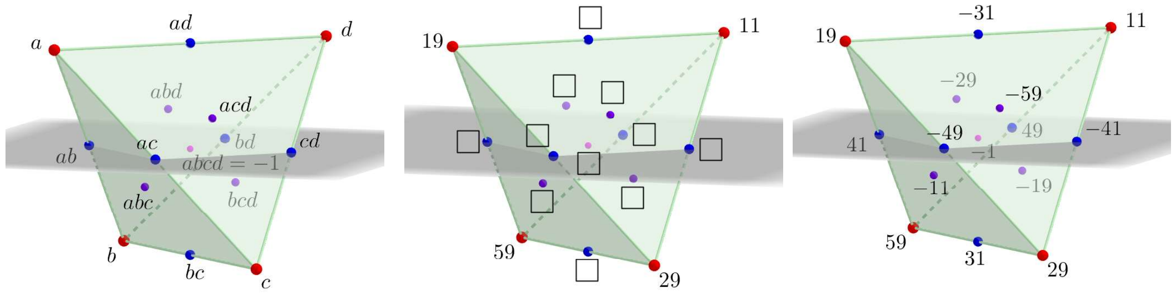

図 6: $(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times$ の立体射影, その計算パズルと, 計算パズルの解

$(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル

正四面体の頂点, 辺の中点, 面の中心, 重心にある空欄に, 次の条件を満たすような数字を書きなさい. 一直線上にある3つの数字のうち, 2つの数字を選んで, その積を120で割った余りは, 選ばなかった第3の数字と等しくなる.　(答え：図6の右図)

このようなパズルは, 直積分解を使うと他にも作ることができる. 異なる2つの奇素数の8倍, 異なる3つの奇素数の積の4倍,　または, 4つの異なる奇素数の積ならよい. 例えば,

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{Z}/168\mathbb{Z})^\times &= \{1, 13, 29, 41, 43, 55, 71, 83, 85, 97, 113, 125, 127, 139, 155, 167\}, \\
(\mathbb{Z}/420\mathbb{Z})^\times &= \{1, 29, 41, 71, 139, 169, 181, 209, 211, 239, 251, 281, 349, 379, 391, 419\},
\end{aligned}
$$

などが挙げられる. また, 3次元空間では描くのが難しいが, 奇素数をかけ合わせるといくらでも高い次元の立方体を作ることができる. 5次元立方体の例としては,

$$
(\mathbb{Z}/840\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \supset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5
$$

がある.

3.4　ねじれの入った計算パズル

最後に, 計算ルールを少し変えたパズルを紹介しよう.「線分上の 3 つの数字のうち, 2 つの数字の積に, 選ばなかった第 3 の数字を加えると, 与えられた法 n の倍数になる」というルールでのパズルである. $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の例で作り方をみてみよう. その方法は簡単で, 図 5 の中図の点の数の符号をマイナスに変える (図 7 左図). それを, $abc=-1$ で整理したものが図 7 の中図である. 中図の三角形の底辺の ca, a, ab に注目すると,

$$ca \cdot ab + a = bc + a = -a + a = 0 \pmod{24}.$$

このように考えると, 図 7 の右図のような計算パズルを作ることができる.

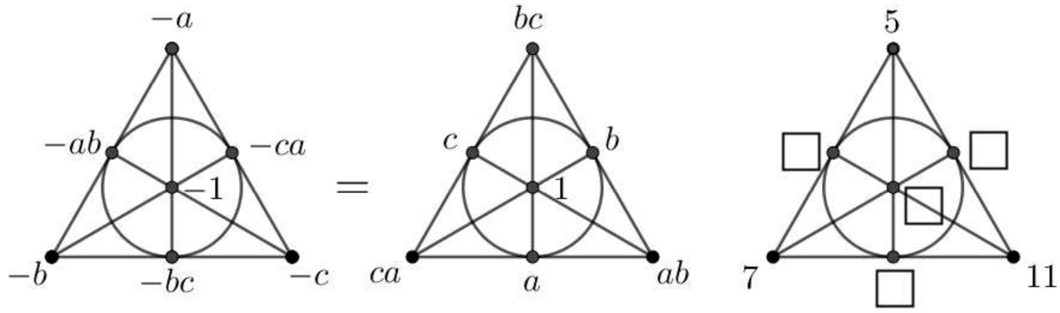

図 7: $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の立体射影の変形と, その計算パズル

$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル (ねじれバージョン)

線分上や円上の 3 つの数字のうち, 2 つの数字を選んで, その積に選ばなかった第 3 の数字を加えると, 24 の倍数になる. 空欄に数字を書きなさい.

(答え：円上左上から反時計周りに, 13(=-11), 19(=-5), 17(=-7), 中央 1)

同様の考え方で, $(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times$ をねじった計算パズルも作ることができる (図 8 左図).

$(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル (ねじれバージョン)

正四面体の頂点, 辺の中点, 面の中心, 重心にある空欄に, 次の条件を満たすような数字を書きなさい. 一直線上にある 3 つの数字のうち, 2 つの数字を選んで, その積に選ばなかった第 3 の数字を加えると, 120 の倍数になる.　(答え：図 8 の右図)

4　教育への取り組みと今後の課題

素数の絵は, 授業で取り上げたり, オープンキャンパスでも紹介した. 難しい内容ではないが, 数の不思議さを簡単に味わえるのでとても役に立っている. 将来的には, JavaScript

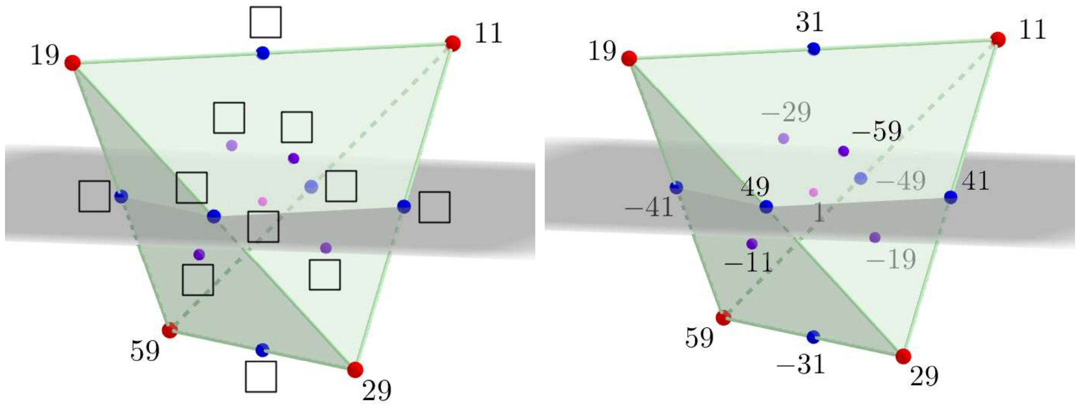

図 8: $(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^\times$ の計算パズル (ねじれバージョン) と, その解

で Web アプリを作りたいと思っている．GeoGebra を用いて, 素数の絵を実際に書いてもらうワークショップを, 中高生を対象とした東海大学学園オリンピックでも実験的に行った．パズルを解く側から, パズルを作る側になっていろいろ工夫できると, より数論を楽しめるようになると思う．この方向で, いつか平方剰余の相互法則を計算パズルにできないか, と思いを巡らせている．

参考文献

[1] 藤崎源二郎, 森田康夫, 山本芳彦：『数論への出発 [増補版]』, 日本評論社, 2004.

[2] 山本芳彦：『岩波講座　現代数学への入門 数論入門 1』, 岩波書店, 1996.

[3] 雪江明彦：『整数論 1 初等整数論から p 進数へ』, 日本評論社, 2013.

付録

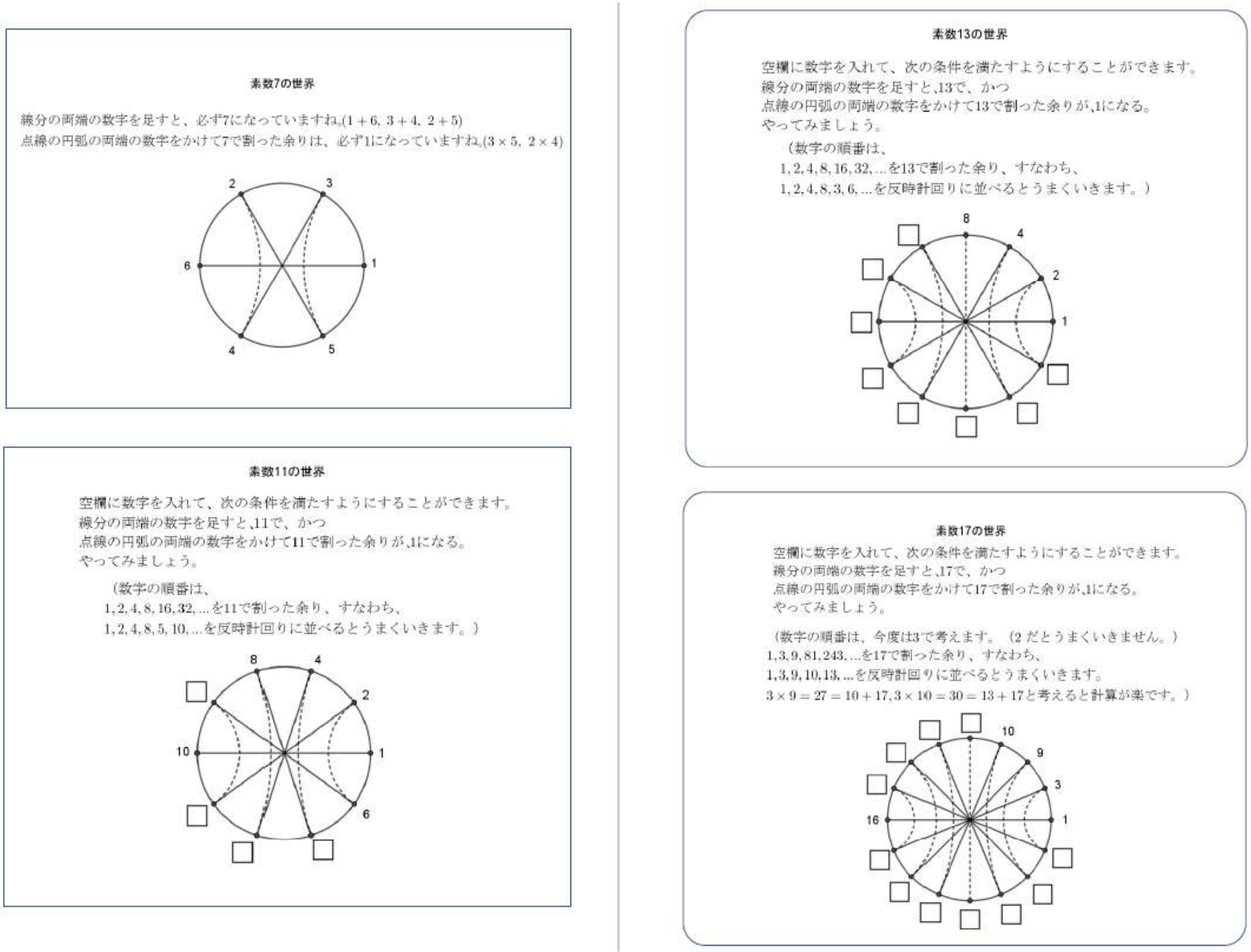

図 9: 素数 7, 11, 13, 17 の計算パズル