集合最適化問題における非線形スカラー化手法
20年余の進展

Nonlinear scalarization in set optimization problem

progress during the past 20 years

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
荒谷　洋輔 (Araya, Yousuke) *

1　はじめに

多目的最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997 年に黒岩-田中-Ha によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について 6 種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。本稿は、ベクトルの非線形スカラー化手法の自然な拡張である、集合の非線形スカラー化手法について、過去 20 年の研究成果の中で筆者が特に重要だと考えるものをまとめた。尚、所々に筆者の感想や今後への展望がある。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では、Y を線形位相空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

集合 $A \subset Y$ に対して、A の代数的内部、位相的内部・閉包をそれぞれ cor$A$、int$A$、cl$A$ と表す。また、$C \subset Y$ を閉凸錐とする。つまり、以下の条件を満たす。

$$\text{(a) cl}C = C, \quad \text{(b) } C + C \subseteq C, \quad \text{(c) } \lambda C \subseteq C \ \forall \lambda \in [0, \infty)$$

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは int$C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる [36]。

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)

定義 2.1 (双対錐)**.** X を実ベクトル空間、X^* を X の（代数的）双対空間、C_X を空間 X の凸錐とする。双対錐 C_{X^*} は、$C_{X^*} := \{x^* \in X^* \,|x^*(x) \geq 0, \quad \forall x \in C_X\}$ で定義される。

定義 2.2 (極小要素・極大要素 [13])**.** $(\mathcal{Q}, \leq)$ を前順序集合 (反射律・推移律を満たす集合) とする。$\mathcal{A}$ を $\mathcal{Q}$ の空でない集合、$\bar{A} \in \mathcal{A}$ とする。$\mathcal{A}$ の極小要素・極大要素を以下で定義する。

(a) $\bar{A} \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の極小要素であるとは、ある $A \in \mathcal{A}$ に対して $A \leq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \leq A$ であること。

(b) $\bar{A} \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の極大要素であるとは、ある $A \in \mathcal{A}$ に対して $\bar{A} \leq A \Rightarrow A \leq \bar{A}$ であること。

2 項関係 $\leq$ が半順序であるとき、$\bar{A}$ が $\mathcal{A}$ の極小要素であるとは、任意の $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \bar{A}$ に対して $A \not\leq \bar{A}$ と書き直すことができる。同様にして、$\bar{A}$ が $\mathcal{A}$ の極大要素であるとは、任意の $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \bar{A}$ に対して $\bar{A} \not\leq A$ と書き直すことができる。

次に、Edgeworth-Pareto 極小や有効要素としても知られる、ベクトル最適化問題における極小要素の概念を導入する。

定義 2.3 ([13, 23])**.** Z をある凸錐 $C \subset Z$ によって前順序が定義された実ベクトル空間、A を Z の空でない部分集合とする。$\mathrm{cor}C \neq \emptyset$ を仮定する。

- 要素 $\bar{z} \in A$ が A の極小要素 [極大要素] であるとは、以下を満たす時である。

  $A \cap (\bar{z} - C) \subset \{\bar{z}\} + C \qquad [A \cap (\bar{z} + C) \subset \{\bar{z}\} - C]$

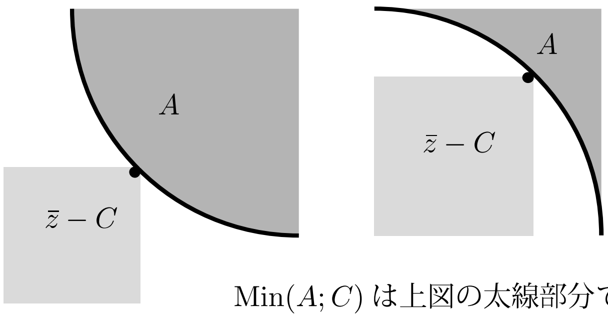
  もし順序錐 C が pointed ならば、上記の包含関係は以下のように書き換えられる。

  $A \cap (\bar{z} - C) = \{\bar{z}\} \qquad [A \cap (\bar{z} + C) = \{\bar{z}\}]$

- 要素 $\bar{z} \in A$ が A の弱極小要素 [弱極大要素] であるとは、以下を満たす時である。

  $A \cap (\bar{z} - \mathrm{cor}C) = \emptyset. \qquad [A \cap (\bar{z} + \mathrm{cor}C) = \emptyset]$

A の前順序 $\leq_C$ に対する極小要素 [極大要素] の集合を $\mathrm{Min}(A; C)[\mathrm{Max}(A; C)]$、弱極小要素 [弱極大要素] の集合を $\mathrm{wMin}(A; \mathrm{cor}C)$ $[\mathrm{wMax}(A; \mathrm{cor}C)]$ と書く。



$Y = \mathbb{R}^2$
$C = \mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$

左図：A が凸の場合
右図：A が凸でない場合

$\mathrm{Min}(A; C)$ は上図の太線部分であり、「Pareto フロンティア」とも呼ばれる。

補題 2.4 ([13, 23])**.** Z をある凸錐 $C \subset Z$ によって前順序が定義された実ベクトル空間とする。順序錐 C が $\mathrm{cor}C \neq \emptyset$ かつ $C \neq Z$ とする。そのとき、$\mathrm{Min}(A; C) \subset \mathrm{wMin}(A; \mathrm{cor}C)$ である。

2.2 集合最適化からの準備

次に、集合最適化問題を導入するための準備をする。読者は特にベクトルと集合の違いが顕著に現れる部分である「注意（例）」に注目して欲しい。

定義 2.5 (集合関係：黒岩-田中-Ha[32, 33]). Y を線形位相空間、$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合の族とする。$A, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\textbf{lower}] \quad A \le_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C, \qquad [\textbf{upper}] \quad A \le_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C,$$

$$[\textbf{lower \& upper}] \quad A \le_C^{l\&u} B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \quad \text{and} \quad A \subset B - C$$

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して、当然だが式の移項は問題なく出来る。

$$y - x \in C \ (x \le_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

一方、集合関係の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $A \le_C^l B$ と $A \le_C^u B$ は一般に異なる ([2])。その理由は、集合が移項が出来ないことに起因している。

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad A = [0,1] \times [0,1] \quad \Longrightarrow \quad A - A = [-1,1] \times [-1,1] \neq \{(0,0)\}$$

また、集合 A が凸でない場合、一般に「$A + A \supset 2A$」であることも注意を要する。

例 1 ([26]). 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}, \qquad A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\le_C^l$、$\le_C^u$ について次が分かる。

$$A \le_C^l B \iff a_1 \le b_1, \qquad A \le_C^u B \iff a_2 \le b_2, \qquad A \le_C^{l\&u} B \iff a_1 \le b_1 \quad \text{and} \quad a_2 \le b_2$$

命題 2.6 ([2, 6]). $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \ge 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \le_C^{l[u]} B \implies A + D \le_C^{l[u]} B + D \quad \textit{and} \quad A \le_C^{l[u]} B \implies \alpha A \le_C^{l[u]} \alpha B$

(ii) $\le_C^l$ と $\le_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

(iii) $A \le_C^u b \Longrightarrow A \le_C^l b \quad \textit{and} \quad a \le_C^l B \Longrightarrow a \le_C^u B$

定義 2.7 (C-proper：Hernandez-Rodriguez-Marin[20]). $A \in \mathcal{V}$ が C-proper [$(-C)$-proper] であるとは、$A + C \neq Y[A - C \neq Y]$ が成り立つときである。

注意 2. $a \in Y$ がベクトルの場合、$C \neq Y$ ならば当然 $a + C \neq Y$ である。しかし、集合の場合は $C \neq Y$ でも以下のようなことが起きりうる。

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}_+^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|y = x\} \quad \Longrightarrow \quad A + C = \mathbb{R}^2$$

上記のような集合の場合、集合をスカラー化した値が $-\infty$ となる。

定義 2.8 (Luc[35]). $A \in \mathcal{V}$ とする。

(i) A が C-convex [$(-C)$-convex] であるとは、$A + C$ [$A - C$] が凸集合であることと定義する。

(ii) A が C-closed [$(-C)$-closed] であるとは、$A + C$ [$A - C$] が閉集合であることと定義する。

(iii) A が C-compact $\left[(-C)\text{-compact}\right]$ であるとは、以下の形をした A の任意の被覆

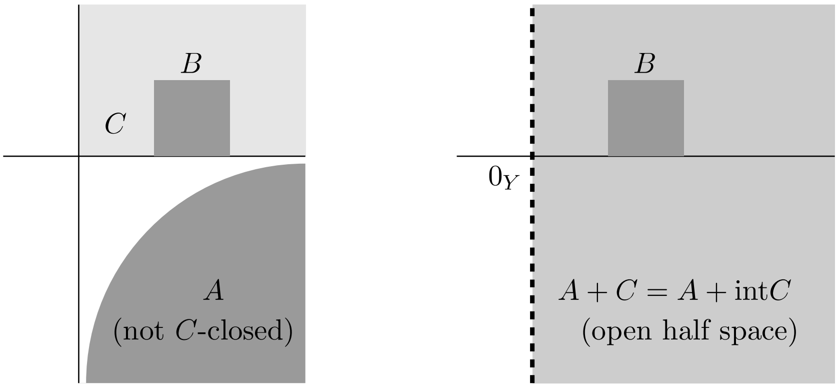
$$\{U_\alpha + C |\ U_\alpha \text{ are open}\} \qquad [\{U_\alpha - C |\ U_\alpha \text{ are open}\}]$$

が有限個の被覆で A を覆うことが出来るときである。

また、$\mathrm{cl}(\mathcal{V}_C)$ を Y の C-proper かつ C-closed である空でない部分集合の族とする。

注意 3. ベクトル順序 $\leq_C$ と $\leq_{\mathrm{int}C}$ は明らかに異なる。しかし、集合関係の場合では、以下の例のように $\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ が同値になることもある。よって、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ を区別したいとき、集合 A に C-closed の仮定が必要となる（[2] を参照）。

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}^2_+, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|xy > -1, x > 0\}, \quad B = [1, 2] \times [0, 1]$$



定義 2.9 ([19])**.** $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1, \qquad V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C, \qquad A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

定義 2.2 から、集合関係における極小・弱極小要素が自然に導入できる。極大要素も同様である。

定義 2.10 ([20])**.** $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-極小要素であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq_C^l A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C^l B \qquad [B \leq_C^u A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C^u B]$$

が成り立つものである。$\mathcal{S}$ の $l[u]$-極小要素の族を $l[u]$-$\mathrm{Min}(\mathcal{S}; C)$ と書く。同様にして、$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-弱極小要素であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq_{\mathrm{int}C}^l A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_{\mathrm{int}C}^l B \qquad [B \leq_{\mathrm{int}C}^u A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_{\mathrm{int}C}^u B]$$

が成り立つものである。$\mathcal{S}$ の弱極小要素の族を $l[u]$-$\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \mathrm{int}C)$ と書く。

3　ベクトルの非線形スカラー化手法

最初に、線形スカラー関数による極小要素の特徴づけに関する結果について紹介する。以下の結果は、凸解析学における分離定理の応用として導かれる。

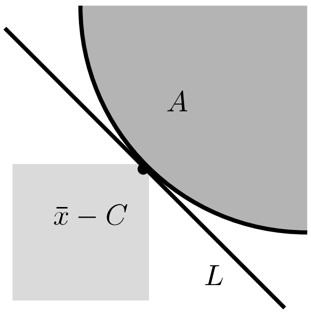
定理 3.1 (Jahn [23])**.** Y を半順序ベクトル空間、C_X を *pointed* な凸錐、$A \subset Y$ を $A \neq \emptyset$ で C-*convex* な集合とする。すると、極小要素・弱極小要素について以下のことが言える。

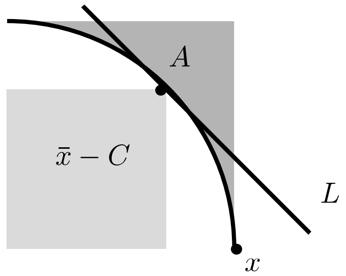
(1) $\mathrm{cor}(A + C) \neq \emptyset$ ならば、$L \in C_{X^*} \setminus \{0_{X^*}\}$ が存在して次が言える。＜定理 *5.4*＞

$$\bar{x} \in \mathrm{Min}(A; C) \quad \Longrightarrow \quad L(\bar{x}) \leq L(x) \quad \forall x \in A$$

(2) $\mathrm{cor}C \neq \emptyset$ ならば、$L \in C_{X^*} \setminus \{0_{X^*}\}$ が存在して次が言える。<系 *5.2.9*>

$$\bar{x} \in \mathrm{wMin}(A; \mathrm{int}C) \iff L(\bar{x}) \leq L(x) \quad \forall x \in A$$





$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}^2_+$

右図において
$x, \bar{x} \in \mathrm{Min}(A; C)$ だが、
$L(x) < L(\bar{x})$ である。

$\therefore$ 右図は (1) の右式を満たすような L を見つけられない！

この節では、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。1980 年代に Gerstewitz [15] は、ベクトル最適化問題において以下のような非線形スカラー化関数（Gerstewitz の関数）を提案した。

$$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty], \quad \varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in \{tk^0\} - C\}$$

Gerstewitz の関数は、特別な場合（C：半空間）として線形スカラー化関数を含むことが知られている。その後彼らは [16] で、ベクトル最適化問題における Gerstewitz の関数について以下の本質的な性質を導いた。

命題 3.2 ([17])**.** Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を *proper*$(C \neq \{0_Y\}, C \neq Y)$ な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。そのとき、φ_{C,k^0} は *well-defined* であり、C-単調 $(\forall a, b \in Y, a \leq_C b \Rightarrow \varphi_{C,k^0}(a) \leq \varphi_{C,k^0}(b))$ かつ狭義 $\mathrm{int}C$-単調 ($\forall a, b \in Y, a \leq_{\mathrm{int}C} b \Rightarrow \varphi_{C,k^0}(a) < \varphi_{C,k^0}(b)$) である。また、$\varphi_{C,k^0}$ は連続で、劣線形である。さらには、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立つ。

$$\{y \in Y \,|\, \varphi(y) \leq \lambda\} = \{\lambda k^0\} - C, \qquad \{y \in Y \,|\, \varphi(y) < \lambda\} = \{\lambda k^0\} - \mathrm{int}C$$

上記の Gerstewitz の関数は、双対となる以下の形に変形できる。

$$\psi_{C,k^0} : Y \to [-\infty, \infty), \quad \psi_{C,k^0}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in \{tk^0\} + C\}$$

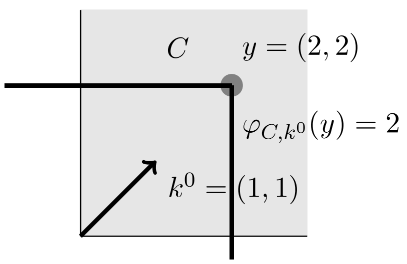
関係式 $\varphi_{C,k^0}(y) = -\psi_{C,k^0}(-y)$ から、以下のことが分かる。

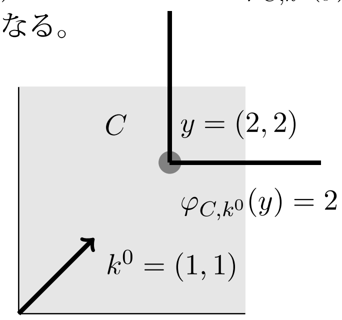
命題 3.3. Y を線形位相空間、$C \subset Y$ を *proper* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。そのとき、ψ_{C,k^0} は *well-defined* であり、C-単調かつ狭義 $\mathrm{int}C$-単調である。また、ψ_{C,k^0} は連続であり、優加法性と正斉次性も成り立つ。さらには、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立つ。

$$\{y \in Y \,|\, \psi(y) \geq \lambda\} = \{\lambda k^0\} + C, \qquad \{y \in Y \,|\, \psi(y) > \lambda\} = \{\lambda k^0\} + \mathrm{int}C$$

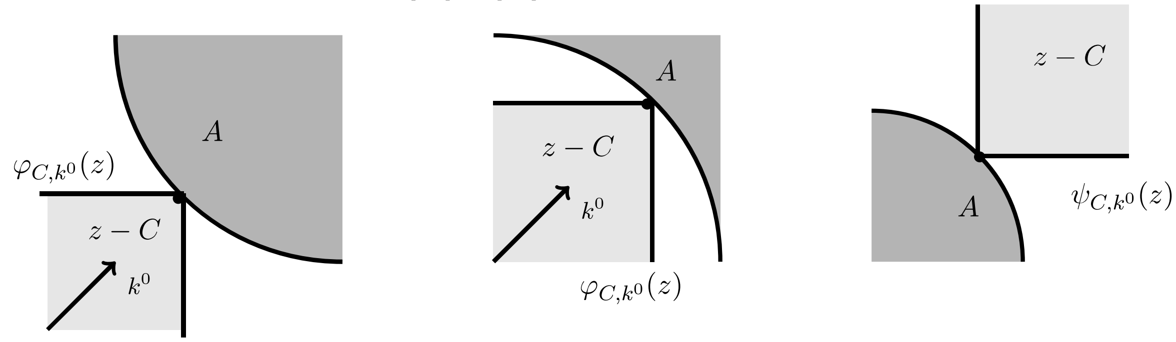
Gerstewitz の関数についてのより詳しい性質・歴史・応用については、大著 [37] で確認できる。

例 2. $Y = \mathbb{R}^2$、$C = \mathbb{R}^2_+$、$k^0 = (1,1)$、$y = (2,2)$ とする。 $\Longrightarrow$ $\varphi_{C,k^0}(y) = 2, \quad \psi_{C,k^0}(y) = 2$
φ_{C,k^0} の等高線は逆 L 字型、ψ_{C,k^0} は L 字型となる。





スカラー関数 φ_{C,k^0}、ψ_{C,k^0} を用いることで、定理 3.1 における集合 A の C-conex 性を外すことが出来る（下図参照）。詳しくは、[16] や [17] の定理 3.1.9 を参照のこと。



その後、筆者は [1] で以下のようなベクトル最適化問題における非線形の 2 変数の下限型関数 $h_{\inf} : Y \times Y \to (-\infty, \infty]$ と上限型関数 $h_{\sup} : Y \times Y \to [-\infty, \infty)$ を調査した。

$$h_{\inf}(y,a) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0 + a\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + a - C\}$$

$$h_{\sup}(y,a) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + a \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + a + C\}$$

もちろん、関数 $h_{\inf}, h_{\sup}$ は Gerstewitz の関数の拡張である ($h_{\inf}(y,a) := \varphi_{C,k^0}(y-a)$、$a, y \in Y$)。さらに、関数 $h_{\inf}, h_{\sup}$ は以下のような双対の関係になっていることも分かる。

$$h_{\sup}(y,a) = -h_{\inf}(-y,-a)$$

4 集合の非線形スカラー化手法

前節で紹介したベクトルの非線形スカラー化関数 φ_{C,k^0}、ψ_{C,k^0} は応用上有用であるので、これを拡張することを考える。

4.1 1変数型の集合のスカラー化関数

(a) 幾何的観点からの拡張

定義 4.1 (Georgiev-Tanaka[14])**.** X を空でない集合、$F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。以下のスカラー化関数 $\varphi^F_{C,k^0}, \psi^F_{C,k^0} : X \to (-\infty, \infty]$ を定義する。

$$\psi^F_{C,k^0}(x) = \sup\{\varphi_{C,k^0}(y) \,|\, y \in F(x)\}, \qquad \varphi^F_{C,k^0}(x) = \inf\{\varphi_{C,k^0}(y) \,|\, y \in F(x)\},$$

$$-\varphi^{-F}_{C,k^0}(x) = \sup\{-\varphi_{C,k^0}(-y) \,|\, y \in F(x)\}, \qquad -\psi^{-F}_{C,k^0}(x) = \inf\{-\varphi_{C,k^0}(-y) \,|\, y \in F(x)\}.$$

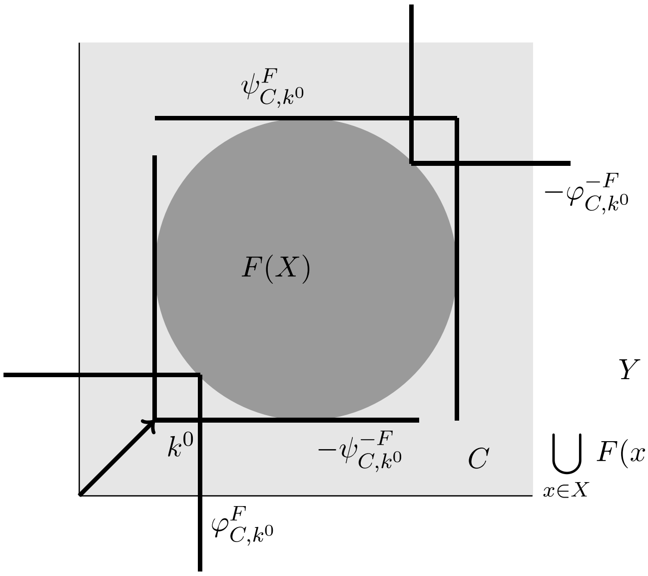
(b) Tammer の定義式の自然な拡張

φ_{C,k^0} の定義式において、「$y \Rightarrow V$」、「$\leq_C \Rightarrow \leq^l_C, \leq^u_C$」とする。

定義 4.2 (Hamel-Löhne[19])**.** X を空でない集合、$F : X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。集合のスカラー化関数 $c^l, c^u : \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$ を以下で定義する。

$$c^l(V) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \leq^l_C \{tk^0\}\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, \{tk^0\} \subset V + C\}$$

$$c^u(V) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \leq^u_C \{tk^0\}\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V \subset \{tk^0\} - C\}$$



4 つの非線形スカラー化関数
ψ^F_{C,k^0}, φ^F_{C,k^0}, $-\varphi^{-F}_{C,k^0}$, $-\psi^{-F}_{C,k^0}$
像空間 ($\mathbb{R}^2$) の図

$Y=\mathbb{R}^2$、$C=\mathbb{R}^2_+$、$k^0=(1,1)$

$$\bigcup_{x\in X} F(x) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, (x-3)^2+(y-3)^2=2^2\}$$

また、定義 4.2 と同じ設定で、次のスカラー化関数も導入する。$d^l, d^u : \mathcal{V} \to [-\infty,\infty]$

$$d^l(V) = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\Big|\, \{tk^0\} \leq^l_C V\} = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, V\subset\{tk^0\}+C\}$$

$$d^u(V) = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, \{tk^0\} \leq^u_C V\} = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, \{tk^0\}\subset V-C\}$$

ここで、(a) 幾何的観点からの拡張と (b)Tammer の定義式の自然な拡張の関係について疑問が残る。**実は、(a) と (b) は等しいことが後の研究で分かっている。**

命題 4.3 ([20, 38])**.** 定義 *4.2* と同じ設定とする。すると、次が成り立つ。

$$\varphi^F_{C,k^0}(x) = c^l(F(x)),\quad \psi^F_{C,k^0}(x) = c^u(F(x)),\quad -\varphi^{-F}_{C,k^0}(x) = d^u(F(x)),\quad -\psi^{-F}_{C,k^0}(x) = d^l(F(x)).$$

4.2　２変数型の集合のスカラー化関数

前節の c^l, c^u, d^l, d^u を 2 変数型に拡張することを考える。$k^0\in C\setminus(-C)$ とする。$\inf\emptyset=\infty$ と $\sup\emptyset=-\infty$ を認めることにより、$h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup} : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to[-\infty,\infty]$ を次で定義する。

$$h^l_{\inf}(V_1,V_2) = \inf\{t\in\mathbb{R} \,\Big|\, V_1 \leq^l_C \{tk^0\}+V_2\} = \inf\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, \{tk^0\}+V_2\subset V_1+C\}$$

$$h^u_{\inf}(V_1,V_2) = \inf\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, V_1 \leq^u_C \{tk^0\}+V_2\} = \inf\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, V_1\subset\{tk^0\}+V_2-C\}$$

$$h^l_{\sup}(V_1,V_2) = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\Big|\, \{tk^0\}+V_2 \leq^l_C V_1\} = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, V_1\subset\{tk^0\}+V_2+C\}$$

$$h^u_{\sup}(V_1,V_2) = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, \{tk^0\}+V_2 \leq^u_C V_1\} = \sup\{t\in\mathbb{R} \,\big|\, \{tk^0\}+V_2\subset V_1-C\}$$

上記のスカラー化関数は、桑野-田中-山田 [34] が最初に定式化して、筆者 [2] が下記の記号を導入したものである。関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ は、経済学における効用関数の役割を果たしている。

命題 4.4 ([2, 3])**.** 上記のスカラー化関数について、次が成り立つ。

$$h^l_{\sup}(V_1,V_2) = -h^u_{\inf}(-V_1,-V_2) \qquad \text{and} \qquad h^u_{\sup}(V_1,V_2) = -h^l_{\inf}(-V_1,-V_2)$$

l 型と u 型のスカラー化関数は、双対の関係になっている。この関係を利用することで、筆者は集合最適化問題における共役双対理論 [5] を提案している。その他、以下の重要な結果がある。

定理 4.5 ([18] の定理5.5・[38] の命題3.1の発展版). $C \subset Y$ を *proper* で *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$、$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。このとき、次が成り立つ。

$$h^l_{\inf}(V_1, V_2) = \sup_{b \in V_2} \inf_{a \in V_1} \varphi_{C,k^0}(a-b), \qquad h^u_{\inf}(V_1, V_2) = \sup_{a \in V_1} \inf_{b \in V_2} \varphi_{C,k^0}(a-b),$$

$$h^l_{\sup}(V_1, V_2) = \sup_{b \in V_2} \inf_{a \in V_1} \psi_{C,k^0}(a-b), \qquad h^u_{\sup}(V_1, V_2) = \sup_{a \in V_1} \inf_{b \in V_2} \psi_{C,k^0}(a-b).$$

スカラー関数 $f : \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$ が以下を満たすとき、f は $\leq^l_C$-単調 [$\leq^u_C$-単調] であると言う。

$$V_1 \leq^l_C V_2 \ [V_1 \leq^u_C V_2] \quad \Longrightarrow \quad f(V_1) \leq f(V_2)$$

定理 4.6 ([2, 3]). 関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $h^l_{\inf}(\cdot, V)$、$h^l_{\sup}(\cdot, V)$ は、任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して $\leq^l_C$-単調である。

(ii) $h^u_{\inf}(\cdot, V)$、$h^u_{\sup}(\cdot, V)$ は、任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して $\leq^u_C$-単調である。

4.3 集合関係とスカラーの変換定理

定理 4.7 (l-inf 型・u-inf 型 [3]). $C \subset Y$ を *proper* で *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed*、 $V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 + C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_C$、$V_2 \in \mathcal{V}$ が C-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 + \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) < 0$$

(iii) もし $V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 - C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0$$

(iv) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-*compact*、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 - \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) < 0$$

上記の変換定理の他に、ベクトルのスカラー化関数 φ_{C,k^0} を利用した変換定理も発表されている。

定理 4.8 ([31]). $C \subset Y$ を *proper* な閉凸錐、$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。そのとき、次が言える。

(l-type) $V_2 \subset V_1 + C \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in C \setminus \{0_Y\} : \sup_{b \in V_2} \inf_{a \in V_1} \varphi_{C,k}(a-b) \leq 0$

(u-type) $V_1 \subset V_2 - C \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in C \setminus \{0_Y\} : \sup_{a \in V_1} \inf_{b \in V_2} \varphi_{C,k}(a-b) \leq 0$

その一方で、以下を２つの性質を満たすような $k^0 \in C \setminus \{0_Y\}$ が存在すると仮定する。

(H-l-type) $\inf_{a \in V_1} \varphi_{C,k^0}(a-b)$ は任意の $b \in V_2$ で到達する時、右の集合関係が成り立つ。

$$\sup_{b \in V_2} \inf_{a \in V_1} \varphi_{C,k^0}(a-b) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad V_2 \subset V_1 + C$$

(H-u-type) $\inf_{b\in V_2}\varphi_{C,k^0}(a-b)$ は任意の $a\in V_1$ で到達する時、右の集合関係が成り立つ。

$$\sup_{a\in V_1}\inf_{b\in V_2}\varphi_{C,k^0}(a-b)\le 0 \quad\Longrightarrow\quad V_1\subset V_2-C$$

注意 4. 定理 4.7 は、集合最適化問題における最適解のスカラー化関数での特徴づけ [2, 28, 29]、集合鞍点の存在定理 [3] など応用範囲がとても広いことが最近の研究で判明している。これには、いくつかの注意点がある。

(a) **定理 4.7 の (i) における「$\Longrightarrow$」の証明において、$V_1, V_2\in\mathcal{V}$ に仮定は不要である。**詳しくは、[2, 3] の他に、定理 4.8 の証明 [31]（定理 3.3、3.8）を参照のこと。

(b) **定理 4.7 の (i)、(iii) における「$\Longleftarrow$」の証明において、筆者は [11, 31] における集合の仮定「閉集合&有界」を「C-closed、$(-C)$-closed」へ緩めることに成功している。**

$$Y=\mathbb{R}^2,\qquad C=\mathbb{R}^2_{++}:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1>0, x_2>0\},\qquad V=\mathbb{R}^2_{++}\cup\{(0,0)\}$$

[11] の「仮定 2.4」では、$A, B\in\mathcal{V}$ は閉集合、かつ有界であると仮定している。しかし、上の例で V は C-closed であることが分かるが、V は閉集合ではないし、有界でもない。

また、定理 4.7 と定理 4.8 を比較すると、(H-l-type) を満たす十分条件は、C-proper & C-closed であるように見える。実際にそれは正しく、最新の研究 [9](Lemma 6.2) で明らかになっている。それらの条件を弱めることは出来るかどうかは今後の課題である。

(c) 定理 4.7(i) の特別な場合として、$V_2=\{0_Y\}$ としたときのことを考える。

(誤) $0_Y\in V_1+C \iff h^l_{\inf}(V_1)\le 0$ （[2] 参照）

(正) $0_Y\in \mathrm{cl}(V_1+C) \iff h^l_{\inf}(V_1)\le 0$ （[4, 18] 参照）

集合 V_1 に C-closed の仮定は必要である。以下のように設定する。注意 3 の図も参照のこと。

$$Y=\mathbb{R}^2,\quad C=\mathbb{R}^2_{+},\quad k^0=(1,1),\quad V=\{(x,y)\mid xy\le -1,\ x>0\}$$

すると、**関係式「$h^l_{\inf}(V)\le 0 \iff 0_Y\in V+C$」は間違いであることが確認できる。なぜなら、$V+C=\{(x,y)\mid x>0\}$ は 0_Y を含まない開集合だからである。**

(d) **集合に何らかの「凸性の概念」は不要である。**その代わりに、解の存在定理などを導く際にスカラー関数の計算で注意を要する（inf 型：劣線形、sup 型：優線形。詳しくは [3] 参照)。

(e) 定理 4.7 の (ii)、(iv) の証明は、[18] を参考にして [2] を全面的に修正・改良したものである。[18] では集合に「compact」を仮定しているが、**筆者は [3] において集合の仮定を「C-compact、$(-C)$-compact」へ緩めることに成功している。**

5 スカラー化関数の応用・近年の進展

(1) 集合のスカラー化関数の更なる拡張

Hiriart-Urruty が oriented distance[21] を提案してから、このアイディアを集合最適化問題におけるスカラー化手法に応用する研究が主にスペインの研究者によって盛んに調査されている。詳しくは、[10, 18, 27, 28, 29] やその参考文献を参照のこと。

(2) 集合のベクトル化手法の研究とその応用

Jahn[24] が集合をベクトル化する手法を提案してから、これを利用して集合微分の提案なども行われている。Jahn[25]、Karaman et al.[30] やその参考文献を参照のこと。

(3) 重み付き集合関係

スカラー化関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}$ の凸結合である重み付き集合関係 [11] も提案されている。これは実用上有用な l 型・u 型・$l\&u$ 型の集合関係を含んでいるので、筆者はとても有力だと考えている。詳しくは [6] も参照のこと。

(4) 集合最適化問題における最急降下法：前節の定理 4.8 の応用である。[8, 31] を参照のこと。

(5) ロバスト多目的最適問題におけるスカラー化手法

近年の研究で、集合最適化問題が「多目的のロバスト最適化問題」に変換できることが発見された [22]。以下では、ロバスト多目的最適問題におけるスカラー化手法について考察する。

定義 5.1 (ロバスト多目的最適化問題 [9, 12]). $\mathcal{X}$ を決定空間、$\mathcal{U}$ を状況集合（不確実集合とも呼ばれる）、Y を線形位相空間、$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to Y$ をパラメータ付きベクトル値の目的関数とする。不確実性を考慮したロバスト多目的最適化を以下のように定式化する。

$$\mathrm{VP}(\mathcal{U}) \begin{cases} \text{minimize} \quad f(x, \xi) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X}, \xi \in \mathcal{U} \end{cases}$$

次に、ロバスト多目的最適化問題における解の概念を考える。

定義 5.2 (ロバスト狭義有効解・有効解 [9, 12]). 要素 $x_0 \in \mathcal{X}$ がロバスト狭義有効解であるとは、次を満たす $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ が存在しない時に言う。

$$\forall \xi \in \mathcal{U}, \exists \xi' \in \mathcal{U} : f(x, \xi) \leq_C f(x_0, \xi')$$

要素 $x_0 \in \mathcal{X}$ がロバスト有効解であるとは、次を満たす $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ が存在しない時に言う。

$$\forall \xi \in \mathcal{U}, \exists \xi' \in \mathcal{U} : f(x, \xi) \leq_C f(x_0, \xi') \quad \text{and} \quad \exists \bar{\xi} \in \mathcal{U} \text{ such that } f(x_0, \bar{\xi}) \not\leq_C f(x, \xi),\ \forall \xi \in \mathcal{U}$$

以下の集合値写像 $F : \mathcal{X} \to 2^Y$、$F(x) := \{f(x, \xi) \mid \xi \in \mathcal{U}\}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$ を考える。
すると、(a) ロバスト狭義有効解、(b) ロバスト有効解の定義は以下のように書くことが出来る。

(a) $\forall x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}, \quad F(x) \not\leq^u_C F(x_0)$

(b) $x \in \mathcal{X}, F(x) \leq^u_C F(x_0) \Longrightarrow F(x_0) \leq^u_C F(x)$

まず、ベクトル値の目的関数をロバスト化した問題 (RC-VP) を考える。(RC-VP) は upper 型の集合最適化問題であることに注意する。

$$\text{(RC-VP)} \begin{cases} u\text{−minimize} \quad F(x) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

$\Psi : 2^Y \to [-\infty, \infty]$ をスカラー関数とする。次に、(RC-VP) をスカラー化した問題

$$(S_\Psi\text{-RC-VP}) \begin{cases} \text{minimize} \quad \Psi(F(x)) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X} \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

ここで、$A \subset Y$ を空でない集合、$\varphi : Y \to [-\infty, \infty]$ を Ψ とは別物のスカラー化関数とする。$\varphi_{A-K} : Y \to [-\infty, \infty]$ とする。VP($\mathcal{U}$) をスカラー化した (S_φ-VP($\mathcal{U}$)) を考える。

$$(S_\varphi\text{-VP}(\mathcal{U})) \begin{cases} \text{minimize} \quad \varphi_{A-K}(f(x,\xi)) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X} \end{cases} \qquad \text{注：}\varphi_{A-K}(y) := \inf_{a \in A-K} \varphi(y-a), \quad \forall y \in Y$$

次に、[7] の手法を利用して、(S_φ-VP($\mathcal{U}$)) をロバスト化した (RC-S_φ-VP) を考える。

$$(\text{RC-}S_\varphi\text{-VP}) \begin{cases} \text{minimize} \quad \sup_{y \in F(x)} \varphi_{A-K}(y) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X} \end{cases} \qquad \text{注：}\sup_{\xi \in \mathcal{U}} \varphi_{A-K}(f(x,\xi)) = \sup_{y \in F(x)} \varphi_{A-K}(y)$$

[9] では、問題 (S_Ψ-RC-VP) と (RC-S_φ-VP) が等しくなる十分条件について考察している。特別な場合として、Gerstewitz の非線形スカラー関数 [16] を適用した結果が以下である。

定理 5.3 ([9])**.** *$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to Y$、$F : \mathcal{X} \to \mathrm{cl}(\mathcal{V}_C)$、$C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。*

$$\phi_{k^0,a}(y) = \min\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + a - C\}, \qquad G_{k^0,A}(B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, B \subset tk^0 + A - C\}$$

$A = F(x_0)$ とする。そのとき、次は同値である。

(1) *x_0 はロバスト狭義有効解である。*

(2) *x_0 は RC-S_ϕ-VP の唯一解である。*

(3) *x_0 は S_G-RC-VP の唯一解である。*

上記の定理にある $G_{k^0,A}(B)$ は、前節で定義した $h^u_{\inf}$ と全く同じである。**どうやら、u 型の集合関係はロバスト多目的最適化問題に対してとても有用であるようだ。**さらには、定義 4.1・定理 4.8 におけるスカラー化関数表現は RC-S_ϕ-VP 型、定義 4.2・4.2 節冒頭（定理 4.7）におけるスカラー化関数表現は S_G-RC-VP 型である。定理 4.5 は、上記の定理 5.3 の理論的な裏付けの役割があるとも言える。

参考文献

[1] Y. Araya, *Nonlinear scalarizations and some applications in vector optimization*, Nihonkai Math. J. 21(1), (2010), 35–45.

[2] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75(9), (2012), 3821–3835.

[3] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6(1), (2020), 13–33.

[4] Y. Araya, *Some types of minimal element theorems and Ekeland's variational principles in set optimization*, Linear Nonlinear Anal. 6(2), (2020), 187–204.

[5] Y. Araya, *On some properties of conjugate relation and subdifferentials in set optimization problem*, Proceedings of NACA-ICOTA-I- (Hakodate, Japan, 2019) 1–23, 2021.

[6] Y. Araya, *On the ordinal structure of the weighted set relation*, Nihonkai Math. J. 32(2), (2021), 91–105.

[7] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Robust optimization—methodology and applications*, Math. Program. 92(3) Ser. B, (2002), 453–480.

[8] G. Bouza, E. Quintana, C. Tammer, *A steepest descent method for set optimization problems with set-valued mappings of finite cardinality*, J. Optim. Theory Appl. 190(3), (2021), 711–743.

[9] E. Caprari, C. B. Lorenzo, E. Molho, *Scalarization and robustness in uncertain vector optimization problems: a non componentwise approach*, J. Global Optim. 84(2), (2022), 295–320

[10] J. Chen, Q. H. Ansari, J. Yao, *Characterizations of set order relations and constrained set optimization problems via oriented distance function*, Optimization 66(11), (2017), 1741–1754.

[11] J. Chen, E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *A new set order relation in set optimization*, J. Nonlinear Convex Anal. 18(4), (2017), 637–649.

[12] M. Ehrgott, J. Ide, A. Schöbel, *Minmax robustness for multi-objective optimization problems*, European J. Oper. Res. 239 (2014), 17–31.

[13] G. Eichfelder, J. Jahn, *Vector optimization problems and their solution concepts*, Recent developments in vector optimization, Q. H. Ansari and J. C. Yao (eds.), 1–27, Vector Optim., Springer, Berlin, 2012.

[14] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, J. Nonlinear Convex Anal. 1(3), (2000), 245–254.

[15] C. Gerstewitz, *Nichtkonvexe Dualitt in der Vektoroptimierung* [*Nonconvex duality in vector optimization*], Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg, 25(3), (1983), 357–364.

[16] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67(2), (1990), 297–320.

[17] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[18] C. Gutierrez, B. Jimenez, B, E. Miglierina and E. Molho, *Scalarization in set optimization with solid and nonsolid ordering cones*, J. Global Optim. 61(3), (2015), 525–552.

[19] A. Hamel, A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7(1), (2006), 19–37.

[20] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325(1), (2007), 1–18.

[21] J. B. Hiriart-Urruty, *Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces*, Math. Oper. Res. 4(1), (1979), 79–97.

[22] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[23] J. Jahn, *Vector optimization. Theory, applications, and extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[24] J. Jahn, *Vectorization in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 167(3), (2015), 783–795.

[25] J. Jahn, *Directional derivatives in set optimization with the set less order relation*, Taiwanese J. Math. 19(3), (2015), 737–757.

[26] J. Jahn, T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148(2), (2011), 209–236.

[27] B. Jimnez, V. Novo, A. Vrílchez, *A set scalarization function based on the oriented distance and relations with other set scalarizations*, Optimization 67(12), (2018), 2091–2116.

[28] B. Jimnez, V. Novo, A. Vrílchez, *Characterization of set relations through extensions of the oriented distance*, Math. Methods Oper. Res. 91(1), (2020), 89–115.

[29] B. Jimnez, V. Novo, A. Vrílchez, *Six set scalarizations based on the oriented distance: properties and application to set optimization*, Optimization 69(3), (2020), 437–470.

[30] E. Karaman, I. Atasever Güvenç, M. Soyertem, D. Tozkan, M. Küçük, Y. Küçük, *A vectorization for nonconvex set-valued optimization*, Turkish J. Math. 42(4), (2018), 1815–1832.

[31] E. Köbis, M. A. Köbis, *Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization*, Optimization 65(10), (2016), 1805–1827.

[32] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30(3), (1997), 1487–1496.

[33] D. Kuroiwa, *On set-valued optimization*, Nonlinear Anal. 47(2), (2001), 1395–1400.

[34] I. Kuwano, T. Tanaka, S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, Proceedings of Nonlinear analysis and optimization, 193–204, Yokohama Publ., Yokohama, 2009.

[35] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[36] A. L. Peressini *Ordered topological vector spaces*, Harper & Row, Publishers, New York-London 1967.

[37] C. Tammer, P. Weidner, *Scalarization and separation by translation invariant functions —with applications in optimization, nonlinear functional analysis, and mathematical economics*, Vector Optimization. Springer, Cham, 2020.

[38] H. Yu, K. Ike, Y. Ogata, Y. Saito, T. Tanaka, *Computational methods for set-relation-based scalarizing functions*, Nihonkai Math. J. 28(2), (2017), 139–149.