# 正標数の数論における $\infty$ 進及び $v$ 進多重ゼータ関数について

名古屋大学 多元数理科学研究科
松月大知
Daichi Matsuzuki
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

2022 年 11 月 30 日

## 1 導入

本稿では論文 [9] で得られた結果を報告する．具体的には, Furusho, Komori, Matsumoto, Tsumura による $p$ 進多重 $L$ 関数の理論 ([4]) の正標数類似を考える．またこれにより $\infty$ 進ゼータ関数 (Carlitz-Goss ゼータ関数とも呼ばれる) と $v$ 進ゼータ関数に関する Goss の理論 ([5]) の多重化を与える．$p$ 進 $L$ 関数は複素 $L$ 関数の負の整数点における特殊値を $p$ 進補間する $p$ 進連続関数である．$p$ 進積分の理論を用いることによってこの $p$ 進 $L$ 関数を構成できることが知られている．[4] では $p$ 進積分による $p$ 進 $L$ 関数の構成を多重化することで $p$ 進多重 $L$ 関数が定義された．さらに $p$ 進多重 $L$ 関数が複素多重ゼータ関数の特殊値を $p$ 進的に補間することが確かめられている．一方正標数の数論に於いては，Goss により Riemann ゼータ関数及び $p$ 進 $L$ 関数の正標数類似物としてそれぞれ $\infty$ 進ゼータ関数と $v$ 進ゼータ関数が導入されている ($v$ は $\infty$ と異なる素点)．正標数の数論においても $v$ 進ゼータ関数は $\infty$ 進ゼータ関数の負の整数点における特殊値を $v$ 進補間している．また Goss はこれらの関数の $v$ 進積分表示を得た ([5])．[1] において $\infty$ 進ゼータ関数の多重化である $\infty$ 進多重ゼータ関数と，$v$ 進ゼータ関数の多重化である $v$ 進多重ゼータ関数が導入されている．

第 2 節で [4] にて展開された $p$ 進多重 $L$ 関数に関する理論，及び Goss による正標数におけるゼータ関数の理論を復習する．第 3 節で $\infty$ 進多重ゼータ関数及び $v$ 進多重ゼータ関数の負の整数点における特殊値が帰納的な関係式を満たすことを紹介し (定理 3.3, 定理 3.6), さらに $v$ 進多重ゼータ関数が $\infty$ 進多重ゼータ関数の特殊値を $v$ 進補間していることを確認する (定理 3.7)．最後に第 4 節にて $\infty$ 進多重ゼータ関数の特殊値と $v$ 進多重ゼータ関数が $v$ 進積分により書き表せることも紹介する (定理 4.3, 定理 4.4)．応用として $v$ 進多重ゼータ関数の特殊値が満たす Kummer 型の合同式も紹介する (定理 4.6).

## 2 $p$ 進多重 $L$ 関数と Goss のゼータ関数

この節では先行結果である $p$ 進多重 $L$ 関数に関する理論と Goss による正標数におけるゼータ関数の理論を復習する.

### 2.1 $p$ 進多重 $L$ 関数

$\omega$ を Teichmuller 指標とする. まずは Kubota と Leopoldt が導入した $p$ 進 $L$ 関数の定義を振り返る.

**定義 2.1.** 自然数 $k$ に対して $p$ 進 $L$ 関数 $L_p(s, \omega^k)$ を $\mathbb{Z}_p$ 上の連続関数で以下のように複素 $L$ 関数の特殊値を $p$ 進補間するものとして定義する:

$$L_p(1-m, \omega^k) = (1-\omega^{k-m}(p)p^{m-1})L(1-m, \omega^{k-m}), \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

負の整数の集合 $-\mathbb{N}$ が $\mathbb{Z}_p$ の稠密部分集合であることから, 式 (2.1) が $L_p(s, \omega^k)$ を決定していることがわかる.

$p$ 進 $L$ 関数 $L_p(s, \omega^k)$ を構成する方法が複数知られているが, ここでは $p$ 進積分による構成を確認する. Bernoulli 分布 $B_1$ を

$$B_1(a+p^e\mathbb{Z}_p) := \zeta_{\equiv a(p^e)}(0) \quad (0 \le a < p^e)$$

で定義する. ただし $\zeta_{\equiv a(p^e)}(s)$ は次の Dirichlet 級数で定義される部分ゼータ関数である:

$$\zeta_{\equiv a(p^e)}(s) := \sum_{n \equiv a \mod p^e} \frac{1}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

自然数 $c$ で $p$ と互いに素であり, 1 でないものをとる. このとき $\mathfrak{m}_c(x) := B_1(x) - cB_1(c^{-1}x)$ が $\mathbb{Z}_p$ に値をもつ $p$ 進測度になることが知られている [7, II §5]. この $p$ 進測度 $\mathfrak{m}_c$ が以下のように複素 $L$ 関数の特殊値と $p$ 進 $L$ 関数の $p$ 進積分表示を与えることが知られている:

**定理 2.2** (see [8] or [11] for example)**.** 非負整数 $m$ と $p$ 進整数 $s \in \mathbb{Z}_p$ に対して次の式が成り立つ

$$L_p(s, \omega^k) = (\langle c \rangle^{1-s}\omega(c)^k - 1)^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x \rangle^{-s} \omega(x)^{k-1} d\mathfrak{m}_c(x) \quad (s \in \mathbb{Z}_p). \tag{2.2}$$

$$\zeta(-m) = (c^{1+m} - 1)^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} x^m d\mathfrak{m}_c(x) \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{2.3}$$

ただし $\langle x \rangle := x/\omega(x) \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ と定義している.

Furusho, Komori, Matsumoto, Tsumura の 4 人は式 (2.2) を多重化することで $p$ 進多重 $L$ 関数を導入した:

**定義 2.3** ([4, Definition 1.16]). $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}_p,\ k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$ と $c \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して,

$$\begin{aligned} &L_{p,r}(s_1, \ldots, s_r; \omega^{k_1}, \ldots, \omega^{k_r}; c) \qquad (2.4)\\ &:= \int_{X^r} \langle x_1 \rangle^{-s_1} \omega(x_1)^{k_1} \langle x_1 + x_2 \rangle^{-s_2} \omega(x_1+x_2)^{k_2} \cdots \\ &\qquad \cdots \langle x_1 + \cdots + x_r \rangle^{-s_r} \omega(x_1 + \cdots + x_r)^{k_r} d\mathfrak{m}_c(x_1) \cdots d\mathfrak{m}_c(x_r) \end{aligned}$$

とおく. ここで, 積分範囲は以下のように定義される $\mathbb{Z}_p^r$ の部分集合である:

$$X^r := \{(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{Z}_p^r \mid x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_r \in \mathbb{Z}_p^\times\}.$$

**注意 2.4.** 実際には [4] では上記の定義よりも一般化された形で $p$ 進多重 $L$ 関数が導入されている.

$p$ 進多重 $L$ 関数が次のように複素多重ゼータ関数の特殊値を $p$ 進補間することが知られている ([4, Theorem 2.1, Remark 2.2]):

$$\begin{aligned} &L_{p,r}(-m_1, \ldots, -m_r; \omega^{m_1}, \ldots, \omega^{m_r}; c) \qquad (2.5)\\ &= (-1)^{r+m_1+\cdots+m_r} \Biggl\{ \sum_{\substack{\xi_1^c = 1 \\ \xi_1 \neq 1}} \cdots \sum_{\substack{\xi_r^c = 1 \\ \xi_r \neq 1}} \zeta_r(-m_1, \ldots, -m_r; \xi_1, \ldots, \xi_r) \\ &\qquad + (\text{複素ゼータ関数からなるより簡単な項の有限和}) \Biggr\}. \end{aligned}$$

ただし右辺の複素関数 $\zeta_r(s_1, \ldots, s_r; \xi_1, \ldots, \xi_r)$ は

$$\zeta_r(\xi_1, \ldots, \xi_r) := \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2 - n_2} \cdots \xi_r^{n_r - n_{r-1}}}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}$$

で定義される *Lerch* 型複素多重ゼータ関数である ($\Re s_1, \ldots, \Re s_r > 1$, $\xi_1, \ldots, \xi_r$ は 1 の冪根).

式 (2.5) は $p$ 進 $L$ 関数を特徴付けていた (2.1) の多重化とみなすことができる. また次の式が成り立つことが式 (2.5) と同様に示せる:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\xi_1^c = 1 \\ \xi_1 \neq 1}} \cdots \sum_{\substack{\xi_r^c = 1 \\ \xi_r \neq 1}} \zeta_r(-m_1, \ldots, -m_r; \xi_1, \ldots, \xi_r) \qquad (2.6)\\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^r} x_1^{m_1} (x_1 + x_2)^{m_2} \cdots (x_1 + \cdots + x_r)^{m_r} d\mathfrak{m}_c(x_1) \cdots d\mathfrak{m}_c(x_r). \end{aligned}$$

これは式 (2.3) の多重化と言える.

## 2.2 Goss のゼータ関数

素数幂 $q$ を固定し, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の多項式環 $A := \mathbb{F}_q[\theta]$ を考える ($\theta$ は独立変数). 環 $A$ を有理整数環 $\mathbb{Z}$ の正標数類似とみなす. 多項式環 $A$ の元でモニックなものの

集合を $A_+ := \{a \in A \mid a$ はモニック $\}$ と置く．この集合は自然数の集合 $\mathbb{N}$ の類似物とされている．$A$ の商体 $k := \mathbb{F}_q(\theta)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の正標数類似で，その完備化 $k_\infty := \mathbb{F}_q((1/\theta))$ が実数体 $\mathbb{R}$ の類似物である．そして $k_\infty$ の代数閉包を再び完備化した体 $\mathbb{C}_\infty := \hat{\bar{k}}_\infty$ が複素数体 $\mathbb{C}$ の正標数類似物とされている．$X_\infty := \mathbb{C}_\infty^\times \times \mathbb{Z}_p$ と置く． $s = (\sigma, t) \in X_\infty$ と $n \in A_+$ に対し，冪 $n^s$ を $\sigma^{\deg n}(\theta^{-\deg n}n)^t$ で定義する．埋め込み $i \mapsto (\theta^i, i)$ で $\mathbb{Z}$ を $X_\infty$ の部分集合と見做した時，上の意味での整数冪と通常の意味での整数冪が一致することが確かめられる．

Riemann ゼータ関数の正標数類似物が次のように定義されている:

**定義 2.5** ([2, 5])**.** $\infty$ 進ゼータ関数 *(Carlitz-Goss ゼータ関数とも呼ばれる)* を次の式で定める:

$$\zeta_\infty(s) := \sum_{i \geq 0} S_i(s) \in \mathbb{C}_\infty \quad (s \in X_\infty)$$

ただし

$$S_i(s) := \sum_{\substack{n \in A_+, \\ \deg n = i}} \frac{1}{n^s}.$$

正の整数 $m$ に対し, $(q-1)|m$ ならば

$$\zeta_\infty(-m) = 0 \tag{2.7}$$

となることが知られている ([5, Theorem 5.3]). これは Riemann ゼータ関数の自明な零点に対応する現象である．

次に $A$ の素イデアルに対応する素点を考える．多項式環 $A$ 内のモニック既約多項式 $v$ を一つ選び，その次数を $d$ とする．$A_v$, $k_v$ をそれぞれ $A$, $k$ の $v$ 進完備化とする．

$\mathbb{Z}_{d,p} \coloneqq \lim_{e\to\infty} \mathbb{Z}/(q^d-1)q^{de} = \mathbb{Z}/(q^d-1)\times\mathbb{Z}_p$ とおく．$s = (\sigma, t) \in X_v \coloneqq k_v^\times \times \mathbb{Z}_{d,p}$ と $n \in A_v^\times$ に対し，冪を $n^s \coloneqq \sigma^{\deg n} n^t$ で定義する．埋め込み $i \mapsto (1, i)$ で $\mathbb{Z} \subset X_v$ とみなすと上記の意味での整数冪と通常の意味での整数冪が一致する ([5] を参照).

**定義 2.6** ([5, Addendum, Definition 1.1])**.** $v$ 進ゼータ関数 $\zeta_v(s)$ $(s = (\sigma, t) \in X_v)$ は $k_v$ に値をとる $X_v$ 上の関数で次のように定義される:

$$\zeta_v(s) := \sum_{i \geq 0} \tilde{S}_i(s) \in k_v,$$

ただし

$$\tilde{S}_i(s) := \sum_{\substack{n \in A_+ \\ \deg n = i \\ (n,v)=1}} \frac{1}{n^s} \in k_v.$$

$s \in \mathbb{Z}$ であれば,

$$\tilde{S}_i(s) = \begin{cases} S_i(s) - v^{-s} S_{i-d}(s) & (i \geq d) \\ S_i(s) & (i < d) \end{cases} \in k$$

が成り立つ．$v$ 進ゼータ関数が Carlitz ゼータ関数の非正整数点での特殊値を次の様に $v$ 進補間することが知られている ([5, Remark 6.5]):

$$\zeta_v(-s) = (1-v^s)\zeta_\infty(-s) \in k \quad (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \tag{2.8}$$

この式は (2.1) の正標数類似である．

Goss は $\infty$ 進ゼータ関数の特殊値及び $v$ 進ゼータ関数の $v$ 進積分表示を与えた:

**定理 2.7** ([5, Addendum Theorem 2.1])**.** $\mathfrak{m}_v$ を $A_v$ の極大イデアルとする．$\sigma \in k_v \setminus \mathfrak{m}_v$ に対して $A_v$ 上の $v$ 進測度 $\mu^\sigma$ が存在して

$$\zeta_v((\sigma, -t)) = \int_{A_v^\times} x^t \, d\mu^\sigma \quad (t \in \mathbb{Z}_{d,\,p}) \tag{2.9}$$

が成り立つ．さらに $\sigma = 1$ のときには

$$\zeta_\infty(-m) = \int_{A_v} x^m \, d\mu^1 \quad (m \in \mathbb{N}_{\geq 0}) \tag{2.10}$$

が成り立つ．

これらの式はそれぞれ式 (2.2), 式 (2.3) の正標数類似とみなせる．

# 3 負の整数点における特殊値の帰納的公式

$\infty$ 進多重ゼータ関数および $v$ 進多重ゼータ関数の負の整数点における特殊値が帰納的な公式を満たすことをみる．応用として式 (2.8) の一つの多重化を得る．

## 3.1 $\infty$ 進多重ゼータ関数の帰納的公式

**定義 3.1** ([1])**.** $s_1 = (\sigma_1, t_1), \ldots, s_r = (\sigma_r, t_r) \in X_\infty$ に対し $\infty$ 進多重ゼータ関数を次で定める:

$$\zeta_\infty(s_1, \ldots, s_r) := \sum_{i_1 > \cdots > i_r \geq 0} S_{i_1}(s_1) \cdots S_{i_r}(s_r) \in \mathbb{C}_\infty. \tag{3.1}$$

**注意 3.2.** (1) 任意の $s_1, \ldots, s_r \in X_\infty$ に対して式 (3.1) の右辺が $\infty$ 進的に収束することが証明できる ([1, §6] を参照).

(2) 非負整数 $m$ に対し，$i$ を十分大きくとると $S_i(-m) = 0$ となることが確かめられる．したがって $m_1, \ldots, m_r$ が全て非負整数なら $\zeta_\infty(-m_1, \ldots, -m_r)$ は $A$ の元の有限和になる．

(3) 変数 $s_1, \ldots, s_r$ が全て正の整数のとき，$\zeta_\infty(s_1, \ldots, s_r)$ は Thakur が導入した多重ゼータ値 ([10, §5.10] または [6] を参照) と一致する．

(4) 実際は [1] においてはより一般化された形で $\infty$ 進多重ゼータ関数が定義されている.

次に, $\infty$ 進多重ゼータ関数の負の整数点での特殊値が帰納的な関係式を満たすことを確認する.

$$\zeta_{<d}(m_1, \ldots, m_r) \coloneqq \sum_{d>i_1>\cdots>i_r\geq 0} S_{i_1}(m_1)\cdots S_{i_r}(m_r) \in k$$

とおく.

**定理 3.3** ([9, Theorem 3.7])**.** 非負整数 $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\zeta_\infty(-m_1, \ldots, -m_r)\\
&= \zeta_{<d}(-m_1, \ldots, -m_r) + \sum_{l=1}^{r}\Bigg\{\zeta_{<d}(-m_{l+1}, \ldots, -m_r) \sum_{\substack{0\leq a_j<m_j\\(q-1)|(m_j-a_j)\\(1\leq j\leq l)}} (-1)^l v^{a_1+\cdots+a_l}\\
&\cdot \zeta_{<d}(a_1-m_1)\cdots\zeta_{<d}(a_l-m_l)\cdot\binom{m_1}{a_1}\cdots\binom{m_l}{a_l}\cdot\zeta_\infty(-a_1, \ldots, -a_l)\Bigg\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, ある $j$ で $m_j = 0$ の場合には式中の和

$$\sum_{\substack{0\leq a_j<m_j\\(q-1)|(m_j-a_j)\\(1\leq j\leq l)}}$$

は空和である.

証明の概略). 簡単のために $r = 3$ の場合のみ考える. 次のように和を分割する:

$$\zeta_\infty(-m_1, -m_2, -m_3) = \sum_{i_1>i_2>i_3\geq 0}\ \sum_{\deg n_j=i_j,\, n_j\in A_+} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3} \tag{3.2}$$

$$= \left\{\sum_{d>i_1>i_2>i_3} + \sum_{i_1\geq d>i_2>i_3} + \sum_{i_1>i_2\geq d>i_3} + \sum_{i_1>i_2>i_3\geq d}\right\}\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}.$$

ここでは 3 番目の和のみを扱う. 3 番目の和は次のように計算できる:

$$\sum_{i_1>i_2\geq d>i_3}\left(\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}\right) = \zeta_{<d}(-m_3)\sum_{i_1>i_2\geq d}\left(\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}\right)$$

各 $n_1, n_2$ を $v$ で割った商 $h_1, h_2$ と余り $\alpha_1, \alpha_2$ で表して

$$= \zeta_{<d}(-m_3)\sum_{i_1>i_2\geq d}\left\{\sum_{\substack{\deg h_j=i_j-d,\\ h_j\in A_+\\ \deg\alpha_j<d}} (vh_1+\alpha_1)^{m_1}(vh_2+\alpha_2)^{m_2}\right\}$$

$h_j$ を $h_j-d$ で取り替えて

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{i_1>i_2\geq 0} \left\{ \sum_{\substack{\deg h_j=i_j \\ h_j\in A_+ \\ \deg \alpha_j<d}} (vh_1+\alpha_1)^{m_1}(vh_2+\alpha_2)^{m_2} \right\}$$

二項展開を行うと

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{i_1>i_2\geq 0} \sum_{\substack{\deg h_j=i_j, \\ h_j\in A_+ \\ \deg \alpha_j<d}} \sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1 \\ 0\leq a_2\leq m_2}} (vh_1)^{a_1}(vh_2)^{a_2}\alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}$$

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1 \\ 0\leq a_2\leq m_2}} v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2} \sum_{i_1>i_2\geq 0} \sum_{\substack{\deg h_j=i_j, \\ h_j\in A_+ \\ \deg \alpha_j<d}} h_1^{a_1}h_2^{a_2}\alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}$$

ここで，$\sum_{\deg \alpha_j<d}\alpha_j^0 = \sum_{\deg \alpha_j<d} 1 = q^d = 0$ が成り立つことから

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{\substack{0\leq a_1< m_1 \\ 0\leq a_2< m_2}} v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2} \sum_{i_1>i_2\geq 0} \sum_{\substack{\deg h_j=i_j, \\ h_j\in A_+ \\ \deg \alpha_j<d}} h_1^{a_1}h_2^{a_2}\alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}$$

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{\substack{0\leq a_1< m_1 \\ 0\leq a_2< m_2}} v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\zeta_\infty(-a_1,\, -a_2) \sum_{\deg \alpha_j<d} \alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}$$

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{\substack{0\leq a_1< m_1 \\ 0\leq a_2< m_2}} v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\zeta_\infty(-a_1,\, -a_2)$$

$$\cdot\, \zeta_{<d}(a_1-m_1) \sum_{f_1\in\mathbb{F}_q^\times} f_1^{m_1-a_1} \cdot \zeta_{<d}(a_2-m_2) \sum_{f_2\in\mathbb{F}_q^\times} f_2^{m_2-a_2}$$

$$= \zeta_{<d}(-m_3) \sum_{\substack{0\leq a_1< m_1 \\ 0\leq a_2< m_2 \\ (q-1)|(m_1-a_1) \\ (q-1)|(m_2-a_2)}} v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\zeta_\infty(-a_1, -a_2)\zeta_{<d}(a_1-m_1)\zeta_{<d}(a_2-m_2).$$

ただし最後の等号は，正の整数 $m$ に対して

$$\sum_{f\in\mathbb{F}_q^\times} f^m = \begin{cases} -1 & (q-1)|m \\ 0 & (q-1)\nmid m \end{cases}$$

が成り立つことから従う．和の分割 (3.2) における他の部分も同様に計算できる．

□

## 3.2　$v$ 進多重ゼータ関数の帰納的公式と応用

**定義 3.4** ([1, §6]). $s_1=(\sigma_1, t_1), \ldots, s_r=(\sigma_r, t_r)\in X_v$ に対し，$v$ 進多重ゼータ関数を次のように定義する:

$$\zeta_v(s_1, \ldots, s_r) := \sum_{i_1>\cdots>i_r\geq 0} \tilde{S}_{i_1}(s_1)\cdots\tilde{S}_{i_r}(s_r)\in k_v. \tag{3.3}$$

**注意 3.5.**　(1) 任意の $s_1, \ldots, s_r\in X_v$ に対して (3.3) の右辺が $v$ 進的に収束することが確かめられる ([1, §6] を参照).

(2) 非負整数 $m$ に対して，十分大きい $i$ で $\tilde{S}_i(-m)=0$ となることが知られている．よって $m_1, \ldots, m_r$ が全て非負整数なら $\zeta_v(-m_1, \ldots, -m_r)\in A$ となる.

(3) もし $s_1, \ldots, s_r\in\mathbb{N}$ であれば，特殊値 $\zeta_v(s_1, \ldots, s_r)$ は Thakur の (interpolated) $v$ 進多重ゼータ値 ([10, §5.10]) と一致する ([10])．しかし Chang と Mishiba によって研究されている $v$ 進多重ゼータ値 ([3]) とは異なる対象である.

(4) 実際には [1] においてはより一般化された形で $v$ 進多重ゼータ関数が定義されている.

次は $v$ 進多重ゼータ関数の負の整数点での特殊値も帰納的な関係式を満たすことを確認する.

**定理 3.6** ([9, Theorem 4.4]). 非負整数 $m_1, \ldots, m_r$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\zeta_v(-m_1, \ldots, -m_r)\\
&=\zeta_{<d}(-m_1, \ldots, -m_r)+\sum_{l=1}^{r}\left\{\zeta_{<d}(-m_{l+1}, \ldots, -m_r)\sum_{\substack{0\leq a_j\leq m_j\\ (q-1)|(m_j-a_j)\\ (1\leq j\leq l)}}(-1)^l v^{a_1+\cdots+a_l}\right.\\
&\left.\cdot\,\zeta_{<d}(a_1-m_1)\cdots\zeta_{<d}(a_l-m_l)\cdot\binom{m_1}{a_1}\cdots\binom{m_l}{a_l}\cdot\zeta_\infty(-a_1, \ldots, -a_l)\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

各 $a_j$ の動く範囲が定理 3.3 の右辺と異なっている点に注意する.

証明の概略). 再び $r=3$ として考える.

$$\begin{aligned}
\zeta_v(-m_1, -m_2, -m_3)&=\sum_{i_1>i_2>i_3\geq 0}\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+\\ (n_j,v)=1}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}\\
&=\left\{\sum_{d>i_1>i_2>i_3}+\sum_{i_1\geq d>i_2>i_3}+\sum_{i_1>i_2\geq d>i_3}+\sum_{i_1>i_2>i_3\geq d}\right\}\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+\\ (n_j,v)=1}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}.
\end{aligned}$$

と和を分解できる．3 番目の和を以下のように計算できる:

$$\sum_{i_1>i_2\geq d>i_3}\left(\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+\\ (n_j,v)=1}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}\right)=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{i_1>i_2\geq d}\left(\sum_{\substack{\deg n_j=i_j,\\ n_j\in A_+\\ (n_j,v)=1}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}\right)$$

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{i_1>i_2\geq d}\left\{\sum_{\substack{\deg h_j=i_j-d,\\ h_j\in A_+\\ 0\leq\deg\alpha_j<d}}(vh_1+\alpha_1)^{m_1}(vh_2+\alpha_2)^{m_2}\right\}$$

(ここで，$0\leq\deg\alpha_j$ から $\alpha_j\neq 0$ となっており，$\alpha_j$ の動く範囲が定理 3.1 の証明と異なっている)

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{i_1>i_2\geq 0}\left\{\sum_{\substack{\deg h_j=i_j\\ h_j\in A_+\\ 0\leq\deg\alpha_j<d}}(vh_1+\alpha_1)^{m_1}(vh_2+\alpha_2)^{m_2}\right\}$$

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{i_1>i_2\geq 0}\sum_{\substack{\deg h_j=i_j,\\ h_j\in A_+\\ 0\leq\deg\alpha_j<d}}\sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1\\ 0\leq a_2\leq m_2}}(vh_1)^{a_1}(vh_2)^{a_2}\alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}$$

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1\\ 0\leq a_2\leq m_2}}v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\sum_{i_1>i_2\geq 0}\sum_{\substack{\deg h_j=i_j,\\ h_j\in A_+\\ 0\leq\deg\alpha_j<d}}h_1^{a_1}h_2^{a_2}\alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}$$

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1\\ 0\leq a_2\leq m_2}}v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\zeta_\infty(-a_1,\,-a_2)\sum_{0\leq\deg\alpha_j<d}\alpha_1^{m_1-a_1}\alpha_2^{m_2-a_2}$$

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1\\ 0\leq a_2\leq m_2}}v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\zeta_\infty(-a_1,\,-a_2)$$

$$\cdot\zeta_{<d}(a_1-m_1)\sum_{f_1\in\mathbb{F}_q}f_1^{m_1-a_1}\cdot\zeta_{<d}(a_2-m_2)\sum_{f_2\in\mathbb{F}_q}f_2^{m_2-a_2}$$

$$=\zeta_{<d}(-m_3)\sum_{\substack{0\leq a_1\leq m_1\\ 0\leq a_2\leq m_2\\ (q-1)|(m_1-a_1)\\ (q-1)|(m_2-a_2)}}v^{a_1+a_2}\binom{m_1}{a_1}\binom{m_2}{a_2}\zeta_\infty(-a_1,-a_2)\zeta_{<d}(a_1-m_1)\zeta_{<d}(a_2-m_2)$$

最後の等式は非負整数 $m$ に対して

$$\sum_{f\in\mathbb{F}_q} f^m = \begin{cases} -1 & (q-1)|m,\, m>0 \\ 0 & (q-1)\nmid m \text{ or } m=0 \end{cases} \tag{3.4}$$

が成り立つことを用いて示せる. □

定理 3.3 と定理 3.6 を比較して次が得られる:

**定理 3.7** ([9, Theorem 4.6]). $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\zeta_v(-m_1, \ldots, -m_r) - \zeta_\infty(-m_1, \ldots, -m_r) \\ &= \sum_{l=0}^{r} \Bigg\{ \zeta_{<d}(-m_{l+1}, \ldots, -m_r) \sum_{\substack{0\leq a_j\leq m_j \\ (q-1)|(m_j-a_j) \\ (1\leq j\leq l) \\ a_j=m_j \textit{ for some } j}} (-1)^l v^{a_1+\cdots+a_l} \zeta_{<d}(a_1-m_1)\cdots \\ &\quad \cdots \zeta_{<d}(a_l-m_l)\cdot \binom{m_1}{a_1}\cdots\binom{m_l}{a_l}\cdot\zeta_\infty(-a_1, \ldots, -a_l)\Bigg\}. \end{aligned}$$

この式は式 (2.8) の多重化，式 (2.5) の正標数類似とみなせる.

# 4 積分表示

この節では $\infty$ 進多重ゼータ関数の特殊値及び $v$ 進多重ゼータ関数の積分表示を考える．応用として $v$ 進多重ゼータ関数の特殊値が満たす Kummer 型の合同式を得る.

## 4.1 測度の構成

この小節では正標数の多重ゼータ関数の積分表示を与える $A_v$ の直積空間上の $v$ 進測度を構成する．局所環 $A_v$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_v$ と書く.

**定義 4.1** ([9, Defintion 3.4]). $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in k_v \setminus \mathfrak{m}_v$ に対して $A_v$ に値をもつ $A_v$ 上の測度 $\mu = \mu^{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}$ を次のように定義する: 自然数 $e_1, \ldots, e_r$ と $A$ の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ に対し,

$$\mu((\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \underbrace{\mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e}_{r\text{ 乗直積}}) := \sum_{i_1>\cdots>i_r} (\#X_{i_1,\ldots,i_r})\, \sigma_1^{-i_1} \,\ldots\, \sigma_r^{-i_r},$$

ここで

$$X_{i_1,\ldots,i_r} := \{(n_1, \ldots, n_r) \in A_+^r \mid \deg n_j = i_j,\, n_j \equiv \alpha_j \bmod \mathfrak{m}_v^{e_j} \text{ for } j=1, \ldots, r\}.$$

$r=1$ の場合は，上記の測度は Goss による積分表示 (定理 2.7) で現れた測度と一致する．

**補題 4.2.** *$e \in \mathbb{N}$ を固定し，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in A$ を $\deg \alpha_1, \ldots, \deg \alpha_r < \deg v^e = de$ となるようにとる．このときコンパクト開集合 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \underbrace{\mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e}_{r\text{ 乗直積}}$ は次のように計算できる:*

*(1)* $\deg \alpha_1 > \cdots > \deg \alpha_r$ かつ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in A_+$ であれば

$$\mu((\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e) = \sigma_1^{-\deg \alpha_1} \cdots \sigma_r^{-\deg \alpha_r} + \sigma_1^{-de} \sigma_2^{-\deg \alpha_2} \cdots \sigma_r^{-\deg \alpha_r}.$$

*(2)* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ が以下の条件を満たすとする:

- $\deg \alpha_2 > \cdots > \deg \alpha_r$,
- $\alpha_2, \ldots, \alpha_r \in A_+$,
- $\deg \alpha_1 \leq \deg \alpha_2$ もしくは $\alpha_1 \in A \setminus A_+$,

このとき，

$$\mu((\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e) = \sigma_1^{-de} \sigma_2^{-\deg \alpha_2} \cdots \sigma_r^{-\deg \alpha_r}.$$

*(3)* その他の場合は

$$\mu((\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e) = 0.$$

証明の概略)．ケース (1) を考える．集合 $X_{i_1, \ldots, i_r}$ の定義から $X_{\deg \alpha_1, \ldots, \deg \alpha_r} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\}$ と $X_{de, \deg \alpha_2, \ldots, \deg \alpha_r} = \{(\alpha_1 + v^e, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\}$ がわかる．また $de \geq i_1 > \cdots > i_r$ でありさらに $(i_1, \ldots, i_r)$ が $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\}$ とも $\{(\alpha_1 + v^e, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\}$ とも等しくない場合は $X_{i_1, \ldots, i_r}$ が空集合となる．もし $i_1 > de$ であれば，集合 $X_{i_1, \ldots, i_r}$ は $C((n_1, \ldots, n_r)) := \{(n_1 + fv^e, \ldots, n_r) \mid f \in \mathbb{F}_q\}$ という形の部分集合の非交和となる．各 $C((n_1, \ldots, n_r))$ は丁度 $q$ 個の元からなるので $q | (\# X_{i_1, \ldots, i_r})$，つまり $\# X_{i_1, \ldots, i_r} = 0 \in \mathbb{F}_q$ がわかる．したがって，

$$\begin{aligned} &\mu((\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e) \\ := &\sum_{i_1 > \cdots > i_r} (\# X_{i_1, \ldots, i_r}) \, \sigma_1^{-i_1} \ \ldots, \sigma_r^{-i_r} \\ = &\sigma_1^{-\deg \alpha_1} \cdots \sigma_r^{-\deg \alpha_r} + \sigma_1^{-de} \sigma_2^{-\deg \alpha_2} \cdots \sigma_r^{-\deg \alpha_r}. \end{aligned}$$

ケース (2) では，$X_{de, \deg \alpha_2, \ldots, \deg \alpha_r} = \{(\alpha_1 + v^e, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\}$ となり，また $de \geq i_1 > \cdots > i_r$ かつ $(i_1, \ldots, i_r) \neq (de, \deg \alpha_2, \ldots, \deg \alpha_r)$ ならば $X_{i_1, \ldots, i_r} = \emptyset$ となることがわかる．もし $i_1 > de$ であれば $q | (\# X_{i_1, \ldots, i_r})$ となることが上と同様に示せるので，

$$\mu((\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e)$$

$$
\begin{aligned}
&:= \sum_{i_1>\cdots>i_r} (\# X_{i_1,\,\ldots,\,i_r})\,\sigma_1^{-i_1}\ \ldots,\ \sigma_r^{-i_r} \\
&= \sigma_1^{-de}\sigma_2^{-\deg\alpha_2}\cdots\sigma_r^{-\deg\alpha_r}.
\end{aligned}
$$

その他の場合は任意の $de \geq i_1 > \cdots > i_r$ に対し $X_{i_1,\,\ldots,\,i_r} = \emptyset$ となるから

$$
\mu((\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_r) + \mathfrak{m}_v^e \times \cdots \times \mathfrak{m}_v^e) = 0.
$$

□

## 4.2 積分表示の証明

次の定理は Goss による積分表示 (2.10) の多重化であり，(2.6) の正標数類似であると言える．

**定理 4.3** ([9, Theorem 3.7])**.** $m_1,\,\ldots,\,m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し次が成り立つ．

$$
\zeta_\infty(-m_1,\,\ldots,\,-m_r) = \int_{A_v^r} x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r}\,d\mu^{1,\,\ldots,\,1}.
$$

証明の概略). 簡単のために $r = 3$ とする．積分を以下のように計算できる:

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_v^r} x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}\,d\mu^{1,1,1} \\
&= \lim_{e\to\infty}\sum_{\alpha_j<de}\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\alpha_3^{m_3}\mu((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+\mathfrak{m}_v^e\times\mathfrak{m}_v^e\times\mathfrak{m}_v^e) \\
&= \lim_{e\to\infty}\left\{ 2\sum_{\substack{de>\deg n_1>\deg n_2>\deg n_3\\ n_1,\,n_2,\,n_3\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3} + \sum_{\substack{de>\deg n_2>\deg n_3\\ n_2,\,n_3\in A_+\\ de>\deg n_1\\ \deg n_1\leq\deg n_2 \text{ or } n_1\in A\setminus A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}\right\} \\
&= \lim_{e\to\infty}\left\{ \sum_{\substack{de>\deg n_1>\deg n_2>\deg n_3\\ n_1,\,n_2,\,n_3\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3} \right. \\
&\qquad \left. + \left[ \sum_{\substack{de>\deg n_1>\deg n_2>\deg n_3\\ n_1,\,n_2,\,n_3\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3} + \sum_{\substack{de>\deg n_2>\deg n_3\\ n_2,\,n_3\in A_+\\ de>\deg n_1\\ \deg n_1\leq\deg n_2 \text{ or } n_1\in A\setminus A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}\right]\right\} \\
&= \lim_{e\to\infty}\left\{ \sum_{\substack{de>\deg n_1>\deg n_2>\deg n_3\\ n_1,\,n_2,\,n_3\in A_+}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3} + \sum_{\substack{de>\deg n_2>\deg n_3\\ n_2,\,n_3\in A_+\\ de>\deg n_1}} n_1^{m_1}n_2^{m_2}n_3^{m_3}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \zeta_\infty(-m_1, -m_2, -m_3) + \zeta_\infty(-m_2, -m_3)\zeta_\infty(-m_1) \sum_{f \in \mathbb{F}_q} f^{m_1}$$

$$= \zeta_\infty(-m_1, -m_2, -m_3).$$

(最後の等号は式 (2.7) と式 (3.4) から従う.)

□

また，次のように $v$ 進多重ゼータ関数が $v$ 進積分表示を持つことも証明できる．定理 4.3 では負の整数点における特殊値のみ言及されていたが，次の定理では $v$ 進多重ゼータ関数そのものが $v$ 進積分により表されている:

**定理 4.4** ([9, Theorem 3.8])**.** $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{Z}_{d,p}$ と $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in k_v \setminus \mathfrak{m}_v$ に対して,

$$\zeta_v((\sigma_1, -t_1), \ldots, (\sigma_r, -t_r)) = \int_{(A_v^\times)^r} x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r} \, d\mu^{\sigma_1, \ldots, \sigma_r}$$

が成り立つ.

この式は Goss による積分表示 (2.9) の多重化と見做せる．また式 (2.4) の正標数類似であると言える.

## 4.3 Kummer 型の合同式

この小節では $v$ 進多重ゼータ関数の $v$ 進積分表示を用いて $v$ 進多重ゼータ関数の特殊値が Kummer 型の合同式 (定理 4.6) を満たすことを示す.

**補題 4.5.** 自然数 $e$ をとり，整数 $m, l \in \mathbb{Z}$ を $m \equiv l \not\equiv 0 \mod (q^d-1)q^{(e-1)d}$ となるように選ぶ．この時 $x^m \equiv x^l \mod \mathfrak{m}_v^e$ が全ての $x \in A_v \setminus \mathfrak{m}_v$ に対して成り立つ.

この補題は $\#(A_v/\mathfrak{m}_v^e)^\times = \#(A/\mathfrak{m}_v^e)^\times = (q^d-1)q^{(e-1)d}$ であることから直ちに従う.

**定理 4.6** ([9, Theorem 3.10])**.** インデックス $(m_1, \ldots, m_r), (l_1, \ldots, l_r) \in \mathbb{Z}^r$ で全ての $1 \le i \le r$ で $m_i \equiv l_i \not\equiv 0 \mod (q^d-1)q^{(e-1)d}$ を満たすものをとると次の合同式が成り立つ:

$$\zeta_v(m_1, \ldots, m_r) \equiv \zeta_v(l_1, \ldots, l_r) \mod \mathfrak{m}_v^e.$$

この合同式は [4, Theorem 2.10] の正標数類似とみなせる.

証明の概略). 補題 4.5 から $x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} - x_1^{l_1} \cdots x_r^{l_r}$ は常に $\mathfrak{m}_v^e$ に入る．測度 $\mu$ が $A_v$ に値を持っているので

$$\int_{(A_v \setminus \mathfrak{m}_v)^r} (x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} - x_1^{l_1} \cdots x_r^{l_r}) \, d\mu \in \mathfrak{m}_v^e,$$

と計算できる.

□

## 謝辞

貴重な講演の機会を下さった世話人の田坂浩二先生に感謝致します．また指導教員の古庄英和先生，並びに琉球大学の三柴善範先生，原田遼太郎さんには講演や本稿の準備において大変お世話になりました．この場を借りてお礼申し上げます．また本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125 の助成を受けております．

## 参考文献

[1] B. Anglès, T. Ngo Dac, and F. Tavares Ribeiro, *Twisted characteristic p zeta functions*, J. Number Theory, 168 (2016), pp. 180–214.

[2] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J., 1 (1935), pp. 137–168.

[3] C.-Y. Chang and Y. Mishiba, *On a conjecture of Furusho over function fields*, Invent. Math., 223 (2021), pp. 49–102.

[4] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto, and H. Tsumura, *Fundamentals of p-adic multiple L-functions and evaluation of their special values*, Selecta Math. (N.S.), 23 (2017), pp. 39–100.

[5] D. Goss, *v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields*, Invent. Math., 55 (1979), pp. 107–119. With an addendum.

[6] R. Harada, 標数 $p$ の多重ゼータ値入門，数理解析研究所講究録, No. 2160, 2020, pp. 43–78.

[7] N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, vol. 58 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1984.

[8] S. Lang, *Cyclotomic fields I and II*, vol. 121 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1990. With an appendix by Karl Rubin.

[9] D. Matsuzuki, *On* $\infty$*-adic and v-adic multiple zeta functions in positive characteristic*, arXiv:2201.12953 [math.NT] preprint.

[10] D. S. Thakur, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.

[11] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, vol. 83 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1997.