polycosecant 数が持つ duality のある一般化について

東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻　西廣 響介
Kyosuke Nishibiro
Department of Mathematical Sciences, Graduate School of Science,
Tokyo Metropolitan University

概要

polycosecant 数, polycotangent 数は poly-Bernoulli 数のレベル 2 類似の一つとして定義された数列である．本稿では, polycosecant 数, polycotangent 数がもつ, poly-Bernoulli 数に類似する性質, また polycosecant 数が持つ duality の一般化となる性質を持つ数列について述べる．

1 Polycosecant 数, polycotangent 数の定義と性質

本章では, polycosecant 数, polycotangent 数の定義, 及びそれらが満たす関係式について述べる．また比較のため, poly-Bernoulli 数の性質についても述べる．

定義 1.1. *poly-Bernoulli* 数 $B_n^{(k)}, C_n^{(k)}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z})$ はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!},$$
$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-x})}{e^{x}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

で定義される．ただし, $\mathrm{Li}_k(z)$ は次で定義される級数である：

$$\mathrm{Li}_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \quad (|z|<1).$$

特に, $B_n^{(k)}, C_n^{(k)} \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z})$, また $B_n^{(-l)}, C_n^{(-l)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ となることが知られている．これら 2 つの数列は duality と呼ばれる性質を持つことが知られている (詳細は次節を参照).

定理 1.2. $n, l \in \mathbb{Z} \geq 0$ に対し,

$$B_n^{(-l)} = B_l^{(-n)}, \tag{1}$$
$$C_n^{(-l-1)} = C_l^{(-n-1)} \tag{2}$$

となる．

polycosecant 数 $D_n^{(k)}$, polycotangent 数 $\beta_n^{(k)}$ はこれらのレベル 2 類似の一つとされている数列である．

定義 1.3. [3, 4] polycosecant 数 $D_n^{(k)}$, polycotangent 数 $\beta_n^{(k)}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z})$ はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{A}_k(\tanh(t/2))}{\sinh t} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(k)} \frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{\mathrm{A}_k(\tanh(t/2))}{\tanh t}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(k)}\frac{t^n}{n!}$$

で定義される．ただし，$\mathrm{A}_k(z)$ は次で定義される級数である：

$$\mathrm{A}_k(z):=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)^k}=\mathrm{Li}_k(z)-\mathrm{Li}_k(-z)\quad(|z|<1).$$

poly-Bernoulli 数同様, $D_n^{(k)},\beta_n^{(k)}\in\mathbb{Q}$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},k\in\mathbb{Z})$, また $D_n^{(-l)},\beta_n^{(-l)}\in\mathbb{Z}$ $(l,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ となることが知られている．また, これら 2 つの数列はその母関数が偶関数となることから,

$$D_{2n+1}^{(k)}=0,\quad \beta_{2n+1}^{(k)}=0\ (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},k\in\mathbb{Z})$$

となることがわかる (従って, 本稿では下指数が偶数の場合を扱っている)．これら 2 つの関係として, 母関数に $\cosh t$ 倍の違いがあるので, Euler 数

$$\frac{1}{\cosh t}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}$$

を用いて,

$$\beta_{2n}^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}D_{2i}^{(k)},$$
$$D_{2n}^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}E_{2n-2i}\beta_{2i}^{(k)}$$

となることがわかる．これら以外にも帰納的関係式は複数知られているが, 本稿では $B_n^{(k)},C_n^{(k)},D_n^{(k)},\beta_n^{(k)}$ のすべてが満たす漸化式を挙げる (その他の関係式について, 例えば [7], [11] に記述がある).

定義 1.4. $m,n\in\mathbb{Z}$ に対し, 第一種 *Stirling* 数 $\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$, 第二種 *Stirling* 数 $\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}$ はそれぞれ漸化式

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\m\end{bmatrix}=0,$$
$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}n\\m-1\end{bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}=1,\begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\m\end{Bmatrix}=0,$$
$$\begin{Bmatrix}n\\m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}n-1\\m-1\end{Bmatrix}+m\begin{Bmatrix}n-1\\m\end{Bmatrix}$$

により与えられる.

命題 1.5. $k\in\mathbb{Z}$, $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ かつ $m>2n$ とする．このとき, $D_{2n}^{(k)},\beta_{2n}^{(k)}$ は次の漸化式を満たす:

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{bmatrix}m+1\\j+1\end{bmatrix}D_{2n}^{(-k-j)}=0,\tag{3}$$
$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{bmatrix}m+1\\j+1\end{bmatrix}\beta_{2n}^{(-k-j)}=0.\tag{4}$$

注意 1.1. $C_n^{(k)}$ がこの漸化式を満たすことは [10] で, $B_n^{(k)}$ がこの漸化式を満たすことは [2] で示されている.

この漸化式は, k の取り方で上の指数が正負いずれの場合も出てくるように出来る.

例 1.1. $k=-2, n=2, m=5$ とすると, $D_4^{(2)}=\frac{176}{225}, D_4^{(1)}=\frac{7}{15}, D_4^{(0)}=0, D_4^{(-1)}=1, D_4^{(-2)}=16, D_4^{(-3)}=121$ であり,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\begin{bmatrix}6\\j+1\end{bmatrix}D_4^{(2-j)}&=\frac{1408}{15}-\frac{1918}{15}+0-85+240-121\\&=0\end{aligned}$$

となる. 同様に, $\beta_4^{(2)}=-\frac{199}{225}, \beta_4^{(1)}=-\frac{8}{15}, \beta_4^{(0)}=1, \beta_4^{(-1)}=8, \beta_4^{(-2)}=41, \beta_4^{(-3)}=200$ であり,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\begin{bmatrix}6\\j+1\end{bmatrix}\beta_4^{(2-j)}&=-\frac{1592}{15}+\frac{2192}{15}+225-680+615-200\\&=0\end{aligned}$$

となる.

明示式についても複数知られているが, 例えば次のような式がある.

命題 1.6. $n,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$D_{2n}^{(-k)}=\sum_{i=1}^{\min\{2n+1,k\}}\frac{i!(i-1)!}{2^{i-1}}\left\{{k \atop i}\right\}\left\{{2n+1 \atop i}\right\}$$

となる.

同様の議論を用いると, $\beta_{2n}^{(-k)}$ について次のような式が得られる.

命題 1.7. $n,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\begin{aligned}\beta_{2n}^{(-k)}=&\sum_{j=0}^{\min\{2n,k-1\}}\frac{j!(j+1)!}{2^{j+1}}\left\{{2n \atop j}\right\}\left\{{k \atop j+1}\right\}+\sum_{j=0}^{\min\{2n-1,k-1\}}\frac{\{(j+1)!\}^2}{2^{j+1}}\left\{{2n \atop j+1}\right\}\left\{{k \atop j+1}\right\}\\&+\sum_{j=0}^{\min\{2n-1,k-1\}}\frac{(j+1)!(j+2)!}{2^{j+1}}\left\{{2n \atop j+2}\right\}\left\{{k \atop j+1}\right\}+\sum_{j=0}^{\min\{2n,k-1\}}\frac{j!(j+1)!}{2^{j+1}}\left\{{2n+1 \atop j+1}\right\}\left\{{k \atop j+1}\right\}.\end{aligned}$$

合同関係式について, poly-Bernoulli 数の場合次の Kummer 型合同式が示されている. 以降では, φ を Euler の φ 関数とする.

定理 1.8 ([12, Theorem 6.1])**.** *p: 奇素数, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m,n,N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}: m\equiv n \bmod \varphi(p^N)$ かつ $m,n\geq N$ とすると*

$$\begin{aligned}B_n^{(-k)}&\equiv B_m^{(-k)} \bmod p^N,\\C_n^{(-k)}&\equiv C_m^{(-k)} \bmod p^N\end{aligned}$$

となる.

この定理と同様の関係式が $D_n^{(-k)}, \beta_n^{(-k)}$ に対しても成立することが示せる.

定理 1.9. *p: 奇素数, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, m,n,N\in\mathbb{Z}_{\geq 1}: 2m\equiv 2n \bmod \varphi(p^N)$ かつ $2m,2n\geq N$ とすると*

$$\begin{aligned}D_{2m}^{(-k)}&\equiv D_{2n}^{(-k)} \bmod p^N,\\\beta_{2m}^{(-k)}&\equiv \beta_{2n}^{(-k)} \bmod p^N\end{aligned}$$

となる.

$D_{2n}^{(-2k-1)}$ の場合に対する Kummer 型合同式は Pallewatta により示されていた ([11, Theorem 3.12]). 上の指数が負の奇数のみである理由は, 後述の $D_{2n}^{(-2k-1)}$ の duality を証明中で用いていることによる. この定理の証明では, 第 2 種 Stirling 数に関する次の関係式と, $D_{2n}^{(-k)}, \beta_{2n}^{(-k)}$ の明示式を用いることで duality によらない証明を行った.

補題 1.10. *p: 奇素数, $m, n, N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : m \equiv n \bmod \varphi(p^N)$ かつ $m, n \geq N$ とすると*

$$j!\left\{ n \atop j \right\} \equiv j!\left\{ m \atop j \right\} \bmod p^N$$

となる.

注意 1.2.

$$D_{2n}^{(1)} = (2 - 2^{2n})B_{2n}, \tag{5}$$
$$\beta_{2n}^{(1)} = 2^{2n}B_{2n}, \tag{6}$$

となるので, 上の指数が 1 の場合, $n, m, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : 2n \equiv 2m \bmod \varphi(p^N)$ かつ $(p-1) \nmid 2n$ に対し

$$(1 - p^{2n-1})\frac{D_{2n}^{(1)}}{2n} \equiv (1 - p^{2m-1})\frac{D_{2m}^{(1)}}{2m} \bmod p^N,$$
$$(1 - p^{2n-1})\frac{\beta_{2n}^{(1)}}{2n} \equiv (1 - p^{2m-1})\frac{\beta_{2m}^{(1)}}{2m} \bmod p^N$$

と, 通常の *Bernoulli* 数に対する *Kummer* 合同式と同様の関係式が成立することがわかる.

例 1.2. $p = 3, m = 2, n = 5, k = 3, N = 2$ とすると, $D_4^{(-3)} = 121, D_{10}^{(-3)} = 88573$ となり,

$$D_4^{(-3)} \equiv D_{10}^{(-3)} \equiv 4 \bmod 9$$

となる. 同様に, $\beta_4^{(-3)} = 200, \beta_{10}^{(-3)} = 786944$ となり,

$$\beta_4^{(-3)} \equiv \beta_{10}^{(-3)} \equiv 2 \bmod 9$$

となる.

よってあるところから先では p^N を法として周期 $\varphi(p^N)$ を持つことがわかる. その周期の終端部に関して, 例えば $N = 1$ の場合, 次が知られている.

命題 1.11. [9] *p: 奇素数, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し*

$$B_{p-1}^{(-k)} \equiv \begin{cases} 1 \bmod p & (k = 0 \ \text{ or } \ p-1 \nmid k), \\ 2 \bmod p & (k \neq 0 \ \text{ and } \ p-1 \mid k), \end{cases}$$
$$C_{p-2}^{(-k-1)} \equiv \begin{cases} 0 \bmod p & (p-1 \nmid k), \\ 1 \bmod p & (p-1 \mid k) \end{cases}$$

となる.

(1), (2) から, 命題 1.11 は

$$B_k^{(-p+1)} \equiv \begin{cases} 1 \bmod p & (k = 0 \ \text{ or } \ p-1 \nmid k), \\ 2 \bmod p & (k \neq 0 \ \text{ and } \ p-1 \mid k), \end{cases} \qquad C_k^{(-p+1)} \equiv \begin{cases} 0 \bmod p & (p-1 \nmid k), \\ 1 \bmod p & (p-1 \mid k) \end{cases}$$

と書けることがわかる. この周期の終端部に関して, 同様の関係式が $D_{2n}^{(-k)}, \beta_{2n}^{(-k)}$ についても成立する.

命題 1.12. p: 奇素数, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$D_{2n}^{(-p+1)} \equiv \begin{cases} 0 \bmod p & (p-1 \nmid 2n), \\ 1 \bmod p & (p-1 \mid 2n), \end{cases}$$
$$\beta_{2n}^{(-p+1)} \equiv \begin{cases} 1 \bmod p & (2n = 0 \ \text{ or } \ p-1 \nmid 2n), \\ 2 \bmod p & (2n \neq 0 \ \text{ and } \ p-1 \mid 2n) \end{cases}$$

となる.

また, 一周期分足し上げた値については次が知られている.

定理 1.13 ([12, Theorem 6.10])**.** p: 奇素数, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n, N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : n \geq N$ に対し

$$\sum_{i=0}^{\varphi(p^N)-1} B_n^{(-k-i)} \equiv 0 \bmod p^N \tag{7}$$

となる.

この式に類似する関係式は次のようになる. 数列 $T_{2n+1}, \widetilde{T}_{2n}$ をそれぞれ

$$\tan t = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\widetilde{T}_{2n} = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ (-1)^{n-1} T_{2n+1} & (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \end{cases}$$

と定めておく. 特に, Bernoulli 数との関係として

$$T_{2n+1} = \begin{cases} 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} & (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}), \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

が成立することが知られている (詳細は [8] を参照).

命題 1.14. p: 奇素数, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k, N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : k \geq N$ に対し

$$\sum_{i=0}^{\varphi(p^N)-1} C_n^{(-k-i)} \equiv (-1)^n \varphi(p^N) \bmod p^N, \tag{8}$$
$$2^{2n} \sum_{i=0}^{\varphi(p^N)-1} D_{2n}^{(-k-i)} \equiv (-1)^n T_{2n+1} \varphi(p^N) \bmod p^N, \tag{9}$$
$$2^{2n} \sum_{i=0}^{\varphi(p^N)-1} \beta_{2n}^{(-k-i)} \equiv \widetilde{T}_{2n} \varphi(p^N) \bmod p^N \tag{10}$$

となる. 従って

$$\sum_{i=0}^{\varphi(p^N)-1} D_{2n}^{(-k-i)} \equiv 0 \bmod p^{N-1},$$
$$\sum_{i=0}^{\varphi(p^N)-1} \beta_{2n}^{(-k-i)} \equiv 0 \bmod p^{N-1}$$

となる.

例 1.3. $p=3, n=3, k=3, N=2$ とすると, $D_6^{(-3)}=1093, D_6^{(-4)}=12160, D_6^{(-5)}=111721, D_6^{(-6)}=927424, D_6^{(-7)}=7256173, \beta_6^{(-8)}=54726400, T_7=272$ となり,

$$2^6\sum_{i=0}^{5}D_6^{(-3-i)}\equiv 6\equiv -272\times 6 \bmod 9$$

となる. また, $\beta_6^{(-3)}=3104, \beta_6^{(-4)}=23801, \beta_6^{(-5)}=174752, \beta_6^{(-6)}=1257125, \beta_6^{(-7)}=8948384, \beta_6^{(-8)}=63318641, \widetilde{T}_7=272$ となり,

$$2^6\sum_{i=0}^{5}\beta_6^{(-3-i)}\equiv 3\equiv 272\times 6 \bmod 9$$

となる.

ここまでは, 上指数が負の polycosecant 数などの性質を見てきた. 上指数が正の場合, poly-Bernoulli 数について, Clausen von-Staudt 型定理が知られている.

定理 1.15 ([1, Theorem 14.7])**.** *p: 素数, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}, n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(k+2\leq p\leq n+1)$ に対し,*

1. *$(p-1)\mid n$ の場合, $p^kB_n^{(k)}\in\mathbb{Z}_{(p)}$ となり,*

$$p^kB_n^{(k)}\equiv -1 \bmod p$$

となる.

2. *$(p-1)\nmid n$ の場合, $p^{k-1}B_n^{(k)}\in\mathbb{Z}_{(p)}$ となり,*

$$p^{k-1}B_n^{(k)}\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{p}\left\{{n \atop p-1}\right\}-\dfrac{n}{2^k}\bmod p & (n\equiv 1 \bmod p-1),\\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{p}\left\{{n \atop p-1}\right\}\bmod p & (otherwise)\end{cases}$$

となる.

polycosecant 数, polycotangent 数についても同様の定理が成立する.

定理 1.16. *p: 奇素数, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ $(k+2\leq p\leq 2n+1)$ に対し,*

1. *$(p-1)\mid 2n$ の場合, $p^kD_{2n}^{(k)}, p^k\beta_{2n}^{(k)}\in\mathbb{Z}_{(p)}$ となる. 特に,*

$$p^kD_{2n}^{(k)}\equiv p^k\beta_{2n}^{(k)}\equiv -1 \bmod p$$

となる.

2. *$(p-1)\nmid 2n$ の場合, $p^{k-1}D_{2n}^{(k)}, p^{k-1}\beta_{2n}^{(k)}\in\mathbb{Z}_{(p)}$ となる. 特に,*

$$p^{k-1}D_{2n}^{(k)}\equiv -\frac{1}{p}\left\{{2n \atop p-1}\right\}+\sum_{\substack{l=p\\ l\equiv 1 \bmod p-1}}^{2n}\binom{2n+1}{l}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j j!}{2^{j+1}}\left\{{\alpha \atop j+1}\right\}\bmod p,$$

$$p^{k-1}\beta_{2n}^{(k)}\equiv -\frac{1}{p}\left\{{2n \atop p-1}\right\}+\sum_{\substack{l=p\\ l\equiv 1 \bmod p-1}}^{2n}\binom{2n+1}{l}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j j!}{2^{j+1}}\left\{{\alpha \atop j+1}\right\}$$
$$+\sum_{j=p}^{\gamma}\frac{(-1)^j}{2^j}\frac{(j+2)!}{p}\left\{{2n \atop j+2}\right\}\binom{j+1}{p}\bmod p$$

となる. ただし, $\alpha\in\mathbb{Z}$ は $2n$ を $p-1$ で割った際の剰余, $\gamma=\min\{2n, 2p-3\}$ とした.

2 Symmetrized polycosecant 数の定義と性質

本章では, symmetrized polycosecant 数の定義と性質について述べる. はじめに, 先行研究である symmetrized poly-Bernoulli 数について触れる.

定義 2.1 ([5, Section2])**.** $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, *symmetrized poly-Bernoulli* 数 $\{\mathscr{B}_m^{(-l)}(n)\}$ は

$$\mathscr{B}_m^{(-l)}(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} B_m^{(-l-j)}(n)$$

で定義される. ただし, $B_m^{(k)}(x)$ は

$$e^{-xt}\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} \ (k \in \mathbb{Z})$$

で定義される *poly-Bernoulli* 多項式である.

簡単な計算から, $n=0$ の場合 $\mathscr{B}_m^{(-l)}(0) = B_m^{(-l)}$, $n=1$ の場合 $\mathscr{B}_m^{(-l)}(1) = C_m^{(-l-1)}$ となることがわかる. この $\mathscr{B}_m^{(-l)}(n)$ について, 次の duality が成立することが示されている.

定理 2.2 ([5, Corollary 2.2])**.** $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\mathscr{B}_m^{(-l)}(n) = \mathscr{B}_l^{(-m)}(n)$$

となる.

この定理は poly-Bernoulli 数の duality の一般化となっている. 実際, 上の例から $n=0$ の場合は $B_m^{(-l)}$ の duality (1) が, $n=1$ の場合は $C_m^{(-l)}$ の duality (2) が導かれることがわかる. 一方, $D_m^{(-l)}, \beta_m^{(-l)}$ の duality は次の形で成立することが示されている.

定理 2.3. [3, 11] $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$D_{2m}^{(-2l-1)} = D_{2l}^{(-2m-1)}, \tag{11}$$

$$\beta_{2m}^{(-2l)} = \beta_{2l}^{(-2m)} \tag{12}$$

となる.

$B_m^{(-l)}, C_m^{(-l)}$ に対する $\mathscr{B}_m^{(-l)}(n)$ が存在するので, $D_{2m}^{(-l)}, \beta_{2m}^{(-l)}$ についても似たような性質を示す数列が存在するのではないか, と考えたのが symmetrized polycosecant 数である. しかし, $\beta_{2m}^{(l)}$ を特殊値として持つゼータ関数が定義されていないので, [5, Section 3] のような議論はできない. そこで, duality の証明の手法の一つである, 2 変数型母関数に着目した.

定理 2.4 ([5, Theorem 2.1])**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathscr{B}_m^{(-l)}(n)\frac{x^l}{l!}\frac{y^m}{m!} = \frac{n!e^{x+y}}{(e^x+e^y-e^{x+y})^{n+1}}$$

となる.

定理 2.5. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} D_{2m}^{(-2l-1)} \frac{x^{2l}}{(2l)!}\frac{y^{2m}}{(2m)!} = \frac{n!e^{x+y}}{(1+e^x+e^y-e^{x+y})^2} + \frac{n!e^{-x+y}}{(1+e^{-x}+e^y-e^{-x+y})^2} + \frac{n!e^{x-y}}{(1+e^x+e^{-y}-e^{x-y})^2} + \frac{n!e^{-x-y}}{(1+e^{-x}+e^{-y}-e^{-x-y})^2}$$

となる.

この母関数表示を足がかりに定義したものが symmetrized polycosecant 数 $\mathfrak{D}_m^{(-l)}(n)$ である.

定義 2.6. $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $D_m^{(-l)}(n)$ を

$$\frac{1}{2}(e^t+1)^{1-n}\frac{\mathrm{Li}_{-l}(\tanh(t/2))}{\sinh t} + \frac{1}{2}(e^{-t}+1)^{1-n}\frac{\mathrm{Li}_{-l}(-\tanh(t/2))}{\sinh(-t)} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(-l)}(n)\frac{t^m}{m!} \tag{13}$$

で定義し, *symmetrized polycosecant* 数 $\mathfrak{D}_m^{(-l)}(n)$ を

$$\mathfrak{D}_m^{(-l)}(n) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_m^{(-l-j)}(n)$$

で定義する.

母関数が偶関数となるので, $\mathfrak{D}_{2m+1}^{(-l)}(n) = 0$ $(m, l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ となることがわかる. また, 次の定理から, $\mathfrak{D}_{2m}^{(-l)}(n)$ の duality がわかる.

定理 2.7. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{D}_{2m}^{(-2l)}(n) \frac{x^{2l}}{(2l)!}\frac{y^{2m}}{(2m)!} = \frac{n!e^{x+y}}{(1+e^x+e^y-e^{x+y})^{n+1}} + \frac{n!e^{-x+y}}{(1+e^{-x}+e^y-e^{-x+y})^{n+1}} + \frac{n!e^{x-y}}{(1+e^x+e^{-y}-e^{x-y})^{n+1}} + \frac{n!e^{-x-y}}{(1+e^{-x}+e^{-y}-e^{-x-y})^{n+1}}$$

となる. 従って, $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\mathfrak{D}_{2m}^{(-2l)}(n) = \mathfrak{D}_{2l}^{(-2m)}(n)$$

となる.

例として, $n = 1$ の場合, 定義から $\mathfrak{D}_{2m}^{(-l)}(1) = \frac{1}{2}D_{2m}^{(-l-1)}$ となり, 定理 2.7 から通常の polycosecant 数の duality の式 (11) が導かれる. $n = 0$ の場合を見るために, 次の命題を用意する.

命題 2.8. $l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\mathfrak{D}_{2m}^{(-l)}(n) = \frac{n!}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\min\{2m,l\}} \frac{(j!)^2}{2^{j-1}} \binom{j+n}{n} \left\{ \begin{matrix} 2m+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\}$$

となる.

この式と 命題 1.6, 1.7 から, 次のことがわかる.

命題 2.9. $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$\mathfrak{D}_{2m}^{(-2l)}(0) = \frac{1}{2}\left(\beta_{2m}^{(-2l)} + D_{2m}^{(-2l)} + D_{2l}^{(-2m)}\right)$$

となる.

従って, 定理 2.7 から,

$$\begin{aligned}\beta_{2m}^{(-2l)} + D_{2m}^{(-2l)} + D_{2l}^{(-2m)} &= \beta_{2l}^{(-2m)} + D_{2l}^{(-2m)} + D_{2m}^{(-2l)} \\ \longrightarrow \beta_{2m}^{(-2l)} &= \beta_{2l}^{(-2m)}\end{aligned}$$

となり, (12) が導かれることがわかる. また, 命題 2.8 から, $\beta_{2m}^{(-l)}$ の duality が直ちに分かるような明示式が得られる.

系 2.10. $m, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : 2m + l > 0$ に対し,

$$\beta_{2m}^{(-l)} = \sum_{j=0}^{\min\{2m,l\}} \frac{(j!)^2}{2^j} \left(\left\{ {2m+1 \atop j+1} \right\} \left\{ {l \atop j} \right\} + \left\{ {2m \atop j} \right\} \left\{ {l+1 \atop j+1} \right\} \right)$$

となる.

また,

$$\sum_{i=0}^{l} \left[{l+1 \atop i+1} \right] \mathfrak{D}_{2m}^{(i)}(n) = \frac{l!n!}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\min\{2m,l\}} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)}{2^{j-1}} \left\{ {2m+1 \atop j+1} \right\} \binom{l+1}{j+1}$$

となることと (3) から, 次の関係式がわかる.

命題 2.11. $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $l > 2m$ とする. この時,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \left[{l+1 \atop 2i+1} \right] D_{2i}^{(-2m-1)} = A_{2m}(l)$$

となる. ただし, $A_{2m}(l)$ は次から定まる整数である.

$$\frac{(l+1)!}{2^{l+1}} e^t (e^t + 1)^l = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(l) \frac{t^m}{m!}.$$

また, より直接的に次を示すこともできる.

命題 2.12. $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $l > m$ とする. この時,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \left[{l+1 \atop 2i+1} \right] D_{2i}^{(-m-1)} = A_m(l)$$

となる.

例 2.1. $l = 6, m = 3$ の時, $D_0^{(-4)} = 1, D_2^{(-4)} = 40, D_4^{(-4)} = 736, D_6^{(-4)} = 12160$ であり,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} \left[{7 \atop 2i+1} \right] D_{2i}^{(-4)} &= 720 \times 1 + 1624 \times 40 + 175 \times 736 + 1 \times 12160 \\ &= 206640\end{aligned}$$

となり, これは $\frac{7!}{2^7} e^t (e^t + 1)^6$ の展開項の, $\frac{t^3}{3!}$ の係数と一致する.

最後に, polycosecant 数, polycotangent 数に関する今後の課題をいくつか挙げる.

- $\beta_n^{(k)}$ を特殊値として持つ Arakawa-Kaneko 型ゼータ関数をどのように構成するか ($D_n^{(k)}$ を特殊値として持つものは [6] で定義されている).

- $\mathfrak{D}_{2m}^{(-l)}(n)$ に組合せ論的解釈は存在するか ($\mathscr{B}_m^{-l}(n)$ の組合せ論的解釈については, 例えば [2] などに記述がある).

注意として, $D_{2m}^{(-l)}$ についてはその明示公式から, 例えば, 次のような対象の数え上げと一致することがわかる. $2n \times k$ Callan permutation ($2n$ 個の要素は通常の数字であるとし, k 個の要素は下線付きであるとする) を考える. 各部分列は一つの数字と同一視できるので, 同一視した数字の大小で各部分列を小さい順に番号付けしておく. ただし, 後述するダミーを含む部分列には番号付けをしない.

命題 2.13. 上の設定において, 下線付きの部分列で始まる *Callan permutation* のうち, 下線付きの部分列, 無地の部分列ともに $2m$ 番目のものが $2m-1$ 番目より右側にあるものの個数を $RC_{2n}^{(k)}$ とすると

$$RC_{2n}^{(k)} = D_{2n}^{(-k)}$$

となる.

注意 2.1. これは隣り合う $(2m-1, 2m)$ に関する条件なので, 例えば 1 番目と 3 番目や 1 番目と 4 番目などの順番は問わない. また, 無地の部分列と下線付きの部分列の番号付けによる順番も問わない.

例 2.2. $D_2^{(-3)}$ について, 先のルールを適用して数えられる *Callan permutation* は次のとおりである:

- $i=1$ の場合:$\underline{123}12$.
- $i=2$ の場合 : $\underline{3}1\underline{12}2$, $\underline{1}1\underline{23}2$, $\underline{2}1\underline{13}2$, $\underline{3}2\underline{12}1$, $\underline{1}2\underline{23}1$, $\underline{2}2\underline{13}1$, $\underline{1}12\underline{23}$, $\underline{2}12\underline{13}$, $\underline{3}12\underline{12}$.
- $i=3$ の場合 : $\underline{1}1\underline{2}2\underline{3}$, $\underline{1}1\underline{3}2\underline{2}$, $\underline{3}1\underline{1}2\underline{2}$.

これらは合計 13 個あり, 確かに $D_2^{(-3)} = 13$ と一致する.

謝辞

2022 年度 RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」での講演機会をくださり, また本稿の作成に際し推敲をしていただきました世話人の田坂浩二先生, 旅費の支援並びに関係式に関する示唆をいただきました金子昌信先生, また指導教員として多くの助言と指導をしていただいている津村博文先生に心より感謝申し上げます. 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2139 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko, *Bernoulli numbers and Zeta Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Tokyo, 2014. With an appendix by Don Zagier.

[2] B. Bényi and T. Matsusaka, *On the combinatorics of symmetrized poly-Bernoulli numbers*, Electron. J. Combin. **28** (2021), no. 1, 20pp.

[3] M. Kaneko, Y. Komori, and H. Tsumura, *On Arakawa-Kaneko zeta-functions associated with* $GL_2(\mathbb{C})$ *and their functional relations* II, in preparation.

[4] M. Kaneko, M. Pallewatta, and H. Tsumura, *On polycosecant numbers*, J. Integer Seq. **23** (2020), no. 6, 17pp.

[5] M. Kaneko, F. Sakurai, and H. Tsumura, *On a duality formula for certain sums of values of poly-Bernoulli polynomials and its application*, J. Théor. Nombres Bordeaux **30** (2018), no. 1, 203–218.

[6] M. Kaneko and H. Tsumura, *Zeta functions connectiong multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers*, Advanced Studies of Pure Mathematics **84** (2020), 181–204.

[7] K. Nishibiro, *On some properties of polycosecant numbers and polycotangent numbers*, to appear in Comment. Math. Univ. St. Pauli.

[8] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer Verlag, 1924.

[9] Y. Ohno and M. Sakata, *On certain properties of poly-Bernoulli numbers with negative index*, J. School sci. Eng. **49** (2013), 5–7.

[10] Y. Ohno and Y. Sasaki, *Recursion formulas for poly-Bernoulli numbers and their applications*, Int. J. Number Theory **17** (2021), no. 1, 175–189.

[11] M. Pallewatta, *On polycosecant numbers and level Two generalization of Arakawa-Kaneko zeta functions*, Kyushu University, doctor thesis (2020).

[12] M. Sakata, *On p-adic properties of poly-Bernoulli numbers (in Japanese)*, Kindai University, master thesis (2012).