重さ奇数の二重ゼータ値の次元について

名古屋大学・高等研究院　広瀬　稔
MINORU HIROSE
INSTITUTE FOR ADVANCED RESEARCH,
NAGOYA UNIVERSITY

1. はじめに

正整数 $k_1,\dots,k_{d-1}>0$ および $k_d>1$ に対し, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{R}$ を

$$\sum_{0<m_1<\cdots<m_d}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}}$$

で定義する．ここで $k_1+\cdots+k_d$ は重さ，d は深さと呼ばれる．また深さ 2 の多重ゼータ値は二重ゼータ値と呼ばれる．重さ奇数の二重ゼータ値に関して次が知られている．

定理 1 (Zagier, [3])**.** $m\geq 1$, $n\geq 2$ とし，$k=m+n$ と置く．k が奇数のとき

$$\zeta(m,n)=(-1)^m\sum_{s=0}^{(k-3)/2}\left(\binom{k-2s-1}{m-1}+\binom{k-2s-1}{n-1}-\delta_{n,2s}+(-1)^m\delta_{s,0}\right)\zeta(2s)\zeta(k-2s).$$

ここで $\{\zeta(2s)\zeta(k-2s):0\leq s\leq (k-3)/2\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線型独立だと予想されているが証明は知られておらず，次元に関する議論をするのに不便なので，本稿では多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\dots,k_d)$ の代わりにモチビック多重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_d)$ を用いて議論を行う．モチビック多重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_d)$ についても定理 1 と全く同様の式が成り立つことが分かる．つまり定理 1 と同じ条件，記号の元で次が成り立つ．

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(m,n)=(-1)^m\sum_{s=0}^{(k-3)/2}\left(\binom{k-2s-1}{m-1}+\binom{k-2s-1}{n-1}-\delta_{n,2s}+(-1)^m\delta_{s,0}\right)\zeta^{\mathfrak{m}}(2s)\zeta^{\mathfrak{m}}(k-2s).$$

ただし，$\zeta^{\mathfrak{m}}(0):=-\frac{1}{2}$ と置く．また $\{\zeta^{\mathfrak{m}}(2s)\zeta^{\mathfrak{m}}(k-2s):0\leq s\leq (k-3)/2\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることも分かる．k を 3 以上の奇数とするとき，重さ k，深さ 2 以下の全ての多重ゼータ値が張る空間を H_{k-2} とする．上で述べた $\zeta^{\mathfrak{m}}(m,n)$ の明示式および $\{\zeta^{\mathfrak{m}}(2s)\zeta^{\mathfrak{m}}(k-2s)\}$ の線型独立性から

$$H_{k-2}=\bigoplus_{s=0}^{(k-3)/2}\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(2s)\zeta^{\mathfrak{m}}(k-2s)$$

となり，特に

$$\dim_{\mathbb{Q}}H_{k-2}=(k-1)/2$$

である．H_{k-2} の部分空間

$$\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(k)+\sum_{\substack{a+b=k\\ a\geq 1,\,b\geq 2\\ a:\mathrm{even},\,b:\mathrm{odd}}}\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(a,b),$$

$$\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(k)+\sum_{\substack{a+b=k\\ a\geq 1,\,b\geq 2\\ a:\mathrm{odd},\,b:\mathrm{even}}}\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(a,b)$$

については次が知られている．

定理 2 (Zagier, [3])**.** $k\geq 3$ を奇数とするとき，

$$\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(k)+\sum_{\substack{a+b=k\\ a\geq 1,\,b\geq 2\\ a:\mathrm{even},\,b:\mathrm{odd}}}\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(a,b)=H_{k-2}$$

.

定理 3 (Li–Liu, [2])．$k\geq 3$ を奇数とするとき，

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(k)+\sum_{\substack{a+b=k\\ a\geq 1,\, b\geq 2\\ a:\mathrm{odd},\, b:\mathrm{even}}}\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(a,b)\right)=\dim_{\mathbb{Q}}H_{k-2}-\lfloor \dim_{\mathbb{C}}S_{k+1}+\dim_{\mathbb{C}}S_{k-1}\rfloor .$$

ただし，S_l は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対する重さ l カスプ形式の空間とする．

以下，$\zeta^{\mathfrak{m}}(1)=T$, $\zeta^{\mathfrak{m}}(k-1,1)=T\zeta^{\mathfrak{m}}(k-1)-\zeta^{\mathfrak{m}}(1,k-1)-\zeta^{\mathfrak{m}}(k)$ と置くことにする（T は不定元）．二重ゼータ値を一般化した表記として

$$J(a;b,c)=(-1)^a\sum_{\substack{a'+a''=a\\ a',a''\geq 0}}\binom{b+a'}{b}\binom{c+a''}{c}\zeta^{\mathfrak{m}}(b+a'+1,c+a''+1)\in \hat{H}_w\coloneqq H_w\bigoplus \mathbb{Q}T\zeta^{\mathfrak{m}}(w+1)$$

を導入しよう．$J(a;b,c)$ は正規化反復積分の値としても自然に現れる量である．$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の部分集合 N,N',N'' に対して $\hat{H}_w$ の部分集合 $H_w(N;N',N'')$ を

$$H_w(N;N',N'')=\mathbb{Q}\zeta^{\mathfrak{m}}(w+2)+\sum_{\substack{a\in N, b\in N', c\in N''\\ a+b+c=w}}\mathbb{Q}J(a;b,c)$$

で定める．また $\mathbf{ev}=2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbf{od}=1+2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbf{0}=\{0\}$, $\mathbf{1}=\{1\}$ と置く．N,N',N'' のうち 2 つが $\in\{\mathbf{ev},\mathbf{od}\}$ の元で，1 つが $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ の元の場合に，$H_w(N;N',N'')$ の次元はどうなるだろうか．このような N,N',N'' の組み合わせは全部で 24 通りある．著者は [1] で，$H_w(N,N',N'')$ の次元や生成元が満たす関係式を調査した．本稿では特に，重さ奇数の場合 (全部で 12 通りある) の次元について，得られた結果といくつかの観察事実を紹介したい．

2. 次元に関する結果と予想

定理 2, 3 はそれぞれ

$$\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{0};\mathbf{od},\mathbf{ev})=(w+1)/2,$$

$$\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{0};\mathbf{ev},\mathbf{od})=(w-1)/2-\dim_{\mathbb{C}}S_{w+1}-\dim_{\mathbb{C}}S_{w+3},$$

と同値である．著者は [1] において，いくつかの完全列を与えた．そこから次が従う．

定理 4 ([1])．w を 3 以上の奇数とするとき

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{od};\mathbf{0},\mathbf{ev})&=(w-1)/2-\lfloor (w-3)/6\rfloor ,\\
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{ev};\mathbf{0},\mathbf{od})&=(w-1)/2,\\
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{od};\mathbf{ev},\mathbf{0})&=(w+1)/2,\\
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{ev};\mathbf{od},\mathbf{0})&=(w+1)/2,\\
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{1};\mathbf{ev},\mathbf{ev})&=(w-1)/2-\dim_{\mathbb{C}}S_{w+1},\\
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{od};\mathbf{1},\mathbf{od})&=(w-1)/2-\dim_{\mathbb{C}}S_{w+1},\\
\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{ev};\mathbf{1},\mathbf{ev})&=(w+1)/2.
\end{aligned}$$

残った 3 ケースについては次を予想している．

予想 5 ([1])．w を 3 以上の奇数とするとき

$$\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{1};\mathbf{od},\mathbf{od})=(w-1)/2, \tag{2.1}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{od};\mathbf{od},\mathbf{1})=(w-1)/2, \tag{2.2}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}}H_w(\mathbf{ev};\mathbf{ev},\mathbf{1})=(w-1)/2. \tag{2.3}$$

ここで $J_!(a;b,c) \coloneqq a!b!c!J(a;b,c)$, $J_!(s) \coloneqq s!\zeta^{\mathfrak{m}}(s+1)$ に対して，

$$\begin{aligned}
J_!(1;w-2m-2,2m+1) &= \sum_{n=0}^{(w-3)/2} \left(-\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n} - \binom{2m+1}{2n} \right) J_!(2n+1)J_!(w-2n-1), \\
J_!(2m+1;w-2m-2,1) &= \sum_{n=0}^{(w-3)/2} \left(-\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n-2m} - \binom{2m+1}{2n} \right) J_!(2n+1)J_!(w-2n-1), \\
J_!(w-1-2m;2m,1) &= \sum_{n=1}^{(w-1)/2} \left(\binom{2s-2m}{2s-2n} - \binom{2m}{2n-1} - \delta_{m,n} \right) J_!(2n)J_!(w-2n)
\end{aligned}$$

となることに注意すると，(2.1), (2.2), (2.3) はそれぞれ次の予想に同値である．

予想 6. w を 3 以上の奇数とするとき

$$C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(w) = \det \left(-\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n} - \binom{2m+1}{2n} \right)_{\substack{0 \le m \le (w-3)/2 \\ 0 \le n \le (w-3)/2}} \neq 0.$$

予想 7. w を 3 以上の奇数とするとき

$$C_{\mathrm{od},\mathrm{od},1}(w) = \det \left(-\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n-2m} - \binom{2m+1}{2n} \right)_{\substack{0 \le m \le (w-3)/2 \\ 0 \le n \le (w-3)/2}} \neq 0.$$

予想 8. w を 3 以上の奇数とするとき

$$\operatorname{rank} \left(-\delta_{m,n} + \binom{w-1-2m}{w-1-2n} - \binom{2m}{2n-1} \right)_{\substack{0 \le m \le (w-1)/2 \\ 1 \le n \le (w-1)/2}} = (w-1)/2.$$

予想 8 についてはより強く次が予想される．

予想 9. w を 3 以上の奇数とするとき

$$C_{\mathrm{ev},\mathrm{ev},1}(w) = \det \left(-\delta_{m,n} + \binom{w-1-2m}{w-1-2n} - \binom{2m}{2n-1} \right)_{\substack{1 \le m \le (w-1)/2 \\ 1 \le n \le (w-1)/2}} \neq 0.$$

$C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(w)$, $C_{\mathrm{od},\mathrm{od},1}(w)$, $C_{\mathrm{ev},\mathrm{ev},1}(w)$ の具体例は以下の通りである．

$$\begin{aligned}
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(3) &= -1 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(5) &= 4 = 2^2 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(7) &= -6 = -2 \cdot 3 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(9) &= -8 = -2^3 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(11) &= 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(13) &= 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(15) &= -2100 = -2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(17) &= 144896 = 2^9 \cdot 283 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(19) &= -2641320 = -2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(21) &= -34079040 = -2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11833 \\
C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(23) &= 12167614800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 9311,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{od,od},1}(3) &= -1\\
C_{\mathrm{od,od},1}(5) &= 6 = 2\cdot 3\\
C_{\mathrm{od,od},1}(7) &= -90 = -2\cdot 3^2\cdot 5\\
C_{\mathrm{od,od},1}(9) &= 1050 = 2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\\
C_{\mathrm{od,od},1}(11) &= -21000 = -2^3\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7\\
C_{\mathrm{od,od},1}(13) &= 9355500 = 2^2\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\\
C_{\mathrm{od,od},1}(15) &= -998917920 = -2^5\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13\\
C_{\mathrm{od,od},1}(17) &= 1767300935400 = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 326951\\
C_{\mathrm{od,od},1}(19) &= -9539913173590800 = -1\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 17302801\\
C_{\mathrm{od,od},1}(21) &= 32942059080907977000 = 2^3\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 37\cdot 11331989\\
C_{\mathrm{od,od},1}(23) &= -396861213995820493920000 = -2^8\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7\cdot 11^3\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 86969941.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{ev,ev},1}(3) &= -2\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(5) &= 12 = 2^2\cdot 3\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(7) &= -212 = -2^2\cdot 53\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(9) &= 2784 = 2^5\cdot 3\cdot 29\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(11) &= -84240 = -2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 13\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(13) &= 29788800 = 2^7\cdot 3\cdot 5^2\cdot 29\cdot 107\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(15) &= -4516713600 = -2^7\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 67213\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(17) &= 6037524864000 = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7\cdot 41\cdot 2029\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(19) &= -43408510535577600 = -2^{12}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2242916591\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(21) &= 148322427257148641280 = 2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 120157\cdot 956725271\\
C_{\mathrm{ev,ev},1}(23) &= -2323151562762052465766400 = -2^{12}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^4\cdot 11\cdot 131\cdot 162881\cdot 497011.
\end{aligned}
$$

これらの符号に関しては次が予想される．

予想 10 ([1])**.**

$$\mathrm{sgn}(C_{1,\mathrm{od,od}}(w)) = \begin{cases} 1 & w\equiv 1,5,11 \pmod{12},\\ -1 & w\equiv 3,7,9 \pmod{12}.\end{cases}$$

予想 11 ([1])**.**

$$\mathrm{sgn}(C_{\mathrm{od,od},1}(w)) = (-1)^{(w-1)/2}.$$

予想 12.

$$\mathrm{sgn}(C_{\mathrm{ev,ev},1}(w)) = (-1)^{(w-1)/2}.$$

$C_{1,\mathrm{od,od}}(w)$ や $C_{\mathrm{od,od},1}(w)$ の 2-order についていくつかの観察を述べる．

予想 13. $w\in 3+4\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\mathrm{ord}_2(C_{1,\mathrm{od,od}}(w)) = \lfloor (w+1)/6\rfloor .$$

予想 14. $w\in 5+4\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\mathrm{ord}_2(C_{\mathrm{od,od},1}(w)) = \lfloor (w+1)/6\rfloor .$$

より一般の w に対しても規則性を見出すことは可能である．ここでは，$\mathrm{ord}_2(C_{1,\mathrm{od,od}}(w))$ の場合に観察として述べておこう．

事実 15. w を 3 以上 *700* 以下の奇数とする．このとき

$$\mathrm{ord}_2(C_{1,\mathrm{od,od}}(w)) = \begin{cases} \frac{w-1}{2}\left(\frac{4}{3} - A_{\mathrm{ord}_2(w-1)}\right) + c & w\equiv 1 \pmod 4,\\ \lfloor (w+1)/6\rfloor & w\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

ここで

$$A_m = \begin{cases} \frac{5}{3\cdot 2^{2m/3}} & m \in 0+3\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \frac{5}{3\cdot 2^{(2m+1)/3}} & m \in 1+3\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \frac{1}{3\cdot 2^{(2m-7)/3}} & m \in 2+3\mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{cases}$$

であり，c は $\mathrm{ord}_2(C_{1,\mathrm{od},\mathrm{od}}(w))$ の整数性から自動的に定まる $\{0, 2/3, -2/3\}$ の元である．

References

[1] Minoru Hirose. Modular phenomena for regularized double zeta values. *Israel Journal of Mathematics*, (to be appeared).
[2] Jiangtao Li and Fei Liu. Motivic double zeta values of odd weight. *Manuscripta Math.*, 166(1-2):19–36, 2021.
[3] D. Zagier. Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$. *Ann. of Math. (2)*, 175(2):977–1000, 2012.

(Minoru Hirose) Institute for Advanced Research, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602, Japan
Email address: minoru.hirose@math.nagoya-u.ac.jp