一般の整数点における精密化金子–Zagier 予想

小野 雅隆（早稲田大学）

はじめに

金子–Zagier 予想は有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値の不思議な関係を示唆する予想である. 近年これらの多重ゼータ値はそれぞれ $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値と $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値に精密化され, 既知の関係式が $\widehat{\mathcal{A}}$-もしくは $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値の関係式に精密化され始めている. また金子–Zagier 予想も $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値と $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値の関係を示唆する予想に精密化されている. ところで有限および $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値の定義は正の整数だけでなく全ての整数の組に対して意味を持つが, 対称および $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値ではアプリオリには意味を持たない. 小森は [6] において $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を補間する正則函数を構成することでこの困難を打破し, 全ての整数点で対称および $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を定義することに成功した.

このような背景を踏まえると, 正整数以外の整数点で (精密化) 金子–Zagier 予想がどうなっているか (定式化や成立の可否) が自然と気になってくる. 本稿では, 一般の整数点における精密化金子–Zagier 予想を定式化し, 元の予想から従うことを示した山本修司氏との共著論文 [8] の内容を解説する. 第 1 節では $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値および $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を定義し, 精密化金子–Zagier 予想を定式化する. 第 2 節では小森による統合多重ゼータ函数の定義を復習し, 一般の整数点における精密化金子–Zagier 予想に関する結果を述べる. 第 3 節で証明の概略といくつかの関連する話題を述べる.

インデックスの記号

r を非負整数とする. r 個の整数の組 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ をインデックスと呼ぶ. $k_1, \ldots, k_r \geq 1$ の場合を正のインデックス, $k_1, \ldots, k_{r-1} \geq 1, k_r \geq 2$ の場合を収束インデックスと呼ぶ. $r = 0$ のインデックスを空インデックスと呼び, $\varnothing$ と表す. 空インデックスも収束インデックスであるとする. インデックスの成分の個数を深さ, 成分の総和を重さと呼び, インデックス $\boldsymbol{k}$ の深さと重さをそれぞれ $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}), \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})$ と表す.

1　正整数点での精密化金子–Zagier 予想

この節では精密化金子–Zagier 予想を定式化するため, 登場人物である $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値と $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を定義する.

定義 1.1. 正整数 n に対し

$$\mathcal{A}_n \coloneqq \left(\prod_p \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) \Big/ \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)$$

とおく．ただし p は有理素数全てをわたる．$\mathcal{A}_n$ は p 成分毎の演算により単位的可換環となり, $\mathbb{Q}$ を対角的に埋め込むことで $\mathbb{Q}$ 代数となる．また自然な射影 $\varphi_{nm}\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$ $(n \geq m)$ により $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ は可換 $\mathbb{Q}$ 代数の射影系をなす．この射影系の射影極限を $\widehat{\mathcal{A}}$ と表す．各 $\mathcal{A}_n$ に離散位相を入れて, $\widehat{\mathcal{A}}$ には射影極限による位相を入れて位相 $\mathbb{Q}$ 代数とする．

定義 1.2 ($\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値, Rosen[9], 関 [10])**.** 正のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し $\widehat{\mathcal{A}}$ の元 $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})$ を

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k}) \coloneqq \left(\left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<p} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \bmod p^n\right)_p\right)_n$$

と定義し, $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値と呼ぶ.

注意 1.3. $\boldsymbol{p} \coloneqq ((p \bmod p^n)_p)_n \in \widehat{\mathcal{A}}$ とおくと, $\widehat{\mathcal{A}}$ は位相 $\mathbb{Q}$ 代数として $\varprojlim_n \widehat{\mathcal{A}}/\boldsymbol{p}^n\widehat{\mathcal{A}}$ と同型となる．つまり $\widehat{\mathcal{A}}$ は $\boldsymbol{p}$ 進位相と位相同型になり, $\boldsymbol{p}$ 進完備となる．

注意 1.4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, 自然な同型 $\widehat{\mathcal{A}}/\boldsymbol{p}^n\widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}_n$ が存在する．特に $n = 1$ のとき, この同型により $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})$ は金子–Zagier による有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})$ に対応する．

次に $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を定義する．収束インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し多重ゼータ値を

$$\zeta(\boldsymbol{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

と定義し, 多重ゼータ値全体が $\mathbb{Q}$ 上生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ と表す．よく知られているように, $\mathcal{Z}$ は $\mathbb{Q}$ 代数となる．$\overline{\mathcal{Z}} \coloneqq \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ とおく．

定義 1.5 ($\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値, Jarossay[2], 広瀬, O.–関–山本 [7])**.** 正のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し $\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ の元 $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})$ を

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k}) \coloneqq &\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{\text{ш}}(k_1,\ldots,k_i)\\ &\times \sum_{l_{i+1},\ldots,l_r\geq 0}\left\{\prod_{j=i+1}^{r}\binom{k_j+l_j-1}{l_j}\right\}\zeta^{\text{ш}}(k_r+l_r,\ldots,k_{i+1}+l_{i+1})t^{l_{i+1}+\cdots+l_r} \bmod \zeta(2)\end{aligned}$$

と定義し, $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値と呼ぶ．ここで $\zeta^{\text{ш}}(\boldsymbol{k})$ はシャッフル正規化多重ゼータ値 [1] である．

注意 1.6. $\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ に t 進位相を入れて $\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ を位相 $\mathbb{Q}$ 代数とみなす．自然な同型 $\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]/t\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!] \cong \overline{\mathcal{Z}}$ による $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})$ の像は対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ に一致する．

精密化金子–Zagier 予想を定式化する.

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}} \coloneqq \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{p}^{n_i} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Q}, \boldsymbol{k}_i:\text{正のインデックス}, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n_i \to \infty (\text{as } i \to \infty) \right\}$$

とおくと, これは $\widehat{\mathcal{A}}$ の閉部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる.

予想 1.7 (精密化金子–Zagier 予想, Jarossay [2], O.–関–山本 [7])**.** 位相 $\mathbb{Q}$ 代数としての同型 $\widehat{\varphi}\colon \mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}} \to \overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ であって, $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{p}) = t$ および任意の正のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し $\widehat{\varphi}(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})) = \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})$ を満たすものが存在する.

注意 1.8. $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$ と同様に

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{S}}} \coloneqq \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k}_i) t^{n_i} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Q}, \boldsymbol{k}_i:\text{正のインデックス}, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n_i \to \infty (\text{as } i \to \infty) \right\}$$

とおくと, $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ が知られている ([3, Proposition 5.5], [7, Proposition 4.4]). これは安田の定理 [13], つまり対称多重ゼータ値全体が生成する $\mathbb{Q}$ 代数を $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ とするとき $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{Z}}$ が成り立つことの $\widehat{\mathcal{S}}$ 版にあたる.

注意 1.9. 有限多重ゼータ値全体が $\mathbb{Q}$ 上生成する $\mathcal{A}_1$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ と表すとき, $\mathbb{Q}$ 代数の同型 $\varphi\colon \mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{Z}}$ であって任意の正のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し $\varphi(\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})) = \zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ を満たすものの存在性を問うのが金子–Zagier 予想であった ([4, Conjcture 9.5], [5]). Rosen の asymptotic extension conjecture [9, Conjecture A] を認めると, 精密化金子–Zagier 予想から金子–Zagier 予想が従うことが知られている [8, Remark 4.3].

2 一般の整数点での精密化金子–Zagier 予想

$\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値は多重調和和を用いて定義されていたので, 正のインデックスだけでなく一般のインデックスに対して定義が意味を持つ. 問題は $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値の定義である. シャッフル正規化多重ゼータ値はアプリオリには正のインデックスに対してしか定義されない. 小森は [6] において変数を複素数とする統合多重ゼータ函数を用いることでこの問題を克服し, 一般の整数点に対して $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を定義した.

定義 2.1 (統合多重ゼータ函数, 小森 [6])**.** 複素数 $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{C}$ と $t_+ \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq -1}, t_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 1}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(s_1, \ldots, s_r; t_+, t_-) \coloneqq \sum_{i=0}^{r} (-1)^{s_{i+1}+\cdots+s_r} \zeta(s_1, \ldots, s_i; -t_+)\zeta(s_r, \ldots, s_{i+1}; t_-)$$

と定義する. ここで複素数 s に対し $(-1)^s \coloneqq e^{\pi i s}$ とし,

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r; t) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{(n_1-t)^{s_1}\cdots(n_r-t)^{s_r}}$$

である.

注意 2.2. 小森のオリジナルの定義とは t_+ の符号が異なることに注意せよ.

小森は次を示した.

定理 2.3 (小森 [6, Theorems 1.9, 1.16])**.** 1. $\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(s_1,\dots,s_r;t_+,t_-)$ は $\mathbb{C}^r\times(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\le -1})\times(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\ge 1})$ 上の正則函数に解析接続される.

2. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と $t\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{k};0,t)\equiv\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k}) \bmod \pi i\mathcal{Z}[\pi i][\![t]\!]$$

が成り立つ.

これを踏まえ小森は $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^r$ に対し $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値を

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})\coloneqq\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{k};0,t) \bmod \pi i\mathcal{Z}[\pi i][\![t]\!]$$

と定義した. ここで一般の $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^r$ に対し $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})\in\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$ であることや $\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{k};0,t)\in\mathcal{Z}[\pi i][\![t]\!]$ であるかどうかは定義から直ちにはわからないことに注意する. アプリオリには $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})\in\widehat{\mathcal{A}}, \zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{k};0,t)\in\mathbb{C}[\![t]\!]$ であることしかわからない.

次が本稿の主定理である.

定理 2.4 ([8, Theorem 1.2])**.** $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^r$ に対し, 有限個の正のインデックス $\boldsymbol{l}$ と有理数係数多項式 $c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(x)\in\mathbb{Q}[x]$ が存在し, 以下を満たす.

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{l}}c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{p})\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{l}),$$
$$\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{l}}c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(t)\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{l}).$$

さらに, 現れる正のインデックス $\boldsymbol{l}$ の深さはインデックス $\boldsymbol{k}$ の正の成分の個数以下である.

$\boldsymbol{p}$ と t, $\widehat{\mathcal{A}}$ と $\widehat{\mathcal{S}}$ が対応して右辺は全く同じ形をしている. これより, 一般の整数点に対する精密化金子–Zagier 予想が元の予想から従うことがわかる.

定理 2.5. 1. $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^r$ に対し $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})\in\mathcal{Z}_{\widehat{\mathcal{A}}}$ および $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})\in\mathcal{Z}[\pi i][\![t]\!]/\pi i\mathcal{Z}[\pi i][\![t]\!](\cong\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!])$ が成り立つ. ([8, Corollary 1.5])

2. 精密化金子–Zagier 予想 (予想 1.7) が正しいと仮定する. このとき $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^r$ に対し $\widehat{\varphi}(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k}))=\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})$ が成り立つ. ([8, Theorem 4.4 (ii)])

注意 2.6. 後述する篠原氏の結果 [12] を用いても $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})\in\overline{\mathcal{Z}}[\![t]\!]$ を示すことができる.

3 証明の概略, その他

証明の概略を述べる．$\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値については, 次の量を考える．整数 $a<b$ と複素数 s に対し

$$F_{a,<}^{b}(s) \coloneqq \sum_{a<n<b} \frac{1}{n^s}$$

とおく．また $B_j \in \mathbb{Q}$ $(j \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ を

$$\frac{ze^z}{e^z-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{z^j}{j!}$$

で定義する (ベルヌーイ数)．$B_1 = \frac{1}{2}, B_{2j+1} = 0$ $(j \geq 1)$ および Faulhaber の公式から次が分かる．

命題 3.1 ([8, Lemma 2.1])**.** 整数 $a<b$ と非負整数 k に対し次が成り立つ．

$$F_{a,<}^{b}(-k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_j \{(-1)^j b^{k+1-j} - a^{k+j-1}\}$$

整数 $k_1, \ldots, k_r$ が $k_i = -k$ $(k \geq 0)$ となるとき

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<p} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} = \sum_{0<n_1<\cdots<n_{i-1}<n_{i+1}<\cdots<n_r<p} \frac{F_{n_{i-1},<}^{n_{i+1}}(-k)}{n_1^{k_1} \cdots n_{i-1}^{k_{i-1}} n_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots n_r^{k_r}}$$

と書けることに注意する．従って上の命題を繰り返し用いることで, $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})$ を正のインデックスの $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値の有限和で書き下すことができる．

例 3.2.

$$\sum_{0<n_1<n_2<n_3<p} \frac{n_2}{n_1^2 n_3^2} = \sum_{0<n_1<n_3<p} \frac{F_{n_1,<}^{n_3}(-1)}{n_1^2 n_3^2}$$

であり,

$$F_{n_1,<}^{n_3}(-1) = \frac{1}{2}\bigl\{(n_3^2 - n_1^2) + (n_3 + n_1)\bigr\}$$

なので,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(2,-1,2) = \frac{1}{2}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3,0) - \frac{1}{2}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3,1) - \frac{1}{2}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(0,3) - \frac{1}{2}\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(1,3)$$

がわかる．さらに

$$F_{a,<}^{b}(0) = \sum_{a<n<b} n^0 = b-a$$

なので,

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3,0) = (\boldsymbol{p}-1)\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3), \qquad \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(0,3) = \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(2) - \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3)$$

となる．以上より

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(2,-1,2) = \frac{1}{2}\bigl\{\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3)\boldsymbol{p} - \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(2) - \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(3,1) - \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(1,3)\bigr\}$$

を得る．

次に $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値の場合を述べる．こちらの出発点は Kontsevich order である．$t_+ \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 1}, t_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$I_+ := \{n + t_+ \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad I_- := \{-n + t_- \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad I := I_+ \sqcup I_-$$

とおく．I 上の全順序 $\prec$ を次のように定義する．

$$t_+ \prec 1 + t_+ \prec 2 + t_+ \prec \cdots \prec n + t_+ \prec \cdots \prec -n + t_- \prec \cdots \prec -2 + t_- \prec -1 + t_- \prec t_-.$$

注意 3.3. 通常は $t_+ = t_- = 0$ とした場合の $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 上の全順序

$$1 \prec 2 \prec \cdots \prec n \prec \cdots \prec -n \prec -2 \prec -1$$

を Kontsevich order と呼ぶことが多い．

$a \prec b$ なる $a, b \in I$ と複素数 s に対し

$$F^b_{a,\prec}(s) := \sum_{a \prec n \prec b} \frac{1}{n^s}$$

とおく．$\prec$ の定義から，$a, b \in I_+$ または $a, b \in I_-$ の場合 $F^b_{a,\prec}(s)$ は有限和となる．さらに $a \in I_+$ かつ $b \in I_-$ と場合，$F^b_{a,\prec}(s)$ は Hurwitz ゼータ函数

$$\zeta_H(s; a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

で書け，$\mathbb{C}$ 上の整函数に解析接続できる [8, Lemma 3.1]．さらに複素数 $s_1, \ldots, s_r$ が $\Re(s_i) > 1$ を満たすとする．I 上の全順序 $\prec$ を用いることで $\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{s}; t_+, t_-)$ は以下のように表示できる．

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{s}; t_+, t_-) = \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_r \in I \\ a_1 \prec \cdots \prec a_r}} \frac{1}{a_1^{s_1} \cdots a_r^{s_r}} = \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_r \in I \\ a_1 \prec \cdots \prec a_{i-1} \prec a_{i+1} \prec \cdots \prec a_r}} \frac{F^{a_{i+1}}_{a_{i-1},\prec}(s_i)}{a_1^{s_1} \cdots a_{i-1}^{s_{i-1}} a_{i+1}^{s_{i+1}} \cdots a_r^{s_r}} \tag{1}$$

次の命題が重要である．

命題 3.4 ([8, Lemma 3.2])**.**

1. C を正の実数とするとき，$\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(s_1, \ldots, s_r; t_+, t_-)$ の級数表示 (1) は $\Re(s_i) > -C, \Re(s_j) > C + 2$ $(\forall j \neq i)$ を満たす複素数 $s_1, \ldots, s_r$ に対して成立する．特に非負整数と $\Re(s_j) > k + 2$ を満たす複素数 s_j $(1 \leq j \leq r, j \neq i)$ に対し，次が成り立つ．

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(s_1, \ldots, s_r; t_+, t_-)|_{s_i = -k} = \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_r \in I \\ a_1 \prec \cdots \prec a_{i-1} \prec a_{i+1} \prec \cdots \prec a_r}} \frac{F^{a_{i+1}}_{a_{i-1}}(-k)}{a_1^{s_1} \cdots a_{i-1}^{s_{i-1}} a_{i+1}^{s_{i+1}} \cdots a_r^{s_r}}$$

2. 非負整数 k と $a \prec b$ なる $a, b \in I$ に対して，次が成り立つ．

$$F^b_{a,\prec}(-k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_j \{(-1)^j b^{k+1-j} - a^{k+1-j}\}$$

この命題により, $\widehat{\mathcal{A}}$-多重ゼータ値で成り立った公式が $\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(\boldsymbol{s};t_+,t_-)$, 特に $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})$ に対しても成立することがわかる. $\widehat{\mathcal{S}}$-多重ゼータ値の場合は函数関係式になっていることは興味深い.

注意 3.5. 最後にいくつか補足をする.

1. $\zeta_{\widehat{\mathcal{U}}}(-k_1,\dots,-k_r;t_+,t_-)$ $(k_1,\dots,k_r\geq 0)$ の母函数を明示的に計算できる [8, Theorem 5.1]. これは $(t_+,t_-)=(0,t)$ の場合に小森によって計算されていた母函数 [6, Theorem 1.17] の一般化にあたる.

2. 通常の多重ゼータ函数 $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ の一般の整数点のうち正則である点については, Faulhaber の公式を用いれば同様の帰納的な公式を得ることができる. この事実は最近名古屋大学の篠原健氏によって示されているが, 手法は異なる [12]. 篠原氏の手法では調和関係式と Mellin–Barnes の積分公式が用いられる.

謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の愛知県立大学の田坂浩二さん, 共同研究者である慶應義塾大学の山本修司さん (お二人には初稿に目を通してもいただきました), 旅費を援助していただいた九州大学の金子昌信先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] K. Ihara, D. Zagier, M. Kaneko, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[2] D. Jarossay, *Adjoint cyclotomic multiple zeta values and cyclotomic multiple harmonic values*, preprint (2019), arXiv:1412.5099v5.

[3] D. Jarossay, *Depth reductions for associators*, J. Number Theory **217** (2020), 163–192.

[4] M. Kaneko, *An introduction to classical and finite multiple zeta values*, Publications Mathémathiques de Besançon 2019/1 (2019) 103–129.

[5] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.

[6] Y. Komori, *Finite multiple zeta values, symmetric multiple zeta values and unified multiple zeta functions*, Tohoku Math. J. **73** (2021), 221–255.

[7] M. Ono, S. Seki, and S. Yamamoto, *Truncated t-adic symmetric multiple zeta values and double shuffle relations*, Research in Number Theory **7**, 15 (2021).

[8] M. Ono and S. Yamamoto, *On the refined Kaneko–Zagier conjecture for general integer indices*, preprint (2022), arXiv:2202.06789.

[9] J. Rosen, *The completed finite period map and Galois theory of supercongruences*, Int. Math. Res. Not. no. 23 (2019), 7379–7405.

[10] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, doctoral dissertation, Osaka University (2017).

[11] 関真一朗, 「$\mathcal{F}$-有限多重ゼータ値」から「$\widehat{\mathcal{F}}$-有限多重ゼータ値」へ: ただし, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$, 第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」報告集 (2019), 203–211.

[12] T. Shinohara, *Multiple zeta functions at regular integer points*, preprint (2022), arXiv:2209.04116.

[13] S. Yasuda, *Finite real multiple zeta values generate the whole space Z*, Int. J. Number Theory **12** (2016), 787–812.