ダブルシャッフル関係式から導かれるバイナリ行列

国立情報学研究所　町出智也

Tomoya Machide
National Institute of Informatics

概 要

多重ゼータ値には膨大な $\mathbb{Z}$ 上の線形関係式が存在する。そしてどのような組み合わせで連立線形方程式を考えても対応する行列のランクは $2^{k-2} - d_k$ 以上になることが知られている。ここで k は'重さ' と呼ばれる自然数であり、d_k はフィボナッチ数的な性質「$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$」を満たす。また行列を '深さ' でブロック化した時、各ブロック行列のランクはカスプ形式の空間の次元と関連するという予想がある。

本予稿ではあるクラスの関係式に対応する行列を、成分を mod 2 して (つまり $\mathbb{F}_2$ 上で) 考察する。具体的には重さが 22 以下の条件のもと、計算機のガウスの消去法によるランクの計算結果を報告する。大域的なランクは $2^{k-2} - d_k$ となり $\mathbb{Z}$ の場合と一致する。一方、ブロック行列のランクはカスプ形式ではなくパスカルの三角形と関連することが観察される。また関係式を一部に制限した場合の行列も扱う。$\mathbb{Z}$ 上ではランクが $2^{k-2} - d_k$ であっても $\mathbb{F}_2$ 上ではより大きくなる場合があり、$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{F}_2$ では関係式の間の従属関係 (つまり $\mathbb{Z}$ 上における単因子標準形) が異なることがわかる。

1　序章

多重ゼータ値はリーマンのゼータ関数の特殊値の一般化であり、

$$\zeta(\mathbf{k}_r) \;=\; \zeta(k_1,\ldots,k_r) := \sum_{m_1>\cdots>m_r>0} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

と書けます。ただし $k_1,\ldots,k_r$ は正整数で、収束のため $k_1 \geq 2$ とします。[1] 値の分類のために、$k = k_1 + \cdots + k_r$ を '重さ'、r を '深さ' と名付けます。重さの異なる多重ゼータ値の線形関係式は存在しないと予想されているため、一般に線形関係式は k を固定して研究します。（予想の背後には特殊値 $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$ の $\mathbb{Q}$ 上の独立性の予想があります。）簡略化のため今後は線形関係式を単に関係式と呼びます。

引数の組み合わせから重さ k の多重ゼータ値の個数は 2^{k-2} です。しかし多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ の次元の上限は d_k であることが知られています。ここで d_k は

$$\sum_{k\geq 0} d_k X^k = \frac{1}{1-(X^2+X^3)} \tag{1.1}$$

e-mail：machide@nii.ac.jp

[1] 不等号の順番が逆の定義もあります。その時の収束性の条件は $k_r \geq 2$ です。

表 1: $\mathcal{Z}_k$ の生成元の数 2^{k-2}、次元の上限 d_k、ランクの下限 $r_k = 2^{k-2} - d_k$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^{k-2}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
d_k	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9
r_k	0	1	3	6	14	29	60	123	249	503

k	12	13	14	15	16	17
2^{k-2}	1024	2048	4096	8192	16384	32768
d_k	12	16	21	28	37	49
r_k	1012	2032	4075	8164	16347	32719

k	18	19	20	21	22
2^{k-2}	65536	131072	262144	524288	1048576
d_k	65	86	114	151	200
r_k	65471	130986	262030	524137	1048376

で決まる整数であり、フィボナッチ数のように「$d_k = d_{k-2}+d_{k-3}$」を満たします。実際の値を表 1 に載せます。次元の上限が d_k ということは、$\mathbb{Q}$ 上独立な関係式が $r_k = 2^{k-2}-d_k$ 個以上存在することを意味します。つまり多重ゼータ値の関係式を線形連立方程式と捉えた時、任意の関係式の組み合わせに対応する行列のランクは r_k 以上ということがわかります。なお初項の条件を無視して $(d_k)_k$ の漸化式を $(r_k)_k$ に翻訳すると「$r_k = 2r_{k-1}+r_{k-2}-r_{k-3}-2r_{k-4}$」となります。次元の上限性 (つまりランクの下限性) は既知ですが、次元の下限性 (つまりランクの上限性) は多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の独立性と関連し、リーマンの特殊値の場合と同様に難しい問題です。理論と実践の両側面から「$d_k \overset{?}{=} \dim \mathcal{Z}_k$」が予想されています。

本予稿では [4] のシャッフル型の拡張ダブルシャッフル関係式 (英語では extended double shuffle relations of shuffle type、また簡単に EDS) と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 上の関係式に対応する行列のランクを、各成分を mod 2 して計算します。計算には計算機によるガウスの消去法を使います。また Minh 氏等 [7] と金子氏等 [5] によって研究された、EDS 関係式の一部分を制限した行列についても計算します。便宜上それ等の行列をそれぞれ「$M_k^{\mathrm{E}}, M_k^{\mathrm{M}}, M_k^{\mathrm{K}}$」と名付けます (左から EDS、Minh 氏等、金子氏等の関係式に対応します)。実験では成分を mod 2 して計算するので、対応する $\mathbb{F}_2$ 上の行列を「$\underline{M}_k^{\mathrm{E}}, \underline{M}_k^{\mathrm{M}}, \underline{M}_k^{\mathrm{K}}$」とします。

EDS 関係式に関する文献は既に沢山あるため (特に [1] がお薦めです)、これらの行列は既に与えられたものとして今後は話を進めます。その代わりとして行列に関するデータは多めに掲載します。行列のデータから多重ゼータ値の性質を感じて頂ければ幸いです。

2　計算の目的

報告する計算結果は二つあります。

[実験 3.1] 深さでブロック化した時の $\underline{M}_k^{\mathrm{E}}$ のランク計算 (各ブロック行列のランクも含む)

[実験 3.2] $\underline{M}_k^{\mathrm{E}}, \underline{M}_k^{\mathrm{M}}, \underline{M}_k^{\mathrm{K}}$ のランク計算 (ブロック行列のランクは含まない)

手法は改良版のガウスの消去法を使います。計算機の性能限界のため両者とも $k \leq 22$ までの結果です。具体的な計算資源や計算コストは本予稿では触れませんので、詳細は [6] を参照してください。実験結果は次のセクションで述べることとし、以下のサブセクションでは実験の目的を説明します。

2.1　実験 3.1 の目的

次が実験 3.1 の目的です：

(i) EDS 関係式が多重ゼータ値の線形関係の親玉と考えれることの確認

(ii) 深さで階層化した時、$\mathbb{F}_2$ 上の線形関係に構造が存在することの観察

多重ゼータ値の関係式の空間は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と考えられるので、全ての関係式を生成する関係式の (一意ではない) 組みが存在します。その一組みに対応する行列を $M_k^{親}$ とすると、次元予想「$d_k \stackrel{?}{=} \dim \mathcal{Z}_k$」は「$r_k \stackrel{?}{=} \operatorname{rank} M_k^{親}$」と言い換えれます。即ち次元予想は r_k 個からなる関係式の基底 (つまり親玉) が存在することを主張します。もしもガウスの消去法で

$$\operatorname{rank} M_k^{\bullet} = r_k \quad (\bullet \in \{\mathrm{E}, \mathrm{M}, \mathrm{K}\}) \tag{2.1}$$

を示すことができなたら、$M_k^{\bullet}$ の行に対応する関係式の中に基底が存在することが予想の仮定の下で示せます。ここで、行は関係式、列は多重ゼータ値が対応するように線形連立方程式と行列を同一視しています。等式 (2.1) は各論文 [4, 5, 7] で任意の重さ k で成り立つことが期待されており、小さい k においては計算機で確認されています。合同算術の性質から $\operatorname{rank} M_k^{\mathrm{E}} \geq \operatorname{rank} \underline{M}_k^{\mathrm{E}}$ なので、予想下では

$$\operatorname{rank} \underline{M}_k^{\mathrm{E}} = r_k \tag{2.2}$$

でも基底の存在がわかります。[2]

従って (2.2) の計算から EDS 関係式が親玉と考えられることがわかり、目的 (i) が達成されます。注意ですが (2.2) は他の行列 $\underline{M}_k^{\mathrm{M}}, \underline{M}_k^{\mathrm{K}}$ の場合は一般に成り立ちません。これが実験 3.1 が $\underline{M}_k^{\mathrm{E}}$ のみ扱う理由ですが、詳しいことは次のサブセクションの実験 3.2 の説明で述べます。

[2] 予想とは関係なく (2.1) や (2.2) から $\operatorname{rank} M_k^{親} \geq r_k$、つまり $\dim \mathcal{Z}_k \leq d_k$ はわかります。

目的 (ii) について説明します。線形関係を深さで階層化するとは、行列の列の多重ゼータ値の順番を左から深さが大きい順に並べブロック化し、各ブロック行列を調べることを意味します。[3] 例えば重さ $k=4$ の EDS 関係式の場合は次のようにブロック化されます：

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\zeta(2,1,1)+\zeta(3,1)+\zeta(2,2) &=& 0 \\ \zeta(2,1,1)-\zeta(3,1)-\zeta(2,2) &=& 0 \\ -\zeta(3,1)-\zeta(2,2)+\zeta(4) &=& 0 \\ -4\zeta(3,1)+\zeta(4) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{\text{行列変換}}{\Longleftrightarrow} \quad M_k^{\mathrm{E}} = \left(\begin{array}{c|cc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{mod } 2}{\Longrightarrow} \quad \underline{M}_k^{\mathrm{E}} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2.3}$$

ただし列の順番は「$\zeta(2,1,1)|\zeta(3,1),\zeta(2,2)|\zeta(4)$」としています。

行簡約階段形にした後の対角線上のブロック行列を $M_{k,r}^{\mathrm{E}}, \underline{M}_{k,r}^{\mathrm{E}}$ $(r=k-1,\ldots,1)$ とおきます。（ガウスの消去法で簡約化した後であることにご注意ください。）例えば $k=4$ の場合は

$$M_{4,3}^{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad M_{4,2}^{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{4,1}^{\mathrm{E}} = \phi,$$

$$\underline{M}_{4,3}^{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{M}_{4,2}^{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{M}_{4,1}^{\mathrm{E}} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

となります。ただし 0 行 0 列の行列は ϕ としています。繰り返しになりますが上段の $M_{4,r}^{\mathrm{E}}$ は (2.3) の表示において行簡約階段形の操作をした後のブロック行列です。

次元予想の精密化 [3] では関係式の構造がカスプ形式と関連すると考えられており、「$r_{k,r} \stackrel{?}{=} \operatorname{rank} M_{k,r}^{\mathrm{E}}$」が期待されています。[4] ただし $r_{k,r} = \binom{k-2}{r-1} - d_{k,r}$ で、$d_{k,r}$ は

$$\sum_{k,r\geq 0} d_{k,r} X^k Y^r = \frac{1+E(X)Y}{1-O(X)Y+S(X)Y^2(1-Y^2)} \tag{2.4}$$

[3] ベクトル空間の言葉では

$$\mathcal{Z}_k \cong \overline{\mathcal{Z}}_{k,k-1} \bigoplus \cdots \bigoplus \overline{\mathcal{Z}}_{k,1}$$

に直和分解して、各 $\overline{\mathcal{Z}}_{k,r}$ の構造を考えることに対応します。ここで分解要素は $\overline{\mathcal{Z}}_{k,r} = \mathcal{Z}_{k,r}/\mathcal{Z}_{k,r-1}$ で定まる商空間で、$\mathcal{Z}_{k,r}$ は重さ k かつ深さが r 以下の多重ゼータ値で張られる部分空間です。

[4] ベクトル空間の言葉では $\dim \overline{\mathcal{Z}}_{k,r} \stackrel{?}{=} d_{k,r}$ です。

で決まる整数です。ここで

$$E(X) = \frac{X^2}{(1-X^2)}, \quad O(X) = \frac{X^3}{(1-X^2)}, \quad S(X) = \frac{X^{12}}{(1-X^4)(1-X^6)}$$

であり、$S(X)$ がフルモジュラー群上のカスプ形式の次元の生成関数です。二重数列 $(d_{k,r})_{k,r}$ の生成関数に $S(X)$ が現れるので、多重ゼータ値の背後にはカスプ形式に関連する構造があると考えられています。論文 [2] ではこの予想が EDS 関係式を用いて計算機で確認されています (ただし EDS 関係式に含まれると予想されている双対公式も使用されています)。もちろん (2.4) の右辺は $Y=1$ とすると (1.1) の右辺と同じになります。

上記の $\mathbb{Q}$ 上の行列 $M^{\mathrm{E}}_{k,r}$ の予想を鑑みると、$\mathbb{F}_2$ 上の線形関係の構造は

$$\operatorname{rank} \underline{M}^{\mathrm{E}}_{k,r} \quad (r = k-1, \ldots, 1) \tag{2.5}$$

に反映されると考えられます。つまり (2.5) を計算し法則を見つけることで目的 (ii) が達成されます。そして実際に (2.5) の間にはパスカルの三角形の法則があることが、実験 3.1 から観察されます。

2.2 実験 3.2 の目的

実験 3.2 の目的は

- $M^{\mathrm{E}}_k, M^{\mathrm{M}}_k, M^{\mathrm{K}}_k$ の単因子標準形の対角成分の偶奇性の調査

です。論文 [4, 5, 7] で主題となっている関係式の間には包含関係があり、M^{M}_k は M^{E}_k の部分行列、M^{K}_k は M^{M}_k の部分行列となっています。行数 m は、表 2 からわかるとおり「$M^{\mathrm{E}}_k > M^{\mathrm{M}}_k > M^{\mathrm{K}}_k$」の順で小さくなり、特に M^{K}_k の行数は重さが 9 以降は正方行列となるほどに少ないです（行列に変換する際に同じ関係式は省いています）。

行列 $M^{\bullet}_k$ $(\bullet \in \{\mathrm{E}, \mathrm{M}, \mathrm{K}\})$ の成分は整数なので単因子論が適応できます。ランク計算 (2.1) の [5, 7] による実験から次の命題が成り立ちます。命題では “適当に小さい重さ k” という言い回しをしていますが、[5, 7] において実際に実験したという意味で、[7] では $k \leq 16$、[5] では $k \leq 20$ です。今後命題 2.1 の (2.6) を使うときは k は常に “適当に小さい” と仮定します。

命題 2.1 ([5, 7])**.** 適当に小さい重さ k に対して、可逆な正方行列 $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ と $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$、正整数 $e^{\bullet}_i$ $(i = 1, \ldots, r_k)$ が存在して

$$PM^{\bullet}_k Q = \begin{pmatrix} e^{\bullet}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\bullet}_{r_k} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

が成り立つ。ただし $e^{\bullet}_i | e^{\bullet}_{i+1}$ を満たす。

表 2: $\underline{M}_k^{\bullet}$ の行数 $m^{\bullet}$ ($\bullet \in \{\mathrm{E}, \mathrm{M}, \mathrm{K}\}$)　　※比較用に列数 $n = 2^{k-2}$ も掲載

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m^{E}	0	1	3	8	20	44	101	220	478	1019
m^{M}	0	1	3	6	15	31	73	160	355	768
m^{K}	0	1	3	6	15	31	63	128	256	512
n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

k	12	13	14	15	16	17
m^{E}	2178	4602	9736	20472	43031	90102
m^{M}	1672	3548	7695	16383	34847	73726
m^{K}	1024	2048	4096	8192	16384	32768
n	1024	2048	4096	8192	16384	32768

k	18	19	20	21	22
m^{E}	188470	393206	819316	1703925	3539188
m^{M}	155711	327679	688254	1441791	3014911
m^{K}	65536	131072	262144	524288	1048576
n	65536	131072	262144	524288	1048576

対角成分 $e_i^{\bullet}$ の中で奇数の数を $r_k^{\bullet,odd}$、偶数の数を $r_k^{\bullet,even}$ とおくと (2.1) より

$$r_k = r_k^{\bullet,odd} + r_k^{\bullet,even} \tag{2.7}$$

です。また (2.6) において mod 2 することにより

$$\operatorname{rank} \underline{M}_k^{\bullet} = r_k^{\bullet,odd} \tag{2.8}$$

です。

行列 $\underline{M}_k^{\bullet}$ のランク計算から、(2.7) と (2.8) を通して

$$r_k^{\bullet,odd}, \quad r_k^{\bullet,even} \qquad (\bullet \in \{\mathrm{E}, \mathrm{M}, \mathrm{K}\})$$

を求めるのが実験 3.2 の目的です。実験結果から $7 \leq k \leq 22$ においてこれらの値のペアが互いに異なることがわかります。なお実験 3.1 からわかる通り、$(r_k^{\mathrm{E},odd}, r_k^{\mathrm{E},even}) = (r_k, 0)$ となります。実験 3.2 から、（ガウスの消去法による簡約階段形の意味で）$\mathbb{Q}$ 上では同値な関係式でも、（単因子論における標準形の意味で）$\mathbb{Z}$ 上では異なる関係式になることがわかります。

3　計算結果

整数 $\underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r}$ を

$$\sum_{k,r\geq 0} \underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r} X^k Y^r = \frac{1}{1-(X^2+X^3)Y} \tag{3.1}$$

で定まる数とし、

$$\underline{r}^{\mathrm{E}}_{k,r} = \binom{k-2}{r-1} - \underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r}$$

とします。

次が本予稿における一つ目の実験結果です。

実験 3.1 ([6, Experiment 3.2])**.** k を重さ、r を深さとする。$1 \leq r < k \leq 22$ の時

$$\operatorname{rank} \underline{M}^{\mathrm{E}}_{k,r} = \underline{r}^{\mathrm{E}}_{k,r} \tag{3.2}$$

が成り立つ。特に、*(3.1)* で $Y=1$ とすると *(1.1)* に同じになるため

$$\operatorname{rank} \underline{M}^{\mathrm{E}}_{k} = r_k \tag{3.3}$$

が成り立つ。

生成関数の形から二重数列 $(\underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r})_{k,r}$ は漸化式「$\underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r} = \underline{d}^{\mathrm{E}}_{k-2,r-1} + \underline{d}^{\mathrm{E}}_{k-3,r-1}$」を満たします。二項係数の漸化式「$\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}$ 」を添字のずれに気をつけながら考慮すると

$$\underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r} = \binom{r}{k-2r}$$

がわかります。二項係数の漸化式はパスカルの三角形に対応していました。従って (3.1) は行列 $\underline{M}^{\mathrm{E}}_{k}$(つまり行に対応する $\mathbb{F}_2$ 上の関係式) の背後にパスカルの三角形の構造があることを示唆しています。それは行列 M^{E}_{k}(つまり行に対応する $\mathbb{Q}$ 上の関係式) のカスプ形式の構造を示唆している (2.4) とは明らかに異なります。表 3 に実際の $\underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r}$ の値を載せます。下にずれていますが、0 列に 0 行目から「1」、1 列に 2 行目から「$1,1$」、2 列に 4 行目から「$1,2,1$」が現れ、パスカルの三角形が見てとれます。比較として $d_{k,r}$ の値も表 4 に載せます。カスプ形式との関連を見抜いた人に感嘆するしかないほどの複雑な様相が見てとれます。

次に二つ目の実験結果を紹介します。

実験 3.2 ([6, Experiment 3.3])**.** k を重さとする。$7 \leq k \leq 20$ の時

$$r_k \ = \ r^{\mathrm{E},odd}_k \ > \ r^{\mathrm{M},odd}_k \ > \ r^{\mathrm{K},odd}_k \tag{3.4}$$

が、つまり *(2.7)* より

$$0 \ = \ r^{\mathrm{E},even}_k \ < \ r^{\mathrm{M},even}_k \ < \ r^{\mathrm{K},even}_k \tag{3.5}$$

が成り立つ。左側の「$r^{\mathrm{E},odd}_k > r^{\mathrm{M},odd}_k$」と「$r^{\mathrm{E},even}_k < r^{\mathrm{M},even}_k$」は $k=21,22$ で成り立つ。

表 3: $\underline{d}^{\mathrm{E}}_{k,r}$ の値　　※行の合計は d_k と、列の合計は（$k \leq 7$ で）2^r と一致

k/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	合計
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
6	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3
8	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	4
9	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	5
10	0	0	0	0	6	1	0	0	0	0	0	0	7
11	0	0	0	0	4	5	0	0	0	0	0	0	9
12	0	0	0	0	1	10	1	0	0	0	0	0	12
13	0	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	16
14	0	0	0	0	0	5	15	1	0	0	0	0	21
15	0	0	0	0	0	1	20	7	0	0	0	0	28
16	0	0	0	0	0	0	15	21	1	0	0	0	37
17	0	0	0	0	0	0	6	35	8	0	0	0	49
18	0	0	0	0	0	0	1	35	28	1	0	0	65
19	0	0	0	0	0	0	0	21	56	9	0	0	86
20	0	0	0	0	0	0	0	7	70	36	1	0	114
21	0	0	0	0	0	0	0	1	56	84	10	0	151
22	0	0	0	0	0	0	0	0	28	126	45	1	200
合計	1	2	4	8	16	32	64	128	–	–	–	–	

表 5 に $(r_k^{\bullet,odd}, r_k^{\bullet,even})$ の計算結果を載せます。数列 $(r_k^{\mathrm{M},even})_k$ には

$$r_k^{\mathrm{M},even} = r_{k-2}^{\mathrm{M},even} + r_{k-3}^{\mathrm{M},even} + \delta_{k\in\{7,15\}} \tag{3.6}$$

の漸化式が観察されます。ここで δ_P はクロネッカーのデルタ関数で、P が真の時は 1、偽の時は 0 です。数列 $(r_k^{\mathrm{K},even})_k$ の法則性は筆者は発見できておりません。

表 4: $d_{k,r}$ の値　　※行の合計は d_k と一致

k/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	合計
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
8	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
9	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
10	0	1	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	7
11	0	1	4	3	1	0	0	0	0	0	0	0	9
12	0	1	3	6	2	0	0	0	0	0	0	0	12
13	0	1	5	6	4	0	0	0	0	0	0	0	16
14	0	1	5	9	4	2	0	0	0	0	0	0	21
15	0	1	6	8	10	3	0	0	0	0	0	0	28
16	0	1	5	14	11	6	0	0	0	0	0	0	37
17	0	1	7	13	18	7	3	0	0	0	0	0	49
18	0	1	6	19	18	17	4	0	0	0	0	0	65
19	0	1	8	17	31	19	10	0	0	0	0	0	86
20	0	1	7	25	30	35	12	4	0	0	0	0	114
21	0	1	9	22	48	37	29	5	0	0	0	0	151
22	0	1	8	32	45	65	33	16	0	0	0	0	200

4　まとめ

本予稿では [6] の実験結果を行列の視点で報告しました。計算の都合上行列の成分を mod 2 して $\mathbb{F}_2$ 上で実験しましたが、$\mathbb{F}_2$ である理由は、真と偽の世界の計算機科学の技術を利用するのに便利だったというだけで、数学的な理由は特にありません。[5] しかし表 3 ではパスカルの三角形の構造が、そして表 5 の $r_k^{\mathrm{M},even}$ では (3.6) のようなフィボナッチ数的な漸化式が観察されました。偶然で済ますには法則性がありすぎると (少なくとも筆者には) 感じられます。多重ゼータ値の線形関係式の整数係数にある秘密を解明するには更なる研究と実験が必要であると考えられます。

[5] $\mathbb{F}_2$ のおかげでデータサイズが小さくなり、また CDCL(conflict-driven clause learning、矛盾先行型節学習) の技術が応用しやすくなり、ランク計算が高速化できました (詳細は [6, Appendix] を参照)。

表 5: $r_k^{\bullet,odd}, r_k^{\bullet,even}$ ($\bullet \in \{\mathrm{E},\mathrm{M},\mathrm{K}\}$) の値

k	$r_k^{\mathrm{E},odd}$	$r_k^{\mathrm{E},even}$	$r_k^{\mathrm{M},odd}$	$r_k^{\mathrm{M},even}$	$r_k^{\mathrm{K},odd}$	$r_k^{\mathrm{K},even}$
2	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	1	0
4	3	0	3	0	3	0
5	6	0	6	0	6	0
6	14	0	14	0	14	0
7	29	0	28	1	28	1
8	60	0	60	0	58	2
9	123	0	122	1	120	3
10	249	0	248	1	244	5
11	503	0	502	1	491	12
12	1012	0	1010	2	994	18
13	2032	0	2030	2	2004	28
14	4075	0	4072	3	4030	45
15	8164	0	8159	5	8092	72
16	16347	0	16342	5	16244	103
17	32719	0	32711	8	32560	159
18	65471	0	65461	10	65236	235
19	130986	0	130973	13	130631	355
20	262030	0	262012	18	261500	530
21	524137	0	524114	23	–	–
22	1048376	0	1048345	31	–	–

(注) $r_k^{\bullet,odd} + r_k^{\bullet,even} = r_k$

謝辞

集会を運営し予稿のミスプリントまで指摘していただいた世話人の田坂浩二氏に感謝します。本研究は基盤研究 (C)20K03727 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] 荒川恒男, 金子昌信, **多重ゼータ値入門**, COE lecture note, Kyushu University, vol.23 (2010), 111p.

[2] J. Blümlein, D. J. Broadhurst and J. A. M. Vermaseren, *The multiple zeta value data mine*, Comput. Phys. Commun. **181** (2010), 582–625.

[3] D. Broadhurst and D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to* 9 *loops*, Phys. Lett. B **393** (1997), 403–412.

[4] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.

[5] M. Kaneko, M. Noro and K. Tsurumaki, *On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values*, Software for algebraic geometry **148** (2008), 47–58.

[6] Tomoya Machide, *Computations about formal multiple zeta spaces defined by binary extended double shuffle relations*, preprint; arXiv:2205.13751 [math.NT], 2022.

[7] H. N. Minh, G. Jacob, M. Petitot and N. E. Oussous, *Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier*, J. Électr. Sém. Lothar. Combin. **43** (2000), Art. B43e, 29 pp.